Partielle Halbgruppen, Polyide und Monopolyide

(Kategorien und X-Kategorien)

Josef Hübl

Josef.Huebl@sss.de

Auflösung ! Siehe letzte Seite.

Danksagung

Ich möchte diese Gelegenheit nutzen, um all jenen Professoren der Technischen Universität München zu danken, von denen ich während meines Studiums in den Jahren 1979-1984 eine fundierte mathematische Ausbildung erhielt. Namentlich seien hier diejenigen hervorgehoben, deren Vorlesungsskripten ich auch für diese Arbeit als Nachschlagewerk zu Rate gezogen habe. Dies sind: Prof. Dr. F. Kröger, Prof. Dr. W. Liebert, Prof. Dr. K. Sörensen, Prof. Dr. G. Tinhofer und Prof. Dr. H. Wähling.

Namentlich möchte ich mich auch bei Prof. Dr. H. Kopp (Fachhochschule Regensburg) bedanken, der mir als mein Dienstvorgesetzter in den Jahren 1991-1993 ermöglichte, wesentliche Teile dieses Werkes im Rahmen eines größeren Projektes zu erarbeiten. Er machte mich auch auf die Theorie von Prof. Dr. G. Hotz aufmerksam.

Bedanken möchte ich mich auch bei all jenen die mich durch Rat und Tat motivierten diese Arbeit zu vollenden. Dabei besonders erwähnen möchte ich meine Ehefrau Bettina Hübl und meinen langjährigen Freund Herbert Öpp.

Regensburg, den 27.01.1995 Josef Hübl

In Teilen wurde diese Arbeit, im Rahmen des an der Fachhochschule Regensburg stattgefundenen Modellversuchs zur "Intergation studenteneigener Rechner in das Studium an Fachhochschulen" (1991-1993), gefördert durch das Bayerische Staatsministerium für Unterricht, Kultus, Wissenschaft und Kunst, sowie das Bundesministerium für Bildung und Wissenschaft.

Vorwort

Die vorliegende Publikation entstand im Rahmen eines größeren Projekts [HÜB95], das die Erforschung bzw. Festlegung der Syntax und Semantik visueller Datenflußsprachen zum Ziel hatte. Es zeigte sich bald, daß die dazu notwendigen theoretischen Grundlagen entweder nicht oder in nur ungenügender Form vorhanden waren. Ebenso, wie zur Beschreibung der Syntax eine eigene Netzwerktheorie entwickelt werden mußte, wurde zur Festlegung der Semantik, als Verallgemeinerung der Gruppen- und Halbgruppentheorie, die vorliegende Theorie der partiellen Halbgruppen, Polyide und Monopolyide entwickelt. Obwohl G. Hotz [HOT72] bereits ein ähnliches Problem mit der Theorie der freien X-Kategorien gelöst hatte, war es zunächst nicht möglich seinen Ansatz in gewünschter und analoger Weise weiter zu entwickeln, da sich die Theorie der Kategorien und X-Kategorien für die Definition der Semantik visueller Datenflußsprachen als zu kompliziert und unhandlich erwies. Erst als die wesentlichen Sachverhalte daraus in eine direkte Verallgemeinerung der Gruppen- und Halbgruppentheorie übertragen waren, wurde der Weg zum Ziel sichtbar.

Die nun vorliegende Theorie der partiellen Halbgruppen, Polyide und Monopolyide enthält nicht nur alle mathematischen Grundlagen, die zur Definition der Semantik visueller Datenflußsprachen notwendig sind. Mit ihr können auch in einfacher Form die von G. Hotz in [HOT72] veröffentlichten Ergebnisse nachvollzogen werden. Darüber hinaus verbinde ich mit dieser Theorie die Hoffnung, daß sie in noch vielen anderen Fällen, in denen die Gruppentheorie oder die Theorie der Kategorien bisher nicht weiter halfen, die geeigneten mathematischen Grundlagen, zur Lösung der anstehenden Probleme bietet.

Regensburg, den 27.01.1995 Josef Hübl

Inhaltsverzeichnis

0. Einleitung und Motivation

Wie in [HÜB95] gezeigt, kann ein Datenflußnetzwerk als formatiertes, fortlaufend indiziertes Subzentren-Netzwerk beschrieben werden. Dabei handelt es sich im wesentlichen um spezielle knotenbewertete Graphen, die wie in Bild 0.2 zu sehen, graphisch sehr anschaulich dargestellt werden können. Auf diesen Netzwerken können nun zwei algebraische Operationen definiert werden. Dies ist zum einen das parallele Produkt "$\times$" wie es schematisch in Bild 0.4 dargestellt ist und zum anderen das serielle Produkt "$\bullet$", wie es in Bild 0.6 zu sehen ist. Dabei ist das serielle Produkt zweier Netzwerke nur dann definiert, wenn die äußeren Ausgänge (Pfeile rechts am Rahmen) des ersten Operanden und die äußeren Eingänge (Pfeile links am Rahmen) des zweiten Operanden in Anzahl und Typ (Farbe bzw. Graustufe) übereinstimmen.

Da für die Interpretation solcher Subzentren-Netzwerke nur deren Struktur, nicht jedoch die Knotenmenge des zugrunde liegenden Graphen von Bedeutung ist, können sie zu Isomorphie- bzw. Äquivalenzklassen zusammengefaßt werden, wobei das parallele und das serielle Produkt über die Repräsentanten auch auf die Äquivalenzklassen übertragen werden können. Bezeichnet $\mathcal{N}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{F}}/\sim$ die Menge all dieser Äquivalenzklassen, so kann man sehr leicht nachweisen, daß $(\mathcal{N}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{F}}/\sim,\times)$ eine Halbgruppe bzw. ein Monoid ist, wobei das leere Netzwerk das Neutralelement ist. Da das serielle Produkt nicht für alle Operandenpaare definiert ist, ist es zur Beschreibung der algebraischen Struktur von $(\mathcal{N}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{F}}/\sim,\bullet_{\mathrm{D}})$ notwendig den Begriff der Halbgruppe so zu einer partiellen Halbgruppe zu verallgemeinern, daß die zugehörige Operation auch nur partiell definiert sein kann. Der Definitionsbereich D gibt dabei an, für welche Operandenpaare die Operation definiert ist. Anders als in einer normalen Halbgruppe können in einer partiellen Halbgruppe mehrere verschiedene Neutralelemente existieren. Gibt es zu jedem Element aus einer partiellen Halbgruppe eine links- und eine rechtsseitige Identität, so erhält man als Verallgemeinerung eines Monoids ein Polyid. Unter diesen Voraussetzungen kann festgestellt werden, daß $(\mathcal{N}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{F}}/\sim,\bullet_{\mathrm{D}})$ ein Polyid ist.

Gibt es auf einer Menge zwei Operationen, so ist es natürlich interessant zu prüfen, welche Distributivgesetze gelten. Im Falle obiger Netzwerke gilt:

$$([H_1]\bullet[H_2])\times([H_3]\bullet[H_4])=([H_1]\times[H_3])\bullet([H_2]\times[H_4])$$

Dabei müssen die entsprechenden seriellen Produkte natürlich definiert sein. (In Bild 0.8 wird dieses Gesetz veranschaulicht.) Bildet eine Menge mit zwei Operationen bzgl.

der ersten Operation ein Monoid und bzgl. der zweiten Operation ein Polyid und ist (zusätzlich zu einigen unwesentlichen anderen Randbedingungen) obiges Distributivgesetz erfüllt, so wird die entsprechende algebraische Struktur als Monopolyid bezeichnet. In der Tat kann mit etwas Mühe nachgewiesen werden, daß $(N_T^F/\sim, \times, \bullet_D)$ ein Monopolyid ist.

Da sich auf bestimmten Mengen von Abbildungen ebenfalls solche Operationen definieren lassen, so daß diese ebenfalls ein Monopolyid bilden, kann gezeigt werden, daß die Interpretation eines Datenflußnetzwerkes über einen Monopolyiden-Homomorphismus beschreibbar ist. Natürlich gibt es viele solcher Monopolyiden-Homomorphismen. Im Falle der Interpretation eines Datenflußnetzwerkes ist es jedoch von Bedeutung, eine sinnvolle Interpretation durchzuführen. Dies bedeutet, daß an einen derartigen Monopolyiden-Homomorphismus einige Anforderungen gestellt werden. Insbesondere wird im vorhinaus festgelegt, wie besonders einfache Netzwerke zu interpretieren sind. Diese Vorschrift definiert dann eine Abbildung ϕ' auf einer Teilmenge N' von $N_T^F/\sim$. Ist $<N', \times, \bullet_D>$ das von N' erzeugte Untermonopolyid, so ist es das Ziel, die Teilmenge N' und die Abbildung ϕ' so geschickt zu wählen, daß ϕ' zu genau einem Monopolyiden-Homomorphismus ϕ auf ganz $<N', \times, \bullet_D>$ fortgesetzt werden kann. Es ist ein erheblicher Aufwand notwendig um dazu geeignete Kriterien für die Abbildung ϕ' und die Teilmenge N' angeben zu können. Diese Kriterien können jedoch, wie in [HÜB95] gezeigt, dazu verwendet werden eine α-überführbare Abbildung ϕ' und eine Teilmenge N' von $N_T^F/\sim$ zu definieren, so daß das von N' erzeugte Untermonopolyid $<N', \times, \bullet_D>$ ein α-vollkommenes Monopolyid ist. Dies bedeutet nichts anderes, als daß jede α-überführbare Abbildung die von N' ausgeht, zu genau einem Monopolyiden-Homomorphismus fortgesetzt werden kann.

Die Entwicklung der angedeuteten Kriterien ist jedoch mit einem sehr großen Aufwand verbunden und ist keineswegs als einfach oder gar trivial zu bezeichnen. Sie erfordert auch, detailliert auf Kongruenzen, Erzeugendensysteme, sequentielle Darstellungen und symmetrische Substitutionsmengen einzugehen.

Da es sich bei der algebraischen Struktur der Kategorie ebenfalls um eine Verallgemeinerung einer Halbgruppe handelt, wird in einem abschließenden Kapitel darauf eingegangen, welcher (einfache) Zusammenhang zwischen einem Polyid bzw. Monopolyid einerseits und einer Kategorie bzw. X-Kategorie andererseits besteht. Dieses Kapitel beantwortet aber auch die Frage, warum mit Polyiden bzw. Monopolyiden wesentlich einfacher zu arbeiten ist, als mit Kategorien bzw. X-Kategorien.

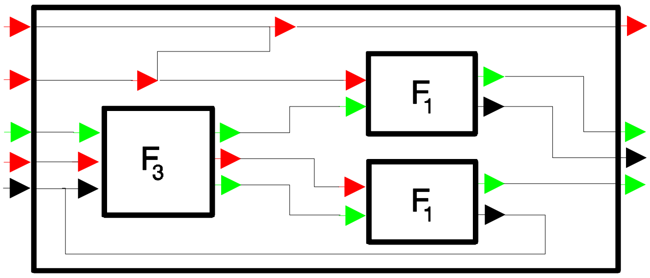

Bild 0.2: Ein formatiertes, fortlaufend indiziertes Subzentren-Netzwerk, wobei die Subzentren als kleine Rechtecke dargestellt sind.

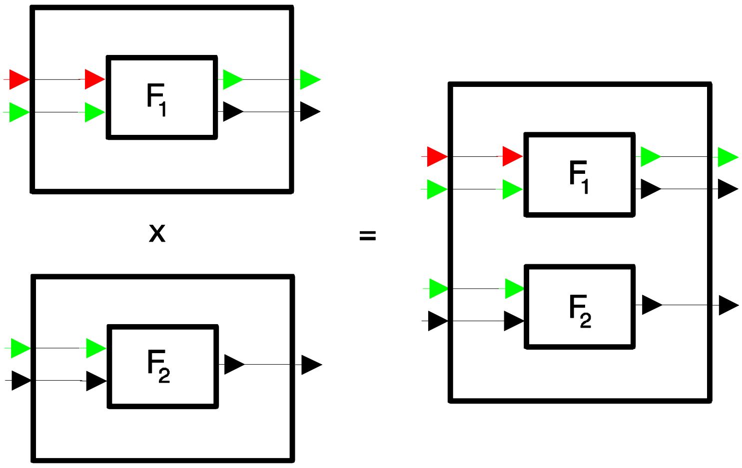

Bild 0.4: Das parallele Produkt zweier formatierter, fortlaufend indizierter Subzentren-Netzwerke.

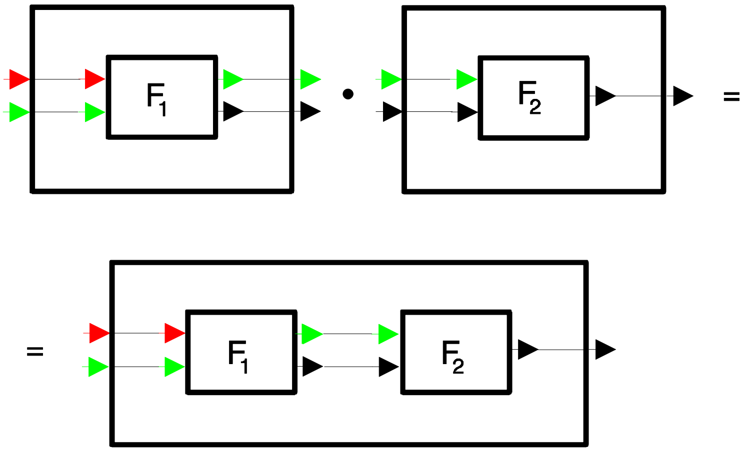

Bild 0.6: Das serielle Produkt zweier formatierter, fortlaufend indizierter Subzentren-Netzwerke.

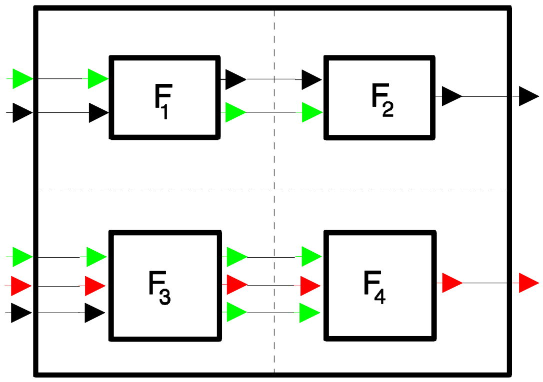

Bild 0.8: Eine Verdeutlichung des Distributivgesetzes für Monopolyide. Dabei ist das Netzwerk H_i durch das Subzentrum von Typ F_i bestimmt.

1. Partielle Halbgruppen und Polyide

Ist die zu einer Halbgruppe gehörende Operation nicht für alle Operandenpaare definiert, so liegt unter Umständen eine partielle Halbgruppe vor. Diese wird als Polyid bezeichnet, wenn zu jedem Element ein links- und ein rechtsseitiges Neutralelement existiert. Damit handelt es sich bei der algebraischen Struktur des Polyids um eine Verallgemeinerung eines Monoids. In diesem Kapitel werden im wesentlichen die grundlegenden Begriffe, wie man sie aus der Theorie der Halbgruppen oder Monoide kennt, auf partielle Halbgruppen und Polyide verallgemeinert. Insbesondere wird dabei auf Erzeugendensysteme und Kongruenzen eingegangen, da diese im Bezug auf die noch zu definierenden Monopolyide eine große Rolle spielen.

1.1 Partielle Halbgruppen

Bei der algebraischen Struktur einer partiellen Halbgruppe handelt es sich um eine Verallgemeinerung einer Halbgruppe, wobei die zugehörige Operation nicht für alle Paare definiert sein muß.

Definition 1.1.2:

Ist P eine Menge, $D \subseteq PxP$ und $\circ : D \to P$ eine (partiell definierte) Operation auf P, dann soll das Tupel $(P,\circ_D)$ eine **partielle Halbgruppe** heißen wenn gilt:

$(f,g),(g,h) \in D \Leftrightarrow (f,g),(f\circ g,h) \in D \Leftrightarrow (g,h),(f,g\circ h) \in D \Leftrightarrow (f\circ g)\circ h = f\circ(g\circ h)$.

Ist $(f,g) \in D$, so sagt man auch: **$f\circ g$ ist definiert.**

Eine partielle Halbgruppe ist also genau dann eine "ganze" Halbgruppe, wenn alle möglichen Produkte definiert sind, d.h. $D=PxP$ ist.

Es folgt eine mehr oder weniger lose Aufzählung von Definitionen und Sätzen, wie man sie von Halbgruppen und Gruppen kennt (vgl. [HEB93] oder [KAR73]), die hier für partielle Halbgruppen verallgemeinert wurden.

Definition 1.1.4:

Sei $(P,\circ_D)$ eine partielle Halbgruppe.

(a) Ein Element $1 \in P$ heißt **linksneutral** in $(P,\circ_D)$, wenn gilt: $1\circ v=v$, für alle $v \in P$ mit $(1,v) \in D$.

(b) Ein Element $a \in P$ heißt **linkskürzbar** in $(P,\circ_D)$, wenn für alle $u,v \in P$ mit $(a,u),(a,v) \in D$ aus $a\circ u=a\circ v \Rightarrow u=v$. Gilt dies für alle Elemente aus P, so heißt $(P,\circ_D)$ eine **linkskürzbare partielle Halbgruppe.**

(c) Ein Element $a \in P$ heißt **idempotent** in $(P,\circ_D)$, wenn $(a,a) \in D$ und $a\circ a=a$ ist.

(d) Ein Element $a \in P$ heißt **isoliert** in $(P,\circ_D)$, wenn für alle $u \neq a \in P$ gilt: $(u,a) \notin D$ und $(a,u) \notin D$.

Rechtsneutrale und **rechtskürzbare** Elemente seien in zu (a) und (b) analoger Art und Weise definiert.

Definition 1.1.6:

In einer partiellen Halbgruppe $(P,\circ_D)$ heißt ein Element $1\in P$ ein **Neutralelement**, eine **Einheit** oder eine **Identität**, wenn es links- und rechtsneutral ist. Die Menge aller Identitäten aus P sei mit $\mathbf{1_P}$ bezeichnet.

Definition 1.1.8:

In einer partiellen Halbgruppe $(P,\circ_D)$ heißt ein Element $u\in P$ **kürzbar**, wenn es sowohl links- als auch rechtskürzbar ist. Sind alle Elemente aus P kürzbar, dann heißt $(P,\circ_D)$ eine **kürzbare partielle Halbgruppe.**

Definition 1.1.10:

Sind $(P',\cdot_{D'})$ und $(P,\circ_D)$ zwei partielle Halbgruppen, dann heißt $(P',\cdot_{D'})$ genau dann eine **partielle Unterhalbgruppe** von $(P,\circ_D)$, wenn $P'\subseteq P$, $D'=D\cap(P'xP')$ und $u\cdot v=u\circ v$ für alle $(u,v)\in D'$.

Da damit die partiellen Operationen "$\cdot$" und "$\circ$" auf P' übereinstimmen, ist es legitim für beide Operationen auch das gleiche Zeichen zu verwenden.

Satz und Definition 1.1.12:

Ist $(P,\circ_D)$ eine partielle Halbgruppe und $P'\subseteq P$, dann ist $(P',\circ_{D'})$ mit $D':=\{(u,v)\in D\cap(P'xP')\}$, genau dann eine partielle Unterhalbgruppe von $(P,\circ_D)$, wenn **P' bzgl. "$\circ$" abgeschlossen** ist, d.h. $(u,v)\in D\cap(P'xP') \Rightarrow u\circ v\in P'$. Ist P' bzgl. "$\circ$" abgeschlossen nennt man statt $(P',\circ_{D'})$ bereits P' eine partielle Unterhalbgruppe von $(P,\circ_D)$.

Beweis:

"$\Rightarrow$" Sei P' bzgl. "$\circ$" abgeschlossen $\Rightarrow$ $D'=D\cap P'xP'$.

"$\Leftarrow$" Sei $(P',\circ_{D'})$ partielle Unterhalbgruppe von $(P,\circ_D)$, dann gilt: $(u,v)\in D\cap P'xP' \Rightarrow u\circ v\in P' \Rightarrow$ P' ist bzgl. "$\circ$" abgeschlossen.

q.e.d.

Satz und Definition 1.1.14:

Ist $(P,\circ_D)$ eine partielle Halbgruppe, $P'\subseteq P$ und $U_P(P')$ die Menge aller partiellen Unterhalbgruppen von $(P,\circ_D)$ die P' enthalten, dann ist $\mathbf{<P'>_P} := \bigcap_{P''\in U_P(P')} P''$ eine partielle Unterhalbgruppe von

$(P,\circ_D)$, die die von P' **erzeugte partielle Unterhalbgruppe** heißt. P' heißt dann auch ein **Erzeugendensystem** von $<P'>_P$.

Beweis:

Jede partielle Unterhalbgruppe $(P'',\circ_{D''})$ ist gegenüber "$\circ$" abgeschlossen. Damit ist auch $<P'>_P$ gegenüber "$\circ$" abgeschlossen und nach Satz und Definition 1.1.12 eine partielle Unterhalbgruppe.

Definition 1.1.16:

Ist $(P,\circ_D)$ eine partielle Halbgruppe, $u_i \in P$ für $1 \leq i \leq n$ und $(u_i,u_{i+1}) \in D$ für $1 \leq i \leq n-1$, dann sei das Produkt $\bigcirc_{i=1}^{n} u_i$ induktiv definiert durch $\bigcirc_{i=1}^{1} u_i := u_1$ und $\bigcirc_{i=1}^{k+1} u_i := (\bigcirc_{i=1}^{k} u_i) \circ u_{k+1}$.
(Anmerkung: Wird statt "$\circ$" ein anderes Symbol (z.B. "$\times$") verwendet, so wird dieses in vergrößerter Ausführung als Produktsymbol (z.B. $\bigtimes_{i=1}^{n} u_i$) verwendet.)

Es ist leicht zu sehen, daß dieses Produkt wohldefiniert ist, da mit $(u_i,u_{i+1}),(u_{i+1},u_{i+2}) \in D \Rightarrow ((u_i \circ u_{i+1}),u_{i+2}) \in D$, $(u_i,(u_{i+1} \circ u_{i+2})) \in D$ und $(u_i \circ u_{i+1}) \circ u_{i+2} = u_i \circ (u_{i+1} \circ u_{i+2})$.

Satz und Definition 1.1.18:

Ist $(P,\circ_D)$ eine partielle Halbgruppe, $P' \subseteq P$ und P^i induktiv definiert durch $P^0 = P'$ und $P^{i+1} := P^i \cup \{u \circ v\colon u,v \in P^i \text{ und } (u,v) \in D\}$, dann ist die Menge $<P',\circ>_P := \bigcup_{i \in N_0} P^i$ bezüglich der (partiellen) Operation "$\circ$" abgeschlossen. $<P',\circ>_P$ heißt die **Menge der endlichen Produkte von P' in P bzgl.** "$\circ$" und ist eine partielle Unterhalbgruppe von $(P,\circ_D)$.

Beweis:

Sei $u,v \in <P',\circ>_P$ mit $(u,v) \in D \Rightarrow \exists\ j \in \mathbb{N}_0$ mit $u,v \in P^j$ und $(u,v) \in D \Rightarrow u \circ v \in P^{j+1} \Rightarrow u \circ v \in \bigcup_{i \in N_0} P^i = <P',\circ>_P$. $\Rightarrow$ $<P',\circ>_P$ ist bezüglich "$\circ$" abgeschlossen. Der Rest folgt aus Satz und Definition 1.1.12.

Satz 1.1.20:

Ist $(P,\circ_D)$ eine partielle Halbgruppe, $P'\subseteq P$ und $(P,\circ_D)=\langle P',\circ\rangle_P$, dann gibt es zu jedem $u\in P$ eine endliche Zerlegung der Form $u=\bigcirc_{i=1}^{n} u_i$ mit $u_i\in P'$ für $1\leq i\leq n$.

Beweis:

$(P,\circ_D)=\langle P',\circ\rangle_P \Rightarrow$ Sei $u\in\langle P',\circ\rangle_P$ und P^i wie in Satz und Definition 1.1.18 definiert, dann existiert ein $j\in\mathbb{N}_0$ mit $u\in P^j$. Für $j=0$ ist $u\in P^0=P'$ und damit die Aussage richtig. Angenommen die Aussage ist richtig für alle $u\in P^j$ mit $j<k$ und $u\in P^k\backslash P^{k-1} \Rightarrow$ $\exists$ $v,w\in P^{k-1}$ mit $(v,w)\in D$ und $u=v\circ w$. Für v bzw. w existiert nach Induktionsvoraussetzung eine Zerlegung der Form $v=\bigcirc_{i=1}^{m} u_i$ bzw. $w=\bigcirc_{i=m+1}^{n} u_i$ mit $u_i\in P'$ für $1\leq i\leq n \Rightarrow u=v\circ w=(\bigcirc_{i=1}^{m} u_i)\circ(\bigcirc_{i=m+1}^{n} u_i)=\bigcirc_{i=1}^{n} u_i$.

q.e.d.

Dieser Satz rechtfertigt also nachträglich für $\langle P',\circ\rangle_P$ den Namen "Menge der endlichen Produkte von P' in $(P,\circ_D)$ bzgl. "$\circ$".

Definition 1.1.22:

Sind $(P_1,\circ_{D_1})$ und $(P_2,\cdot_{D_2})$ zwei partielle Halbgruppen, dann heißt eine Abbildung $\phi:P_1\rightarrow P_2$ genau dann ein **Homomorphismus (auf partiellen Halbgruppen)**, wenn gilt:

$(u,v)\in D_1 \Rightarrow (\phi(u),\phi(v))\in D_2$ und $\phi(u\circ v)=\phi(u)\cdot\phi(v)$

Entsprechend heißt ein Homomorphismus ein **Monomorphismus**, wenn ϕ injektiv ist und ein **Epimorphismus** bzw. **Isomorphismus**, wenn ϕ surjektiv bzw. bijektiv ist und für $u,v\in P_1$ gilt: $(\phi(u),\phi(v))\in D_2$ $\Rightarrow (u,v)\in D_1$.

Ist $D_1=P_1 x P_1$ und $D_2=P_2 x P_2$, dann stimmt diese Art der Definition des Homomorphismus' mit der normalen Definition eines Homomorphismus' für Halbgruppen überein. Wie üblich ist ein Homomorphismus genau dann ein Isomorphismus, wenn er gleichzeitig Monomorphismus und Epimorphismus ist.

1.2 Kongruenzen

Obwohl es sich bei den Kongruenzen auf partiellen Halbgruppen wieder um eine Verallgemeinerung von Kongruenzen auf Halbgruppen bzw. Gruppen handelt, wird dieser Abschnitt gesondert herausgestellt, da hier einige zusätzliche Zusammenhänge erarbeitet werden.

Definition 1.2.2:

Ist P eine Menge, dann heißt $\rho\subseteq P\times P$ eine **binäre Relation.** (Statt $(u,v)\in\rho$ schreibt man auch **$u\rho v$.**) ρ heißt **reflexiv**, wenn $u\rho u$ für alle $u\in P$; **symmetrisch**, wenn mit $u\rho v$ auch $v\rho u$ gilt; **transitiv**, wenn mit $u\rho v$ und $v\rho w$ auch $u\rho w$ gilt.
Eine binäre Relation $\sim$ heißt **Äquivalenzrelation**, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Für $u\in P$ heißt **$[u]$**$:=\{v\in P:v\sim u\}$ die **Äquivalenzklasse von u in P. $P/\sim$**$:=\{[u]:u\in P\}$ heißt die **Quotientenmenge** von P bzgl. $\sim$.

Ist eine Relation $\sim$ transitiv, so sei statt $u\sim v$, $v\sim w$ auch die abgekürzte Schreibweise $u\sim v\sim w$ erlaubt.

Definition 1.2.4:

Ist $(P,\circ_D)$ eine partielle Halbgruppe, dann heißt eine binäre Relation $\sim\subseteq P\times P$ **linksverträglich mit "$\circ$"**, wenn für $u,v,w\in P$ gilt: $u\sim v$ und $w\circ u$ ist definiert $\Rightarrow$ $w\circ v$ ist definiert und $w\circ u\sim w\circ v$. Analog heißt $\sim$ **rechtsverträglich mit "$\circ$"**, wenn für $u,v,w\in P$ gilt: $u\sim v$ und $u\circ w$ ist definiert $\Rightarrow$ $v\circ w$ ist definiert und $u\circ w\sim v\circ w$.

Definition 1.2.6:

Ist $(P,\circ_D)$ eine partielle Halbgruppe, dann heißt eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf P, eine **Kongruenzrelation** oder einfach **Kongruenz auf $(P,\circ_D)$**, wenn $\sim$ links- und rechtsverträglich mit "$\circ$" ist.

Satz 1.2.8:

Ist $(P,\circ_D)$ eine partielle Halbgruppe und $\sim$ eine Kongruenz auf $(P,\circ_D)$, dann gilt für $u,u',v,v'\in P$: Ist $u\sim u'$, $v\sim v'$ und $u\circ v$ definiert, so ist $u\circ v\sim u'\circ v'$.

Beweis:

$\sim$ ist eine Kongruenz auf $(P,\circ_D)$ $\Rightarrow$ $\sim$ ist links- und rechtsverträglich mit "$\circ$". Wegen $u\sim u'$ und $(u,v)\in D \Rightarrow (u',v)\in D$ und $u\circ v\sim u'\circ v$. Wegen $v\sim v'$ und $(u',v)\in D \Rightarrow (u',v')\in D$ und $u'\circ v\sim u'\circ v' \Rightarrow u\circ v\sim u'\circ v'$, da $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

Definition 1.2.10:

Ist $(P,\circ_D)$ eine partielle Halbgruppe, $\sim$ eine Kongruenz auf $(P,\circ_D)$, ρ eine symmetrische Teilmenge von $\sim$ und $u,v\in P$, dann heißt **u bzgl. ρ direkt überführbar in v**, wenn $u=v$ ist oder es existieren $w_1,w_1'\in P$ mit $(w_1,w_1')\in\rho$ und eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(a) $u=w_1$ und $v=w_1'$.

(b) $\exists\ w_0\in P$ mit $u=w_0\circ w_1$ und $v=w_0\circ w_1'$

(c) $\exists\ w_2\in P$ mit $u=w_1\circ w_2$ und $v=w_1'\circ w_2$

(d) $\exists\ w_0,w_2\in P$ $u=w_0\circ w_1\circ w_2$ und $v=w_0\circ w_1'\circ w_2$

Der Begriff der Überführbarkeit muß vor dem Hintergrund gesehen werden, daß jedes Element u aus P in ein Produkt $u=w_0\circ w_1\circ\ldots\circ w_n$ zerlegt werden kann. Damit zeigt sich bei genauerem Betrachten der Bedingungen (a)-(d), daß diese gerade so formuliert sind, daß sie das Substituieren einer zusammenhängenden Sequenz von Faktoren in einer Zerlegung von u beschreiben, wobei die zu ersetzenden Faktoren und die ersetzenden Faktoren identisch oder bzgl. ρ äquivalent sind. (Im Bezug auf die sogenannten sequentiellen Darstellungen der noch zu definierenden Monopolyide wird dies noch genauer erläutert werden.)

Der Begriff der Überführbarkeit, soll nun noch etwas erweitert werden.

Definition 1.2.12:

Ist $(P,\circ_D)$ eine partielle Halbgruppe, $\sim$ eine Kongruenz auf $(P,\circ_D)$, ρ symmetrische Teilmenge von $\sim$ und $u,v\in P$, dann heißt **u bzgl. ρ überführbar in v** (in Zeichen: $u\rightarrow_\rho v$), wenn es eine Folge $u_1,\ldots,u_m\in P$ gibt mit $u=u_1$, $u_m=v$ und für $1\le k\le m-1$ u_k bzgl. ρ direkt überführbar in u_{k+1} ist.

Bevor gezeigt werden kann, daß $\rightarrow_\rho$ eine Kongruenz auf $(P,\circ_D)$ ist, sind noch zwei Hilfssätze zu beweisen.

Hilfssatz 1.2.14:

Ist $(P,\circ_D)$ eine partielle Halbgruppe, $\sim$ eine Kongruenz auf $(P,\circ_D)$, ρ eine symmetrische Teilmenge von $\sim$, $u,v\in P$ und u bzgl. ρ direkt überführbar in v, so ist $u\sim v$.

Beweis:

Sind u und v identisch, so ist der Beweis trivial.
Angenommen $u\neq v$. Da u bzgl. ρ direkt überführbar in v ist, existieren $w_1,w_1'\in P$ mit $(w_1,w_1')\in\rho$ und eine der Bedingungen (a)-(d) ist erfüllt. $\Rightarrow$ $w_1\sim w_1'$, da ρ Teilmenge von $\sim$ ist. Da $\sim$ als Kongruenz links- und rechtsverträglich mit "$\circ$" ist, folgt je nach Fall:

(a) $u=w_1$ und $v=w_1'$ $\Rightarrow$ $u=w_1\sim w_1'=v$.

(b) $\exists$ $w_0\in P$ mit $u=w_0\circ w_1$ und $v=w_0\circ w_1'$ $\Rightarrow$ $u=w_0\circ w_1\sim w_0\circ w_1'=v$.

(c) $\exists$ $w_2\in P$ mit $u=w_1\circ w_2$ und $v=w_1'\circ w_2$ $\Rightarrow$ $u=w_1\circ w_2\sim w_1'\circ w_2=v$.

(d) $\exists$ $w_0,w_2\in P$ $u=w_0\circ w_1\circ w_2$ und $v=w_0\circ w_1'\circ w_2$ $\Rightarrow$ $u=w_0\circ w_1\circ w_2\sim w_0\circ w_1'\circ w_2=v$.

q.e.d.

Hilfssatz 1.2.16:

Ist $(P,\circ_D)$ eine partielle Halbgruppe, $\sim$ eine Kongruenz auf $(P,\circ_D)$, ρ eine symmetrische Teilmenge von $\sim$, $u,v,w\in P$, u bzgl. ρ direkt überführbar in v und $w\circ u$ $(u\circ w)$ definiert, so ist auch $w\circ v$ $(v\circ w)$ definiert und $w\circ u$ $(u\circ w)$ bzgl. ρ direkt überführbar in $w\circ v$ $(v\circ w)$.

Beweis:

Sind u und v identisch, so ist der Beweis trivial.
Angenommen $u\neq v$, u ist bzgl. ρ direkt überführbar in v und $w\circ u$ ist definiert, so ist $u\sim v$ nach Hilfssatz 1.2.14. Da $w\sim w$ und $u\sim v$ ist, ist nach Satz 1.2.8 $w\circ v$ definiert und $w\circ u\sim w\circ v$. Außerdem existieren $w_1,w_1'\in P$ mit $(w_1,w_1')\in\rho$ und eine der Bedingungen (a)-(d) ist erfüllt.

(a) $u=w_1$ und $v=w_1'$ $\Rightarrow$ $w\circ u=w\circ w_1$ und $w\circ v=w\circ w_1'$ $\Rightarrow$ $w\circ u$ ist bzgl. ρ direkt überführbar in $w\circ v$, da die Bedingung (b) von Definition 1.2.10 erfüllt ist.

(b) $\exists$ $w_0\in P$ mit $u=w_0\circ w_1$ und $v=w_0\circ w_1'$ $\Rightarrow$ $w\circ u=(w\circ w_0)\circ w_1$ und $w\circ v=(w\circ w_0)\circ w_1'$ $\Rightarrow$ $w\circ u$ ist bzgl. ρ direkt überführbar in $w\circ v$, da die Bedingung (b) von Definition 1.2.10 erfüllt ist.

(c) $\exists$ $w_2\in P$ mit $u=w_1\circ w_2$ und $v=w_1'\circ w_2$ $\Rightarrow$ $w\circ u=w\circ w_1\circ w_2$ und $w\circ v=w\circ w_1'\circ w_2$ $\Rightarrow$ $w\circ u$ ist bzgl. ρ direkt überführbar in $w\circ v$, da die Bedingung (d) von Definition 1.2.10 erfüllt ist.

(d) $\exists\ w_0, w_2 \in P\ u=w_0 \circ w_1 \circ w_2$ und $v=w_0 \circ w_1' \circ w_2 \Rightarrow w \circ u=(w \circ w_0) \circ w_1 \circ w_2$ und $w \circ v=(w \circ w_0) \circ w_1' \circ w_2 \Rightarrow w \circ u$ ist bzgl. ρ direkt überführbar in $w \circ v$, da die Bedingung (d) von Definition 1.2.10 erfüllt ist.

Für die in Klammern notierten Terme folgt der Beweis analog.

q.e.d.

Satz 1.2.18:

Ist $(P, \circ_D)$ eine partielle Halbgruppe, $\sim$ eine Kongruenz auf $(P, \circ_D)$ und ρ eine symmetrische Teilmenge von $\sim$, dann ist $\rightarrow_\rho$ eine Kongruenz auf $(P, \circ_D)$ und eine Teilmenge von $\sim$. Damit gelten folgende Rechenregeln:

(a) $u \in P \Rightarrow u \rightarrow_\rho u$

(b) $u \rightarrow_\rho v \Rightarrow v \rightarrow_\rho u$

(c) $u \rightarrow_\rho v$ und $v \rightarrow_\rho w \Rightarrow u \rightarrow_\rho w$

(d) $u \rightarrow_\rho u'$ und $u \circ v$ ist definiert $\Rightarrow$
$u' \circ v$ ist definiert und $u \circ v \rightarrow_\rho u' \circ v$

(e) $u \rightarrow_\rho u'$ und $v \circ u$ ist definiert $\Rightarrow$
$v \circ u'$ ist definiert und $v \circ u \rightarrow_\rho v \circ u'$

(f) $u \rightarrow_\rho u'$, $v \rightarrow_\rho v'$ und $u \circ v$ definiert $\Rightarrow$
$u' \circ v'$ ist definiert und $u \circ v \rightarrow_\rho u' \circ v'$.

(g) $u \rightarrow_\rho v \Rightarrow u \sim v$

Beweis:

Zeige die Gültigkeit des Satzes im Zusammenhang mit dem Beweis der Rechenregeln (f) und (g).

(a) Wegen $u=u$ ist nach Definition 1.2.10 u bzgl. ρ direkt überführbar in u. $\Rightarrow u \rightarrow_\rho u$

(b) Gilt, da ρ symmetrisch ist und die Bedingungen (a) und (d) von Definition 1.2.10 symmetrisch formuliert sind und die Bedingungen (b) und (c) korrespondieren.

(c) Ist leicht einzusehen, da die nach Definition 1.2.10 existierenden Folgen zu einer zusammengefaßt werden können.

(d) Sei $u \rightarrow_\rho u'$ und $v \circ u$ definiert. $\Rightarrow$ Es gibt eine Folge $u_1, \ldots, u_m \in P$ mit $u=u_1$, $u_m=u'$ und für $1 \le k \le m-1$ ist u_k bzgl. ρ direkt überführbar in u_{k+1}. Da $v \circ u$ definiert ist, ist damit nach Hilfssatz 1.2.16 induktiv auch $v \circ u_k$ definiert und $v \circ u_k$ bzgl. ρ direkt überführbar in $v \circ u_{k+1}$. $\Rightarrow v \circ u'=v \circ u_m$ ist definiert und $v \circ u \rightarrow_\rho v \circ u'$.

(e) Analog zu (d).

(f) Wegen (a)-(c) ist $\rightarrow_\rho$ eine Äquivalenzrelation auf $(P,\circ_D)$ und wegen (d) bzw. (e) links- bzw. rechtsverträglich mit "$\circ$". Damit ist $\rightarrow_\rho$ eine Kongruenz auf $(P,\circ_D)$ $\Rightarrow$ Behauptung nach Satz 1.2.8.

(g) $u\rightarrow_\rho v \Rightarrow$ Es gibt eine Folge $u_1,...,u_m \in P$ mit $u=u_1$, $u_m=v$ und für $1\leq k\leq m-1$ ist u_k bzgl. ρ direkt überführbar in u_{k+1}. $\Rightarrow$ $u=u_1\sim u_2\sim...\sim u_m=v$ nach Hilfssatz 1.2.14 $\Rightarrow$ $u\sim v$.

q.e.d.

Es sei an dieser Stelle noch einmal hervorgehoben, daß nach (b) die Relation "$\rightarrow_\rho$" symmetrisch ist und somit auch die Formulierung "u und v sind bzgl. ρ ineinander überführbar" sinnvoll ist.

Unter den möglichen, symmetrischen Teilmengen einer Kongruenz auf $(P,\circ_D)$ gibt es besondere, die Basen genannt werden. Dazu folgende Definition:

Definition 1.2.20:

Ist $(P,\circ_D)$ eine partielle Halbgruppe, $\sim$ eine Kongruenz auf $(P,\circ_D)$ und ρ eine symmetrische Teilmenge von $\sim$, dann heißt ρ eine **Basis von $\sim$**, wenn $\rightarrow_\rho$ identisch zu $\sim$ ist, d.h. für $u,v\in P$ ist $u\sim v \Leftrightarrow u\rightarrow_\rho v$.

Der nachfolgende Satz zeigt, daß die in der Definition einer Basis gegebene Bedingung etwas vereinfacht werden kann.

Satz 1.2.22:

Ist $(P,\circ_D)$ eine partielle Halbgruppe, $\sim$ eine Kongruenz auf $(P,\circ_D)$ und ρ eine symmetrische Teilmenge von $\sim$, dann ist ρ genau dann eine Basis von $\sim$, wenn gilt: $u,v\in P$ und $u\sim v \Rightarrow u\rightarrow_\rho v$.

Beweis:

Angenommen $\forall$ $u,v\in P$ mit $u\sim v \Rightarrow u\rightarrow_\rho v$. Dann ist $u\rightarrow_\rho v \Leftrightarrow u\sim v$, da nach Satz 1.2.18 (g) gilt: $u\rightarrow_\rho v \Rightarrow v\sim u$.
Die Umkehrung des Satzes gilt trivialerweise.

q.e.d.

Natürlich existiert zu jeder Kongruenz $\sim$ auf $(P,\circ_D)$ eine Basis, da $\sim$ selbst eine solche definiert. Wie bei Basen im allgemeinen üblich, ist es jedoch stets das Ziel zu einer Kongruenz eine möglichst kleine Basis angeben zu können. Dies hängt natürlich entscheidend von der partiellen Halbgruppe $(P,\circ_D)$ und der

Kongruenz ~ ab und kann nur im Einzelfall untersucht werden. Als Vorbereitung für das Kapitel "Monopolyide" dient dazu nachfolgender Satz. Dabei ist $\mathbb{N}_0$ die Menge aller natürlichen Zahlen vereinigt mit 0.

Satz 1.2.24:

Ist $(P,\circ_D)$ eine partielle Halbgruppe, ~ eine Kongruenz auf $(P,\circ_D)$, ρ eine symmetrische Teilmenge von ~ und existiert ein Homomorphismus $|\;|:(P,\circ_D)\to(\mathbb{N}_0,+)$ so, daß für $u,v\in P$ die Bedingungen (0)-(2) gelten, so ist ρ eine Basis von ~.

(0) $u\sim v \;\Rightarrow\; |u|=|v|$.

(1) $u\sim v$ und $|u|\geq 1 \;\Rightarrow\; \exists\; u',v',w'\in P$ mit $|w'|\geq 1$, $u'\sim v'$, $w'\circ u'$ und $w'\circ v'$ sind definiert und $u \rightarrow_\rho u'\circ w'$ sowie $v\rightarrow_\rho v'\circ w'$.

(2) $u\sim v$ und $|u|=0 \;\Rightarrow\; u\rightarrow_\rho v$.

Beweis:

Zeige mit Induktion über $|u|$, daß gilt: $u\sim v \Rightarrow u\rightarrow_\rho v$. Dann ist ρ nach Satz 1.2.22 eine Basis von ~.

Induktionsanfang: Sei $|u|=0 \Rightarrow u\rightarrow_\rho v$ wegen (2).

Induktionsschritt: Sei $|u|=n+1\geq 1$. Nach (1) existieren damit $u',v',w'\in P$ mit $|w'|\geq 1$, $u'\sim v'$, $u'\circ w'$ und $v'\circ w'$ sind definiert und $u\rightarrow_\rho u'\circ w'$ sowie $v\rightarrow_\rho v'\circ w'$. Wegen $u\rightarrow_\rho u'\circ w'$ ist $u\sim u'\circ w'$ nach Satz 1.2.18 (g). $\Rightarrow |u|=|u'\circ w'|$ nach (0). Da $|\;|$ ein Homomorphismus ist, folgt: $|u|=|u'\circ w'|=|u'|+|w'| \;\Rightarrow\; |u'|=|u|-|w'|=n+1-|w'| \;\Rightarrow\; |u'|\leq n$, da $|w'|\geq 1$. Wegen $u'\sim v'$ und $|u'|\leq n$ gilt nach Induktionsvoraussetzung $u'\rightarrow_\rho v'$. $\Rightarrow u'\circ w'\rightarrow_\rho v'\circ w'$ nach Satz 1.2.18 (d). Unter Berücksichtigung von Satz 1.2.18 (b) und (c) gilt damit:
$u\rightarrow_\rho u'\circ w'\rightarrow_\rho v'\circ w'\rightarrow_\rho v \Rightarrow u\rightarrow_\rho v$.

q.e.d.

Sind auf einer partiellen Halbgruppe mehrere Kongruenzen definiert, so können diese unter Umständen über eine gemeinsame Basis als identisch qualifiziert werden, wie nachfolgender Satz zeigt.

Satz 1.2.26:

Ist $(P,\circ_D)$ eine partielle Halbgruppe, ~ und ≈ zwei Kongruenzen auf $(P,\circ_D)$ und ρ sowohl eine Basis von ~ als auch von ≈, dann sind ~ und ≈ identisch, d.h. für $u,v\in P$ ist $u\sim v \Leftrightarrow u\approx v$.

Beweis:

Aus Satz 1.2.22 folgt unmittelbar: Für $u,v\in P$ ist $u\rightarrow_\rho v \Leftrightarrow u\sim v$ und $u\rightarrow_\rho v \Leftrightarrow u\approx v$. Daraus folgt: $u\sim v \Leftrightarrow u\approx v$.

q.e.d.

Als nächstes soll gezeigt werden, daß ein Homomorphismus, der auf der Basis einer Kongruenz relationserhaltend ist, auf der gesamten Kongruenz relationserhaltend ist. Dazu ist allerdings noch etwas Aufwand notwendig.

Definition 1.2.28:

Sind M_1 und M_2 zwei Mengen, $\sim$ eine Relation auf M_1, $\approx$ eine Relation auf M_2 und ρ Teilmenge von $\sim$, dann heißt eine Abbildung $\phi:M_1\rightarrow M_2$ auf ρ **relationserhaltend**, wenn für alle $u,v\in M_1$ gilt: $u\rho v \Rightarrow \phi(u)\approx\phi(v)$.

Satz 1.2.30:

Sind $(P_1,\circ_{D_1})$ und $(P_2,\cdot_{D_2})$ zwei partielle Halbgruppen, $\sim$ bzw. $\approx$ eine Kongruenz auf $(P_1,\circ_{D_1})$ bzw. $(P_2,\cdot_{D_2})$, ρ eine symmetrische Teilmenge von $\sim$ und $\phi:(P_1,\circ_{D_1})\rightarrow(P_2,\cdot_{D_2})$ ein Homomorphismus, der auf ρ relationserhaltend ist, dann ist $\boldsymbol{\phi(\rho)}:=\{(\phi(u),\phi(v)): (u,v)\in\rho\}$ eine symmetrische Teilmenge von $\approx$ und es gilt: $u\boldsymbol{\rightarrow}_{\rho}v \Rightarrow \phi(u)\boldsymbol{\rightarrow}_{\phi(\rho)}\phi(v)$.

Beweis:

Da ρ eine symmetrische Teilmenge von $\sim$ und ϕ auf ρ relationserhaltend ist, ist $\phi(\rho)$ trivialerweise eine symmetrische Teilmenge von $\approx$, denn es gilt: $(\phi(u),\phi(v))\in\phi(\rho) \Rightarrow u\rho v \Rightarrow u\sim v \Rightarrow \phi(u)\approx\phi(v)$.

Angenommen u ist bzgl. ρ direkt überführbar in v, dann ist $u=v$ oder es existieren $w_1,w_1'\in P_1$ mit $(w_1,w_1')\in\rho$ und eine der Bedingungen (a)-(d) von Definition 1.2.10 ist erfüllt. Ist $u=v$, so ist $\phi(u)=\phi(v)$. $\Rightarrow$ $\phi(u)\boldsymbol{\rightarrow}_{\phi(\rho)}\phi(v)$. Ist $u\neq v$, so ist $\phi(w_1),\phi(w_1')\in P_2$ mit $(\phi(w_1),\phi(w_1'))\in\phi(\rho)$ und es gilt je nach Fall:

(a) $u=w_1$ und $v=w_1'$ $\Rightarrow$ $\phi(u)=\phi(w_1)$ und $\phi(v)=\phi(w_1')$ $\Rightarrow$ $\phi(u)$ ist bzgl. $\phi(\rho)$ direkt überführbar in $\phi(v)$.

(b) $\exists\ w_0\in P_1$ mit $u=w_0\circ w_1$ und $v=w_0\circ w_1'$ $\Rightarrow$ $\exists\ \phi(w_0)\in P_2$ mit $\phi(u)=\phi(w_0\circ w_1)=\phi(w_0)\cdot\phi(w_1)$ und $\phi(v)=\phi(w_0\circ w_1')=\phi(w_0)\cdot\phi(w_1')$, da ϕ ein Homomorphismus ist. $\Rightarrow$ $\phi(u)$ ist bzgl. $\phi(\rho)$ direkt überführbar in $\phi(v)$.

(c) $\exists\ w_2\in P_1$ mit $u=w_1\circ w_2$ und $v=w_1'\circ w_2$ $\Rightarrow$ $\exists\ \phi(w_2)\in P_2$ mit $\phi(u)=\phi(w_1\circ w_2)=\phi(w_1)\cdot\phi(w_2)$ und $\phi(v)=\phi(w_1'\circ w_2)=\phi(w_1')\cdot\phi(w_2)$, da ϕ ein Homomorphismus ist. $\phi(u)$ ist bzgl. $\phi(\rho)$ direkt überführbar in $\phi(v)$.

(d) $\exists\ w_0,w_2 \in P_1\ u=w_0 \circ w_1 \circ w_2$ und $v=w_0 \circ w_1' \circ w_2 \Rightarrow \exists\ \phi(w_0),\phi(w_2) \in P_2$ $\phi(u)=\phi(w_0 \circ w_1 \circ w_2)=\phi(w_0)\cdot\phi(w_1)\cdot\phi(w_2)$ und $\phi(v)=\phi(w_0 \circ w_1' \circ w_2)=\phi(w_0)\cdot\phi(w_1')\cdot\phi(w_2)$, da ϕ ein Homomorphismus ist. $\Rightarrow \phi(u)$ ist bzgl. $\phi(\rho)$ direkt überführbar in $\phi(v)$.

Angenommen u ist bzgl. ρ überführbar in v, d.h. $u \rightarrow_\rho v$, dann gibt es eine Folge $u_1,...,u_m \in P_1$ mit $u=u_1$, $u_m=v$ und für $1 \le k \le m-1$ ist u_k bzgl. ρ direkt überführbar in u_{k+1}. Nach den Ausführungen oben gibt es deshalb eine Folge $\phi(u_1),...,\phi(u_m) \in P_2$ mit $\phi(u)=\phi(u_1)$, $\phi(u_m)=\phi(v)$ und für $1 \le k \le m-1$ ist $\phi(u_k)$ bzgl. $\phi(\rho)$ direkt überführbar in $\phi(u_{k+1})$. $\Rightarrow \phi(u) \rightarrow_{\phi(\rho)} \phi(v)$.

q.e.d.

Satz 1.2.32:

Sind $(P_1,\circ_{D_1})$ und $(P_2,\cdot_{D_2})$ zwei partielle Halbgruppen, $\sim$ bzw. $\approx$ eine Kongruenz auf $(P_1,\circ_{D_1})$ bzw. $(P_2,\cdot_{D_2})$, ρ eine Basis von $\sim$ und $\phi:(P_1,\circ_{D_1})\rightarrow(P_2,\cdot_{D_2})$ ein Homomorphismus, der auf ρ relationserhaltend ist, dann ist ϕ auf (ganz) $\sim$ relationserhaltend, d.h. $u,v \in P_1$ und $u \sim v \Rightarrow \phi(u) \approx \phi(v)$.

Beweis:

Da ρ eine Basis von $\sim$ ist, gilt: $u \sim v \Rightarrow u \rightarrow_\rho v \Rightarrow \phi(u) \rightarrow_{\phi(\rho)} \phi(v)$ nach Satz 1.2.30 $\Rightarrow \phi(u) \approx \phi(v)$ nach Satz 1.2.18 (g).

q.e.d.

Auf Basen von Kongruenzen und relationserhaltende Homomorphismen wird erst wieder im Kapitel "Monopolyide" zurückgegriffen. Dann aber sind sie von großer Bedeutung.

1.3 Polyide

Definition 1.3.2:

Eine partielle Halbgruppe $(P,\circ_D)$ heißt ein **Polyid**, wenn zu jedem $u\in P$ Identitäten 1_{lu} und 1_{ru} existieren mit $(1_{lu},u)\in D$ und $(u,1_{ru})\in D$. Ein Polyid $(P,\circ_D)$ heißt ein **Monoid**, wenn es genau eine Identität besitzt. Ein Polyid bzw. Monoid heißt **kürzbar**, wenn es als partielle Halbgruppe kürzbar ist.

Satz 1.3.4:

Ein Polyid $(P,\circ_D)$ ist genau dann ein Monoid, wenn $(P,\circ_D)$ eine Halbgruppe ist.

Beweis:

"$\Rightarrow$" Ist $(P,\circ_D)$ ein Monoid $\Rightarrow$ $\exists$ Identität 1 mit $(u,1)\in D$ $\forall u\in P$ und $(1,v)\in D$ $\forall v\in P$ $\Rightarrow$ $(u,v)\in D$ $\forall u,v\in P$ $\Rightarrow$ $D=PxP$ $\Rightarrow$ $(P,\circ_D)$ ist eine Halbgruppe.

"$\Leftarrow$" Ist $(P,\circ_D)$ ein Polyid und Halbgruppe $\Rightarrow$ $D=PxP$. Sind 1 und 1' zwei Identitäten, so ist $1=1\circ 1'=1'$.

q.e.d.

Damit stimmt also die hier gegebene Definition eines Monoids mit der herkömmlichen Definition einer Halbgruppe mit Neutralelement überein. (Vgl. z.B. [HEB93].)

Während in einem Monoid alle links- und rechtsneutralen Elemente identisch sind, (siehe z.B. [HEB93],) gilt dies in einem Polyid im allgemeinen nicht! Es gilt jedoch folgender Satz:

Satz 1.3.6:

Ist $(P,\circ_D)$ ein Polyid, dann gilt:

(1) Zu jedem $u\in P$ existiert genau eine Identität $1_{lu}\in P$ mit $1_{lu}\circ u=u$.

(2) Zu jedem $u\in P$ existiert genau eine Identität $1_{ru}\in P$ mit $u\circ 1_{ru}=u$.

(3) Ist 1_P die Menge der Identitäten von $(P,\circ_D)$, dann ist die Abbildung $\mathbf{1_l}:\mathbf{P}\to\mathbf{1_P}$: $\mathbf{1_l(u)}:=1_{lu}$ bzw. $\mathbf{1_r}:\mathbf{P}\to\mathbf{1_P}$: $\mathbf{1_r(u)}:=1_{ru}$ wohldefiniert und es ist $1_l(u\circ v)=1_l(u)$, sowie $1_r(u\circ v)=1_r(v)$.

(4) $1\in P$ ist genau dann ein Neutralelement, wenn es idempotent und links- und rechtskürzbar ist.

(5) $(u,v)\in D \Leftrightarrow 1_r(u)=1_l(v)$

(6) Jedes isolierte Element in $(P,\circ_D)$ ist eine Identität.

Beweis:

1) Zu jedem $u\in P$ existiert ein Neutralelement $1_{lu}\in P$ mit $(1_{lu},u)\in D$. $\Rightarrow$ $1_{lu}\circ u=u$. Sei $1_{lu}'\in P$ ein weiteres Neutralelement mit $1_{lu}'\circ u=u$ $\Rightarrow$ $1_{lu}'\circ(1_{lu}\circ u)=u$ $\Rightarrow$ $(1_{lu}'\circ 1_{lu})\circ u=u \Rightarrow (1_{lu}',1_{lu})\in D \Rightarrow 1_{lu}=1_{lu}'\circ 1_{lu}=1_{lu}'$

2) Analog zu 1)

3) Nach 1) und 2) sind die Abbildungen 1_l und 1_r wohldefiniert. Da $u\circ v=(1_{lu}\circ u)\circ v=1_{lu}\circ(u\circ v)$ und 1_{lu} Neutralelement ist $\Rightarrow$ $1_l(u\circ v)=1_l(u)$ nach 1). Analog folgt mit 2) $1_r(u\circ v)= 1_r(v)$.

4) Sei $1\in P$ ein Neutralelement $\Rightarrow$ es existiert ein Neutralelement $1_l(1)\in P$ mit $1_l(1)\circ 1=1$ $\Rightarrow$ $1_l(1)=1_l(1)\circ 1=1.$ $\Rightarrow$ $(1,1)=(1_l(1),1)\in D$ und 1 ist idempotent. Aus $1\circ u=1\circ v$ folgt: $u=1\circ u=1\circ v=v$ $\Rightarrow$ 1 ist linkskürzbar und analog rechtskürzbar. Sei $1\in P$ idempotent und links- und rechtskürzbar und $(1,u)\in D$ $\Rightarrow$ $1\circ u=(1\circ 1)\circ u=1\circ(1\circ u)$ $\Rightarrow$ $u=(1\circ u)$ $\Rightarrow$ 1 ist linksneutral. Analog folgt: 1 ist rechtsneutral. $\Rightarrow$ 1 ist Neutralelement.

5) $(u,v)\in D$ $\Rightarrow$ $u\circ v=(u\circ 1_r(u))\circ(1_l(v)\circ v)=u\circ(1_r(u)\circ 1_l(v))\circ v$ $\Rightarrow$ $(1_r(u),1_l(v))\in D \Rightarrow 1_r(u)=1_l(v)$ nach 4).
$1_r(u)=1_l(v)$ $\Rightarrow$ $(u,1_r(u))\in D$ und $(1_r(u),v)=(1_l(v),v)\in D$ $\Rightarrow$ $(u\circ 1_r(u),v)\in D \Rightarrow (u\circ 1_r(u),v)=(u,v)\in D$.

6) Sei $a\in P$ ein isoliertes Element. $\Rightarrow$ $\forall\ u\neq a\in P$ gilt: $(u,a)\notin D$ und $(a,u)\notin D$. Da $(P,\circ_D)$ ein Polyid ist existiert eine Identität $1_l(a)$ mit $(1_l(a),a)\in D$. $\Rightarrow$ $1_l(a)=a$.

q.e.d.

Definition 1.3.8:

Ist $(P,\circ_D)$ ein Polyid und $u\in P$, dann heißt ein $u'\in P$ ein **Links-** bzw. **Rechtsinverses von u**, wenn gilt $(u',u)\in D$ und $u'\circ u=1_r(u)$ bzw. $(u,u')\in D$ und $u\circ u'=1_l(u)$.

Satz und Definition 1.3.10:

Ist $(P,\circ_D)$ ein Polyid und besitzt $u\in P$ sowohl ein Links- als auch Rechtsinverses, so sind alle Links- und Rechtsinversen von u identisch zu einem Element $u^{-1} \in P$. **u^{-1}** heißt das **Inverse von u**. Existiert zu u ein Inverses, dann heißt u **invertierbar**.

Beweis:

Sei u' bzw. u" ein Links- bzw. ein Rechtsinverses von u. $\Rightarrow$ $(u',u) \in D$ und $u' \circ u = 1_r(u)$ bzw. $(u,u'') \in D$ und $u \circ u'' = 1_l(u)$. $\Rightarrow$ $(u' \circ u, u'') \in D \Rightarrow (1_r(u), u'') \in D$. $\Rightarrow$ $(u' \circ u) \circ u'' = 1_r(u) \circ u'' \Rightarrow (u' \circ u) \circ u'' = u' \circ (u \circ u'') = u' \circ (1_l(u)) = u' = 1_r(u) \circ u'' = u'' \Rightarrow u' = u''$. Da damit jedes Linksinverse von u gleich u" und jedes Rechtsinverse von u gleich u' ist, folgt die Behauptung.

q.e.d.

In einem Polyid besitzt also ein Element entweder kein oder genau ein Inverses.

Satz 1.3.12:

Ist $(P, \circ_D)$ ein Polyid und $u, v \in P$ invertierbar, dann gilt:

(1) $1_l(u^{-1}) = 1_r(u)$ und $1_r(u^{-1}) = 1_l(u)$

(2) $(u^{-1})^{-1} = u$

(3) $(u,v) \in D \Rightarrow (u \circ v)^{-1} = v^{-1} \circ u^{-1}$

Beweis:

(1) Wegen $u^{-1} \circ u = 1_r(u)$ und $u \circ u^{-1} = 1_l(u)$ folgt mit Satz 1.3.6 (3): $1_l(u^{-1} \circ u) = 1_l(u^{-1}) = 1_l(1_r(u)) = 1_r(u)$ und $1_r(u \circ u^{-1}) = 1_r(u^{-1}) = 1_l(u) = 1_r(1_l(u))$.

(2) Nach (1) ist $u^{-1} \circ u = 1_r(u) = 1_l(u^{-1})$ und $u \circ u^{-1} = 1_l(u) = 1_r(u^{-1}) \Rightarrow$ u ist Inverses von u^{-1}. $\Rightarrow$ $(u^{-1})^{-1} = u$ nach Satz und Definition 1.3.10.

(3) $(u \circ v) \circ (v^{-1} \circ u^{-1}) = u \circ (v \circ v^{-1}) \circ u^{-1} = u \circ 1_l(v) \circ u^{-1} = u \circ u^{-1} = 1_l(u) = 1_l(u \circ v)$ nach Satz 1.3.6 (3). Analog ist $(v^{-1} \circ u^{-1}) \circ (u \circ v) = 1_r(u \circ v)$. $\Rightarrow$ $v^{-1} \circ u^{-1}$ ist Inverses von $u \circ v$. $\Rightarrow$ $(u \circ v)^{-1} = v^{-1} \circ u^{-1}$ nach Satz und Definition 1.3.10.

q.e.d.

Definition 1.3.14:

Ist $(P, \circ_D)$ ein Polyid (Monoid), dann heißt eine partielle Unterhalbgruppe $(P', \circ_{D'})$ ein **Unterpolyid (Untermonoid)** von $(P, \circ_D)$, wenn $(P', \circ_{D'})$ ein Polyid mit $1_{P'} \subseteq 1_P$ ist.

(Die Bedingung $1_{P'} \subseteq 1_P$ ist dabei nicht redundant, da im allgemeinen nur $1_P \cap P' \subseteq 1_{P'}$ gilt.)

Satz 1.3.16:

Ist $(P',\circ_{D'})$ ein Unterpolyid von $(P,\circ_D)$, dann ist $1_{P'}=1_P\cap P'$.

Beweis:

Natürlich ist $1_P\cap P'\subseteq 1_{P'}$. Da $(P',\circ_{D'})$ ein Unterpolyid von $(P,\circ_D)$ ist $\Rightarrow$ $1_{P'}\subseteq 1_P$ $\Rightarrow$ $1_{P'}\cap P'\subseteq 1_P\cap P'$ $\Rightarrow$ $1_{P'}\subseteq 1_P\cap P'$, da $1_{P'}\subseteq P'$. $\Rightarrow$ $1_{P'}=1_P\cap P'$.

Definition 1.3.18:

Ist $(P,\circ_D)$ ein Polyid (Monoid), dann heißt $P'\subseteq P$ **mit Neutralelementen**, wenn gilt: $u\in P'$ $\Rightarrow$ $1_l(u)\in P'$ und $1_r(u)\in P'$. Ist P' eine beliebige Teilmenge, dann heißt $\overline{P'}:=$ $P'\cup\{1_l(u),1_r(u):u\in P'\}$ der **neutrale Abschluß von P'**.

Satz 1.3.20:

Ist $(P,\circ_D)$ ein Polyid und $P'\subseteq P$ mit Neutralelementen, dann ist $(P',\circ_{D'})$ genau dann ein Unterpolyid von $(P,\circ_D)$, wenn P' bzgl. "$\circ$" abgeschlossen und $1_{P'}\subseteq 1_P$ ist.

Beweis:

"$\Rightarrow$" Sei P' bzgl. "$\circ$" abgeschlossen und $1_{P'}\subseteq 1_P$. Nach Satz und Definition 1.1.12 ist damit $(P',\circ_{D'})$ eine partielle Unterhalbgruppe von $(P,\circ_D)$. Da $P'\subseteq P$ mit Neutralelementen ist und $1_{P'}\subseteq 1_P$ $\Rightarrow$ $(P',\circ_{D'})$ ist ein Unterpolyid von $(P,\circ_D)$.

"$\Leftarrow$" Sei $(P',\circ_{D'})$ ein Unterpolyid von $(P,\circ_D)$ $\Rightarrow$ $1_{P'}\subseteq 1_P$ und nach Satz und Definition 1.1.12 ist P' bzgl. "$\circ$" abgeschlossen.

q.e.d.

Satz 1.3.22:

Ist $(P,\circ_D)$ eine partielle Halbgruppe und 1_P die Menge der Identitäten, dann ist $(1_P,\circ_{D'})$ mit $D':=\{(u,v)\in D\cap(P'xP')\}$ eine partielle Unterhalbgruppe von $(P,\circ_D)$. Ist $(P,\circ_D)$ ein Polyid, so ist $(1_P,\circ_{D'})$ ein Unterpolyid.

Beweis:

Da für zwei Neutralelemente $1_a,1_b\in 1_P$ mit $(1_a,1_b)\in D$ folgt: $1_b=1_a\circ 1_b=1_a$. Damit ist 1_P bzgl. "$\circ$" abgeschlossen. Der Rest ist trivial.

Satz und Definition 1.3.24:

Ist $(P,\circ_D)$ ein Polyid, $P'\subseteq P$ und $U_P(P')$ die Menge aller Unterpolyide von $(P,\circ_D)$, die P' enthalten, dann ist $\mathbf{<P'>_P} := \bigcap_{P''\in U_P(P')} P''$ ein Unterpolyid von $(P,\circ_D)$, das das von P' **erzeugte Unterpolyid** heißt. P' heißt dann auch ein **Erzeugendensystem** von $<P'>_P$.

Beweis:

Nach Satz und Definition 1.1.14 ist $\bigcap_{P''\in U_P(P')} P''$ eine partielle Unterhalbgruppe. Für Unterpolyide ist $1_{P''}\subseteq 1_P$ und damit $1_{<P'>_P}\subseteq 1_P$. $\Rightarrow$ $<P'>_P$ ist ein Unterpolyid von $(P,\circ_D)$.

Satz 1.3.26:

Ist $(P,\circ_D)$ ein Polyid (Monoid) und $P'\subseteq P$ mit Neutralelementen, dann ist $<P',\circ>_P$ ein Unterpolyid (Untermonoid) von $(P,\circ_D)$.

Beweis:

Nach Satz und Definition 1.1.18 ist $<P',\circ>_P$ eine partielle Unterhalbgruppe von $(P,\circ_D)$. Sei $u\in <P'>_P$. Nach Satz 1.1.20 existiert eine endliche Zerlegung der Form $u=\bigcirc_{i=1}^{n} u_i$ mit $u_i\in P'$ für $1\le i\le n$. Nach Satz 1.3.6 ist $1_l(u)=1_l(u_1)$ und $1_r(u)=1_r(u_n)$. Da P' mit Neutralelementen ist $\Rightarrow$ $1_l(u_i)\in P'$ und $1_r(u_i)\in P'$ für $1\le i\le n$. $\Rightarrow$ $1_l(u)\in P'$ und $1_r(u)\in P'$. $\Rightarrow$ $<P',\circ>_P$ ist ein Polyid (Monoid), da $P'\subseteq <P',\circ>_P$ ist. Sei $1_{P'}$ die Menge der Identitäten von $<P',\circ>_P$ und $u\in 1_{P'}$ $\Rightarrow$ $u=1_l(u)\circ u=1_l(u)$ $\Rightarrow$ $u=1_l(u)\in 1_P$ $\Rightarrow$ $1_{P'}\subseteq 1_P$. Damit ist $<P',\circ>_P$ ein Unterpolyid (Untermonoid).

Definition 1.3.28:

Sind $(P_1,\circ_{D_1})$ und $(P_2,\cdot_{D_2})$ zwei Polyide, dann heißt ein Homomorphismus auf partiellen Halbgruppen $\phi:P_1\to P_2$ genau dann ein **Polyiden-Homomorphismus**, wenn gilt: $u\in 1_{P_1} \Rightarrow \phi(u)\in 1_{P_2}$.
Analog heißt ϕ ein **Polyiden-Monomorphismus** bzw. **-Epimorphismus** bzw. **-Isomorphismus**, wenn ϕ ein Monomorphismus bzw. Epimorphismus bzw. Isomorphismus auf partiellen Halbgruppen ist. Ist sowohl $(P_1,\circ_{D_1})$ als auch $(P_2,\cdot_{D_2})$ ein Monoid, so heißt ϕ entsprechend ein **Monoiden-Homomorphismus** bzw. **-Monomorphismus** bzw. **-Epimorphismus** bzw. **-Isomorphismus**,

Ein Polyiden-Homomorphismus stellt also eine Erweiterung eines Homomorphismus für partielle Halbgruppen dar, wobei Identitäten auf Identitäten abgebildet werden. Als Spezialfall davon wäre ein Monoiden-Homomorphismus ein Halbgruppen-Homomorphismus der das Neutralelement des einen Monoids auf das Neutralelement des anderen Monoids abbildet.

Satz 1.3.30:

Sind $(P_1,\circ_{D_1})$ und $(P_2,\cdot_{D_2})$ zwei Polyide und $\phi:P_1\to P_2$ ein Polyiden-Homomorphismus, dann gilt:

(a) $u\in P_1 \Rightarrow \phi(1_{l1}(u))=1_{l2}(\phi(u))$ und $\phi(1_{r1}(u))=1_{r2}(\phi(u))$.

(b) Ist $u,v\in P_1$ und ϕ injektiv, dann ist $(u,v)\in D_1 \Leftrightarrow (\phi(u),\phi(v))\in D_2$.

(c) Ist $u\in P_1$ und ϕ injektiv, dann ist $u\in 1_{P_1} \Leftrightarrow \phi(u)\in 1_{P_2}$.

(d) ϕ ist genau dann ein Polyiden-Isomorphismus, wenn ϕ bijektiv ist.

(e) $u\in P_1$ invertierbar $\Rightarrow \phi(u^{-1})=\phi(u)^{-1}$.

Beweis:

a) $u\in P_1 \Rightarrow 1_{l1}(u)\circ u=u \Rightarrow \phi(1_{l1}(u)\circ u)=\phi(1_{l1}(u))\cdot\phi(u)=\phi(u)$ und $\phi(1_{l1}(u))\in 1_{P_2}$, da ϕ ein Polyiden-Homomorphismus ist. Andererseits ist auch $1_{l2}(\phi(u))\cdot\phi(u)=\phi(u)$ mit $1_{l2}(\phi(u))\in 1_{P_2}$. Nach Satz 1.3.6 (1) und (2) ist damit $\phi(1_{l1}(u))= 1_{l2}(\phi(u))$. Analog folgt $\phi(1_{r1}(u))=1_{r2}(\phi(u))$.

b) Sei $u,v\in P_1$. Da ϕ auch ein Homomorphismus auf partiellen Halbgruppen ist, folgt: $(u,v)\in D_1 \Rightarrow (\phi(u),\phi(v))\in D_2$. Ist umgekehrt $(\phi(u),\phi(v))\in D_2 \Rightarrow 1_{r2}(\phi(u))=1_{l2}(\phi(v))$ nach Satz 1.3.6 (5). $\Rightarrow \phi(1_{r1}(u))=\phi(1_{l1}(v))$ nach (a). $\Rightarrow$ $1_{r1}(u)=1_{l1}(v)$, da ϕ injektiv ist. $\Rightarrow (u,v)\in D_1$ nach Satz 1.3.6 (5).

c) Ist $u\in P_1$ und $u\in 1_{P_1} \Rightarrow \phi(u)\in 1_{P_2}$, da ϕ ein Polyiden-Homomorphismus ist.
Sei $u,v\in P_1$ und $\phi(u)\in 1_{P_2} \Rightarrow \phi(u\circ u)=\phi(u)\cdot\phi(u)=\phi(u)$, wobei $u\circ u$ nach (b) definiert ist. $\Rightarrow u\circ u=u$, da ϕ nach Voraussetzung injektiv ist. Sei $u\circ v$ definiert. $\Rightarrow \phi(u\circ v)=\phi(u)\cdot\phi(v)=\phi(v) \Rightarrow$ $u\circ v=v$, da ϕ nach Voraussetzung injektiv ist. $\Rightarrow$ u ist linkskürzbar. Analog läßt sich zeigen, daß u auch rechtskürzbar ist. Damit ist u idempotent und links- und rechtskürzbar. $\Rightarrow u\in 1_{P_1}$ nach Satz 1.3.6 (4).

d) Sei ϕ ein Polyiden-Isomorphismus. $\Rightarrow$ ϕ ist ein Isomorphismus auf partiellen Halbgruppen. $\Rightarrow$ ϕ ist bijektiv.
Ist umgekehrt ϕ bijektiv. $\Rightarrow$ ϕ ist auch injektiv. Damit ist $(u,v)\in D_1 \Leftrightarrow (\phi(u),\phi(v))\in D_2$ nach (b). $\Rightarrow$ ϕ ist ein

Isomorphismus auf partiellen Halbgruppen. $\Rightarrow$ ϕ ist ein Polyiden-Isomorphismus.

e) $u \in P_1$ invertierbar $\Rightarrow$ $u \circ u^{-1} = 1_{r1}(u)$ $\Rightarrow$ $\phi(u) \circ \phi(u^{-1}) = \phi(1_{r1}(u)) = 1_{r2}(\phi(u))$ nach (a). Analog ist $\phi(u^{-1}) \circ \phi(u) = 1_{l2}(\phi(u))$. Wegen $\Rightarrow$ $\phi(u) \circ \phi(u)^{-1} = 1_{r2}(\phi(u))$ und $\phi(u)^{-1} \circ \phi(u) = 1_{l2}(\phi(u))$ ist nach Satz und Definition 1.3.10 $\phi(u^{-1}) = \phi(u)^{-1}$.

q.e.d.

Um einen späteren Vergleich der Polyide mit den in der einschlägigen Fachliteratur bekannten Kategorien abrunden zu können, werden nachfolgend vollkommene Erzeugendensysteme eingeführt und untersucht. Zum Verständnis des Gesamtzusammenhangs dieser Publikation ist der nachfolgende Abschnitt jedoch nicht notwendig.

1.4 Vollkommene Erzeugendensysteme

Definition 1.4.2:

Ist $(P_1,\circ_{D_1})$ ein Polyid, dann heißt eine Menge P_1' mit $1_{P_1}\subseteq P_1'\subseteq P_1$ ein **vollkommenes Erzeugendensystem** von $(P_1,\circ_{D_1})$, wenn für jedes Polyid $(P_2,\cdot_{D_2})$ jede Abbildung $\phi':P_1'\to P_2$ mit den Eigenschaften

(F0) $u\in 1_{P_1} \Rightarrow \phi'(u)\in 1_{P_2}$

(F1) $(u,v)\in D_1\cap(P_1'xP_1') \Rightarrow (\phi'(u),\phi'(v))\in D_2$

zu genau einem Polyiden-Homomorphismus $\phi:(P_1,\circ_{D_1})\to(P_2,\cdot_{D_2})$ fortgesetzt werden kann (d.h. $\phi|_{P_1'}=\phi'$).

Jedes vollkommene Erzeugendensystem ist auch ein Erzeugendensystem im Sinne von Satz und Definition 1.3.24 wie nachfolgender Satz zeigt.

Satz 1.4.4:

Ist P' ein vollkommenes Erzeugendensystem eines Polyids $(P,\circ_D)$, dann ist $\langle P'\rangle_P=P$.

Beweis:

Da $P'':=\langle P'\rangle_P\subseteq P$ ist, ist die Inclusion $Id_{P''}:P''\to P$ ein injektiver Polyiden-Homomorphismus. Andererseits erfüllt die identische Abbildung $Id_{P'}:P'\to P'\subseteq P''\subseteq P$ die Bedingungen (F0)-(F1) obiger Definition. $\Rightarrow$ Es gibt je genau eine homomorphe Fortsetzung $\phi_{P''}:P\to\langle P'\rangle$ und $\phi:P\to P$ von $Id_{P'}$, da nach Vorausetzung P' ein vollkommenes Erzeugendensystem von $(P,\circ_D)$ ist. Da sowohl die Hintereinanderausführung $Id_{P''}\circ\phi_{P''}:P\to\langle P'\rangle_P\to P$ der Abbildungen $Id_{P''}$ und $\phi_{P''}$ als auch $Id_P:P\to P$ momomorphe Fortsetzung von $Id_{P'}$ sind, ist $Id_{P''}\circ\phi_{P''}=Id_P$. Damit ist $Id_{P''}$ auch surjektiv. $\Rightarrow$ $\langle P'\rangle_P=P$.

q.e.d.

Hilfssatz 1.4.6:

Ist $(M_1,\circ_{D_1})$ ein Polyid, M_1' eine Menge mit $1_{M_1}\subseteq M_1'\subseteq M_1$, $(M_2,\cdot_{D_2})$ ein Polyid und $\phi':M_1'\to M_2$ eine Abbildung mit den Eigenschaften

(F0) $f\in 1_{M_1} \Rightarrow \phi'(f)\in 1_{M_2}$

(F1) $(f,g)\in D_1\cap(M_1'xM_1') \Rightarrow (\phi'(f),\phi'(g))\in D_2$,

so gilt auch:

(F2) $f\in M_1' \Rightarrow 1_{l2}(\phi'(f))=\phi'(1_{l1}(f))$ und $1_{r2}(\phi'(f))=\phi'(1_{r1}(f))$.

Beweis:

$f\in M_1' \Rightarrow (1_{l1}(f),f)\in D_1\cap(M_1'xM_1') \Rightarrow (\phi'(1_{l1}(f)),\phi'(f))\in D_2$ wegen (F1) und $\phi'(1_{l1}(f))\in 1_{M_2}$ wegen (F0). $\Rightarrow \phi'(1_{l1}(f))\cdot\phi'(f)=\phi'(f)$. Außerdem ist $1_{l2}(\phi'(f))\cdot\phi'(f)=\phi'(f) \Rightarrow 1_{l2}(\phi'(f))=\phi'(1_{l1}(f))$ nach Satz 1.3.6 (1). Analog folgt $1_{r2}(\phi'(f))=\phi'(1_{r1}(f))$.

q.e.d.

Definition 1.4.8:

Ist $(P_1,\circ_{D_1})$ ein Polyid, dann heißt eine Menge $P_1'\subseteq P_1$ ein **freies Bestimmendensystem** von $(P_1,\circ_{D_1})$, wenn für jedes Polyid $(P_2,\cdot_{D_2})$ und jede Abbildung $\phi_1:1_{P_1}\to 1_{P_2}$ jede Abbildung $\phi':P_1'\to P_2$ mit den Eigenschaften

(F1) $(u,v)\in D_1\cap(P_1'xP_1') \Rightarrow (\phi'(u),\phi'(v))\in D_2$

(F3) $u\in P_1' \Rightarrow 1_{l2}(\phi'(u))=\phi_1(1_{l1}(u))$ und $1_{r2}(\phi'(u))=\phi_1(1_{r1}(u))$

zu genau einem Polyiden-Homomorphismus $\phi:(P_1,\circ_{D_1})\to(P_2,\cdot_{D_2})$ so fortgesetzt werden kann (d.h. $\phi|_{P_1'}=\phi'$), daß die Restriktion von ϕ auf 1_{P_1} identisch zu ϕ_1 ist. Besitzt ein Polyid ein freies Bestimmendensystem, so heißt es ein **freies Polyid**. Ist ein freies Bestimmendensystem gleichzeitig auch ein Erzeugendensystem, so heißt es ein **freies Erzeugendensystem.**

Satz 1.4.10:

$P_1'\backslash 1_{P_1}$ ist genau dann ein freies Bestimmendensystem des Polyids $(P_1,\circ_{D_1})$, wenn $P_1'\cup 1_{P_1}$ ein vollkommenes Erzeugendensystem von $(P_1,\circ_{D_1})$ ist.
Beweis:

"$\Rightarrow$" Sei $P_1'':=P_1'\backslash 1_{P_1}$ ein freies Bestimmendensystem, $P_1''':=P_1'\cup 1_{P_1}$ und $\phi''':P_1'''\to P_2$ eine Abbildung mit den Eigenschaften (F0) und (F1). Nach Hilfssatz 1.4.6 erfüllt ϕ''' auch die Bedingung (F2). Definiere $\phi_1:=\phi'''|_{1_{P_1}}$ und $\phi'':=\phi'''|_{P_1''}$, dann erfüllt ϕ'' die Bedingungen (F1) und (F3). $\Rightarrow \exists$ genau eine Fortsetzung ϕ von ϕ'' so, daß ϕ ein Polyiden-Homomorphismus ist mit $\phi|_{1_{P_1}}=\phi_1$. $\Rightarrow$ ϕ ist die einzige Fortsetzung von ϕ''' so, daß ϕ ein Polyiden-Homomorphismus ist, da $\phi'''=\phi_1\cup\phi''$ ist. $\Rightarrow$ P_1''' bzw. $P_1'\cup 1_{P_1}$ ist ein vollkommenes Erzeugendensystem.

"$\Leftarrow$" Sei $P_1''':=P_1'\cup 1_{P_1}$ ein vollkommenes Erzeugendensystem, $P_1'':=P_1'\backslash 1_{P_1}$, $\phi_1:1_{P_1}\to 1_{P_2}$ eine Abbildung und $\phi'':P_1''\to P_2$ eine Abbildung mit den Eigenschaften (F1) und (F3). Definiere $\phi':=\phi_1\cup\phi''$, dann erfüllt ϕ' die Bedingungen (F0) und (F1).

$\Rightarrow$ $\exists$ genau eine Fortsetzung ϕ von ϕ' so, daß ϕ ein Polyiden-Homomorphismus ist. $\Rightarrow$ $\phi|_{1_{P_1}}=\phi_1$ und $\phi|_{P_1''}=\phi''$ $\Rightarrow$ ϕ ist die einzige Fortsetzung von ϕ' so, daß ϕ ein Polyiden-Homomorphismus ist mit $\phi|_{1_{P_1}}=\phi_1$. $\Rightarrow$ P_1''' bzw. $P_1'\backslash 1_{P_1}$ ist ein freies Bestimmendensystem.[1]

q.e.d.

Satz 1.4.12:

Ist $(P,\circ_D)$ ein freies Polyid ohne isolierte Identitäten, dann ist jedes freie Bestimmendensystem P' von $(P,\circ_D)$ ein freies Erzeugendensystem, d.h. $<P'>_P=P$.

Beweis:

Sei P ein freies Bestimmendensystem $\Rightarrow$ $P'\cup 1_P$ ist nach Satz 1.4.10 ein vollkommenes Erzeugendensystem. $\Rightarrow$ $<P'\cup 1_P>_P=P$ nach Satz 1.4.4 und $<P'\cup 1_P>_P=<P'\cup 1_P,\circ>_P$ nach Satz 1.3.26. $\Rightarrow$ $<P'\cup 1_P,\circ>_P=P$. Da $\forall$ $1\in 1_P$ und $\forall$ $u\in P'$ mit $(1,u)\in D$ bzw. $(u,1)\in D$ gilt: $1\circ u=u$ bzw. $u\circ 1=u$, können Elemente die keine Identitäten sind nicht aus Identitäten erzeugt werden. $\Rightarrow$ $<P'\cup 1_P,\circ>_P\backslash 1_P\subseteq <P'>_P$. Da P keine isolierten Identitäten enthält existiert $\forall$ $1\in 1_P$ ein $u\in <P'\cup 1_P,\circ>_P\backslash 1_P$ mit $1_l(u)=1$ oder $1_r(u)=1$ $\Rightarrow$ Nach Satz 1.1.20 existiert $\forall$ $1\in 1_P$ ein $u_i\in P'$ mit $1_l(u_i)=1$ oder $1_r(u_i)=1$ $\Rightarrow$ $1_P\subseteq <P'>_P$ $\Rightarrow$ $P=(<P'\cup 1_P,\circ>_P\backslash 1_P)\cup 1_P\subseteq <P'>_P$. Wegen $<P'>_P\subseteq P$ ist damit $P=<P'>_P$.

q.e.d.

Die Definition des freien Polyids soll später zur hier wesentlich wichtigeren Definition des freien Monopolyids erweitert werden. Nachfolgend soll allerdings zuvor noch kurz aufgezeigt werden, daß es sich bei der hier gegeben Definition für freie Polyide um eine Erweiterung der gewöhnlichen Definition für freie Monoide handelt.

Definition 1.4.14:

Ein Monoid $(P_1,\circ)$ heißt genau dann **frei**, wenn es eine Menge $P_1'\subseteq P_1$ gibt so, daß für jedes Monoid $(P_2,\cdot)$ jede Abbildung $\phi':P_1'\rightarrow P_2$ zu genau einem Monoiden-Homomorphismus $\phi:(P_1,\circ)\rightarrow(P_2,\cdot)$ fortgesetzt werden kann. P_1' heißt dann auch ein **freies Erzeugendensystem** von $(P_1,\circ)$.

Es ist bekannt, daß für jedes freie Erzeugendensystem P' eines Monoids $(P,\circ)$ gilt: $<P'>_P=P$, was die Bezeichnung (freies) Erzeugendensystem rechtfertigt.

Satz 1.4.16:

Ein Monoid $(P_1,\circ_{D_1})$ ist genau dann **frei**, wenn es eine Menge $P_1' \subseteq P_1$ gibt so, daß für jedes Monoid $(P_2,\cdot_{D_2})$ und jede Abbildung $\phi_1:1_{P_1}\to 1_{P_2}$ jede Abbildung $\phi':P_1'\to P_2$ mit den Eigenschaften

(F1) $(u,v)\in D_1\cap(P_1'xP_1') \Rightarrow (\phi'(u),\phi'(v))\in D_2$

(F3) $u\in P_1' \Rightarrow 1_{l2}(\phi'(u))=\phi_1(1_{l1}(u))$ und $1_{r2}(\phi'(u))=\phi_1(1_{r1}(u))$

zu genau einem Polyiden-Homomorphismus $\phi:(P_1,\circ_{D_1})\to(P_2,\cdot_{D_2})$ so fortgesetzt werden kann (d.h. $\phi|_{P_1'}=\phi'$), daß die Restriktion von ϕ auf 1_{P_1} identisch zu ϕ_1 ist.

Beweis:

Jede Abbildung $\phi':P_1'\to P_2$ erfüllt die Bedingung (F1), da $(P_1,\circ_{D_1})$ und $(P_2,\cdot_{D_2})$ nach Satz 1.3.4 Halbgruppen sind. Andererseits ist jede Abbildung $\phi_1:1_{P_1}\to 1_{P_2}$ identisch zu der Abbildung, die das Neutralelement von $(P_1,\circ_{D_1})$ auf das Neutralelement von $(P_2,\circ_{D_2})$ abbildet. Damit erfüllt jede Abbildung $\phi':P_1'\to P_2$ auch die Bedingung (F3). Außerdem ist jeder Polyiden-Homomorphismus $\phi:(P_1,\circ_{D_1})\to(P_2,\cdot_{D_2})$ ein Monoiden-Homomorphismus der das Neutralelement von $(P_1,\circ_{D_1})$ auf das Neutralelement von $(P_2,\circ_{D_2})$ abbildet, womit die Restriktion von ϕ auf 1_{P_1} identisch zu ϕ_1 ist.

q.e.d.

Dies zeigt aber auch, das nicht jedes freie Monoid gleichzeitig auch ein freies Polyid ist, da $(P_2,\cdot_{D_2})$ als Monoid und nicht als beliebiges Polyid vorausgesetzt wird.

2. Monopolyide

Bei einem Monopolyid handelt es sich um eine algebraische Struktur mit zwei Operationen, die aus einem Monoid und einem Polyid besteht. Das Ziel diese Kapitels ist es, günstige Kriterien bzw. Methoden angeben zu können, die es erlauben bestimmte Abbildungen von einem Erzeugendensystem eines Monopolyids in ein anderes zu genau einem Monopolyiden-Homomorphismus fortzusetzen. Dies führt zur speziellen Klasse der vollkommenen bzw. α-vollkommenen Monopolyide. Diese sind von großer praktischer Bedeutung. Um für diese Klassen geeignete Erkennungsmerkmale angeben zu können, ist es notwendig, detailliert auf sequentielle Darstellungen, symmetrische Substitutionsmengen und natürliche Monopolyide einzugehen.

2.1 Grundlagen

Vergleichbar mit der algebraischen Struktur des Ringes, die aus einer Gruppe und einer Halbgruppe besteht, besteht ein Monopolyid aus einem Monoid und einem Polyid.

Definition 2.1.2:

Das Tupel $(M,\times,\circ_D)$ soll genau dann ein **monoidales Bipolyid** oder kürzer **Monopolyid** heißen, wenn $(M,\times)$ ein Monoid (mit Neutralelement 0) und $(M,\circ_D)$ ein Polyid ist und folgendes gilt:

(1) $0\in 1_M$

(2) $f,g\in 1_M \Rightarrow f\times g\in 1_M$

(3) $(f,g),(h,e),(f\times h,g\times e)\in D \Leftrightarrow (f\circ g)\times(h\circ e)=(f\times h)\circ(g\times e)$

(4) $(f,g),(h,e)\in D \Rightarrow (f\times h,g\times e)\in D$

(Die Bedingung (4) ist bereits eine sehr strenge Voraussetzung. Würde man statt dieser noch strenger (4a) $(f,g),(h,e)\in D \Leftrightarrow (f\times h,g\times e)\in D$ oder auch nur (4b) $(f\times h,g\times e)\in D \Rightarrow (f,g),(h,e)\in D$ fordern, so würde sich die Struktur des Monopolyids dadurch so sehr vereinfachen, daß $(M,\times)$ und $(M,\circ_D)$ zwei identische Monoide wären. Der Beweis dazu ist sehr einfach. Angenommen statt (4) gilt (4b), so folgt: $(f,g)\in D \Rightarrow (f\times 0,0\times g)\in D \Rightarrow (f,0),(0,g)\in D \Rightarrow f\circ g=(f\times 0)\circ(0\times g)=(f\circ 0)\times(g\circ 0)=f\times g$, da $0\in 1_M$. Ist $1\in 1_M \Rightarrow (1,1)\in D \Rightarrow (1,0)\in D \Rightarrow 1=1\circ 0=0$. Damit wäre 0 die einzige Identität von $(M,\circ_D)$ und dieses damit ein Monoid. Nach Satz 1.3.4 ist $(M,\circ_D)$ damit eine Halbgruppe. $\Rightarrow$ $D=M\text{x}M$ $\Rightarrow$ $f\circ g=f\times g$ für alle $f,g\in M$ und damit $(M,\circ_D)=(M,\times)$.)

Als nächstes werden einige Beispiele für Monopolyide vorgestellt.

Satz 2.1.4:

(1) Ist $(H,+)$ ein kommutatives Monoid, so ist $(H,+,+)$ ein Monopolyid.

(2) Ist $\mathbb{N}_0$ die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich 0, dann ist $(\mathbb{N}_0,+,+)$ ein Monopolyid.

(3) Sei für eine Abbildung $f:A\to B$ $L(f):=A$ und $R(f):=B$. Ist $\mathcal{O}$ eine Menge von Mengen, die bzgl. des cartesischen Produkts "x" (mit $\emptyset\in\mathcal{O}$ als Neutralelement) abgeschlossen ist, $F_{\mathcal{O}}$ die Menge aller Abbildungen f mit $L(f),R(f)\in\mathcal{O}$, 0 die Abbildung mit $L(0)=R(0)=\emptyset$, $\mathcal{D}:=\{(f,g)\in F_{\mathcal{O}}\text{x}F_{\mathcal{O}}\text{: } R(f)=L(g)\}$,

$f\bullet g: L(f)\to R(g)$ die Abbildung mit $(f\bullet g)(z):=g(f(z))$ bzw. $0\bullet 0=0$ und $f\times g$: $L(f)xL(g)\to R(f)xR(g)$ mit $(f\times g)(y,z)=(f(y),g(z))$ bzw. $f\times 0=f$ und $0\times f=f$ $\forall$ $f\in F_\emptyset$, dann ist $(\mathcal{F}_\emptyset,\times,\bullet_\emptyset)$ ein Monopolyid.

Beweis:

1) Trivial, da für $f,g,h,e\in H$ gilt: $(f+g)+(h+e)=(f+h)+(g+e)$
2) Folgt aus (1), da $\mathbb{N}_0$ ein kommutatives Monoid ist.
3) Es ist leicht nachzuvollziehen, daß $(\mathcal{F}_\emptyset,\times)$ ein Monoid mit Neutralelement 0 ist und $(\mathcal{F}_\emptyset,\bullet_\emptyset)$ ein Polyid ist, bei dem gerade die identischen Abbildungen und 0 die Identitäten sind. Damit werden offensichtlich auch die Bedingungen (1) und (2) erfüllt. Die Bedingungen (3) und (4) zeigt man durch einfaches nachrechnen.

Es folgen einige Grundrechenregeln für Monopolyide.

Satz 2.1.6:

Ist $(M,\times,\circ_D)$ ein Monopolyid und $f,g,h,e\in M$, dann gilt:

(1) $1_l(f\times g)=1_l(f)\times 1_l(g)$ und $1_r(f\times g)=1_r(f)\times 1_r(g)$
(2) $f\times g=(f\times 1_l(g))\circ(1_r(f)\times g)=(1_l(f)\times g)\circ(f\times 1_r(g))$
(3) $(f,g)\in D$ und $1\in 1_M \Rightarrow (1\times f,1\times g)\in D$ und $(f\times 1,g\times 1)\in D$.
(4) $(f,g)\in D$ und $1\in 1_M \Rightarrow (f\circ g)\times 1=(f\times 1)\circ(g\times 1)$ und $1\times(f\circ g)=(1\times f)\circ(1\times g)$
(5) Sind f und g bzgl. "$\circ$" invertierbar, so ist $(f\times g)^{-1}=f^{-1}\times g^{-1}$.
(6) (f,g), $(h,e)\in D$, $1\in 1_M$ und $f\circ g=h\circ e$ $\Rightarrow$ $(1\times f)\circ(1\times g)=(1\times h)\circ(1\times e)$ und $(f\times 1)\circ(g\times 1)=(h\times 1)\circ(e\times 1)$.

Beweis:

1) $(1_l(f)\times 1_l(g))\circ(f\times g)=(1_l(f)\circ f)\times(1_l(g)\circ g)=f\times g$. Wegen Definition 2.1.2 (2) ist $1_l(f)\times 1_l(g)$ eine Identität. Nach Satz 1.3.6 ist $1_l(f\times g)$ die einzige Identität mit $1_l(f\times g)\circ(f\times g)=f\times g$ $\Rightarrow$ $1_l(f\times g)=1_l(f)\times 1_l(g)$. Analog ist $1_r(f\times g)=1_r(f)\times 1_r(g)$.
2) Wegen $(f,1_r(f)),(1_l(g)\circ g)\in D$ $\Rightarrow$ $(f\times 1_l(g),1_r(f)\times g)\in D$ $\Rightarrow$ $f\times g=(f\circ 1_r(f))\times(1_l(g)\circ g)=(f\times 1_l(g))\circ(1_r(f)\times g)$. Analog ist $f\times g==(1_l(f)\circ f)\times(g\circ 1_r(g))=(1_l(f)\times g)\circ(f\times 1_r(g))$ $\Rightarrow$ Behauptung.
3) $(f,g)\in D$ und $1\in 1_M$ $\Rightarrow$ $1_r(f)=1_l(g)$ nach Satz 1.3.6 (5) und $1_r(1)=1_l(1)$ $\Rightarrow$ $1_r(1)\times 1_r(f)=1_r(1)\times 1_l(g)=1_l(1)\times 1_l(g)$ $\Rightarrow$ $1_r(1\times f)=1_l(1\times g)$ nach (1). $\Rightarrow$ $(1\times f,1\times g)\in D$ nach Satz 1.3.6 (5). Analog folgt: $(f\times 1,g\times 1)\in D$.
4) $(f,g)\in D$ und $1\in 1_M$ $\Rightarrow$ $(1,1)\in D$ $\Rightarrow$ $(f\times 1,g\times 1)\in D$ $\Rightarrow$ $(f\circ g)\times 1=(f\circ g)\times(1\circ 1)=(f\times 1)\circ(g\times 1)$. Analog folgt $1\times(f\circ g)=(1\times f)\circ(1\times g)$.
5) Sind f und g bzgl. "$\circ$" invertierbar, so ist nach Definition 1.3.8 und Satz 1.3.12 $1_r(f)=f\circ f^{-1}=1_l(f)$ und

$1_r(g)=g\circ g^{-1}=1_l(g)$. Da nach (1) und Satz 1.3.12 (1) $1_r(f\times g) = 1_r(f)\times 1_r(g) = 1_l(f^{-1})\times 1_l(g^{-1})=1_l(f^{-1}\times g^{-1}) \Rightarrow (f\times g,f^{-1}\times g^{-1})\in D$ nach Satz 1.3.6 (5) $\Rightarrow (f\times g)\circ(f^{-1}\times g^{-1})=(f\circ f^{-1})\times(g\circ g^{-1})=1_l(f)\times 1_l(g)=1_l(f\times g)$ nach (1) und Definition 2.1.2 (3) und (4). Analog ist $(f^{-1}\times g^{-1})\circ(f\times g)=(f^{-1}\circ f)\times(g^{-1}\circ g)=1_r(f)\times 1_r(g)=1_r(f\times g)$. $\Rightarrow$ $f^{-1}\times g^{-1}$ ist Rechts- und Linksinverses von $f\times g$. $\Rightarrow (f\times g)^{-1}=f^{-1}\times g^{-1}$ nach Satz und Definition 1.3.10.

6) (f,g), $(h,e)\in D$, $1\in 1_M$ und $f\circ g=h\circ e \Rightarrow (1\times f,1\times g),(1\times h,1\times e)\in D$ nach (3). Mit den Axiomen für Monopolyide folgt damit: $(1\times f)\circ(1\times g)=(1\circ 1)\times(f\circ g)=(1\circ 1)\times(h\circ e)=(1\times h)\circ(1\times e)$.
Die Behauptung $(f\times 1)\circ(g\times 1)=(h\times 1)\circ(e\times 1)$ folgt analog.

q.e.d.

In Formel (5) darf nicht übersehen werden, daß sich das Inverszeichen "hoch -1" auf die Operation "$\circ$" bezieht. Verwendet man statt dem Operationszeichen "$\times$" das Zeichen "+", so ändert sich (5) zu $(f+g)^{-1}=f^{-1}+g^{-1}$, womit die Aussagekraft dieser Formel noch deutlicher hervortritt, da im Körper der reellen Zahlen im allgemeinen $(f+g)^{-1}\neq f^{-1}+g^{-1}$ ist. (Man vergleiche dazu auch mit der Formel Satz 1.3.12 (3), in der beim Auflösen der Klammern die Operanden vertauscht werden.)

Definition 2.1.8:

Ein Monopolyid $(M,\times,\circ_D)$ heißt **kürzbar**, wenn sowohl das Monoid $(M,\times)$ als auch das Polyid $(M,\circ_D)$ kürzbar sind.

Definition 2.1.10:

Ist $(M,\times,\circ_D)$ ein Monopolyid, dann heißt $(M',\times,\circ_{D'})$ genau dann ein **Untermonopolyid** von $(M,\times,\circ_D)$, wenn $(M',\times)$ ein Untermonoid von $(M,\times)$ und $(M',\circ_{D'})$ ein Unterpolyid von $(M,\circ_D)$ ist. Ein Untermonopolyid M' von M heißt ein **echtes Untermonopolyid**, wenn $M'\neq M$ ist.

Definition 2.1.12:

Ist $(M,\times,\circ_D)$ ein Monopolyid, dann heißt $M'\subseteq M$ **mit Neutralelementen**, wenn gilt: $f\in M' \Rightarrow 0\in M'$, $1_l(f)\in M'$ und $1_r(f)\in M'$. Ist M' eine beliebige Teilmenge, dann heißt $\overline{\mathbf{M'}}:=M'\cup\{0\}\cup\{1_l(f),1_r(f):u\in M'\}$ der **neutrale Abschluß von M'**.

Satz 2.1.14:

Ist $(M,\times,\circ_D)$ ein Monopolyid und $M'\subseteq M$ mit Neutralelementen, dann ist $(M',\times,\circ_{D'})$ genau dann ein Untermonopolyid von $(M,\times,\circ_D)$, wenn M' bzgl. "$\times$" und "$\circ$" abgeschlossen und $1_{M'}\subseteq 1_M$ ist.

Beweis:

"$\Rightarrow$" Sei M' bzgl. "$\times$" und "$\circ$" abgeschlossen und $1_{M'}\subseteq 1_M$. Da $0\in M'$ $\Rightarrow 0\in 1_{M'}$. Nach Satz 1.3.20 $\Rightarrow$ $(M',\times)$ ist ein Untermonoid von $(M,\times)$ und $(M',\circ_{D'})$ ein Unterpolyid von $(M,\circ_D)$. $\Rightarrow$ $(M',\times,\circ_{D'})$ ist ein Untermonopolyid von $(M,\times,\circ_D)$.

"$\Leftarrow$" Sei $(M',\times,\circ_{D'})$ ein Untermonopolyid von $(M,\times,\circ_D)$ $\Rightarrow$ $(M',\times)$ ist ein Untermonoid von $(M,\times)$ und $(M',\circ_{D'})$ ein Unterpolyid von $(M,\circ_D)$. Nach Satz 1.3.20 $\Rightarrow 1_{M'}\subseteq 1_M$ und M' ist bzgl. "$\times$" und "$\circ$" abgeschlossen.

q.e.d.

Satz 2.1.16:

Ist $(M,\times,\circ_D)$ ein Monopolyid, so ist $(1_M,\times,\circ_{D'})$ ein Untermonopolyid von $(M,\times,\circ_D)$.

Beweis:

$1_M\subseteq M$ ist natürlich mit Neutralelementen. Nach Satz 1.3.6 (4) sind Identitäten idempotent. $\Rightarrow$ 1_M ist gegenüber "$\circ$" abgeschlossen. Da $(M,\times,\circ_D)$ ein Monopolyid ist, ist 1_M nach Definition 2.1.2 (2) auch gegenüber "$\times$" abgeschlossen. Damit ist $(1_M,\times,\circ_{D'})$ nach Satz 2.1.14 ein Untermonopolyid von $(M,\times,\circ_D)$.

q.e.d.

Satz 2.1.18:

Ist $(M,\times,\circ_D)$ ein Monopolyid, so bildet die Menge aller invertierbaren Elemente $\mathbf{M^{-1}}:=\{f\in M$: f ist bzgl. "$\circ$" invertierbar$\}$ ein Untermonopolyid von $(M,\times,\circ_D)$ mit $1_M\subseteq M^{-1}$.

Beweis:

Trivialerweise ist $1_M\subseteq M^{-1}$. $\Rightarrow$ M^{-1} ist eine Teilmenge von M mit Neutralelementen. Da M^{-1} nach Satz 2.1.6 (5) gegenüber "$\times$" und nach Satz 1.3.12 (3) gegenüber "$\circ$" abgeschlossen ist, ist M^{-1} nach Satz 2.1.14 ein Untermonopolyid von $(M,\times,\circ_D)$.

q.e.d.

Es folgen einige Sätze und Definitionen, die der Vorbereitung der Einführung von Erzeugendensystemen dienen.

Hilfssatz 2.1.20:

Ist $(M,\times,\circ_D)$ ein Monopolyid, $n\geq 2$ und $f_i,g_i\in M$ für $1\leq i\leq n$, und $(f_i,f_{i+1}),(g_i,g_{i+1})\in D$ für $1\leq i\leq n-1$, dann gilt:
$(\bigcirc_{i=1}^{n} f_i)\times(\bigcirc_{i=1}^{n} g_i)=\bigcirc_{i=1}^{n}(f_i\times g_i)$.

Beweis:

Für n=2 ist der Satz richtig und wohldefiniert nach Definition 2.1.2. Wegen $(f_i,f_{i+1}),(g_i,g_{i+1})\in D \Rightarrow (f_i\times g_i,f_{i+1}\times g_{i+1})\in D$ für $1\leq i\leq n-1$. Damit folgt induktiv:
$(\bigcirc_{i=1}^{n} f_i)\times(\bigcirc_{i=1}^{n} g_i)=((\bigcirc_{i=1}^{n-1} f_i)\circ f_n)\times((\bigcirc_{i=1}^{n-1} g_i)\circ g_n)=((\bigcirc_{i=1}^{n-1} f_i)\times(\bigcirc_{i=1}^{n-1} g_i))\circ(f_n\times g_n)=$
$(\bigcirc_{i=1}^{n-1}(f_i\times g_i))\circ(f_n\times g_n)=\bigcirc_{i=1}^{n}(f_i\times g_i)$.

Satz und Definition 2.1.22:

Ist $(M,\times,\circ_D)$ ein Monopolyid und $M'\subseteq M$ mit Neutralelementen, dann ist $\langle M',\times,\circ\rangle_M:=\langle\langle M',\times\rangle_M,\circ\rangle_M$ bzgl. "$\times$" und "$\circ$" abgeschlossen. $\langle M',\times,\circ\rangle_M$ heißt die Menge der **endlichen Produkte von M' in M bzgl.** "$\times$" **und** "$\circ$" und ist ein Untermonopolyid von $(M,\times,\circ_D)$.

Beweis:

Nach Satz und Definition 1.1.18 ist $\langle M',\times\rangle_M$ gegenüber "$\times$" abgeschlossen und $M'\subseteq\langle M',\times\rangle_M \Rightarrow 0\in\langle M',\times\rangle_M$. Nach Satz 1.1.20 existiert zu jedem $f\in\langle M',\times\rangle_M$ eine endliche Zerlegung der Form $f=\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} f_i$ mit $f_i\in M'$. Aus $f_i\in M' \Rightarrow 1_l(f_i)\in M'$ und $1_r(f_i)\in M' \Rightarrow$ $1_l(f)=1_l(\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} f_i)=\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} 1_l(f_i)\in M'$ und analog $1_r(f)\in M'$. Damit ist $\langle M',\times\rangle_M$ wieder eine Menge mit Neutralelementen (bzgl. "$\times$" und "$\circ$"). Mit den gleichen Argumenten erhält man: $0\in\langle M',\times,\circ\rangle_M$, sowie $1_l(f)=1_l(\bigcirc_{i=1}^{n} f_i)=1_l(f_1)\in\langle M',\times\rangle_M\subseteq\langle M',\times,\circ\rangle_M$ und $1_r(f)=1_r(\bigcirc_{i=1}^{n} f_i)=1_r(f_n)\in\langle M',\times\rangle_M\subseteq\langle M',\times,\circ\rangle_M$. Damit ist $\langle M',\times,\circ\rangle_M\subseteq M$ mit Neutralelementen.

Nach Satz und Definition 1.1.18 ist $\langle M',\times,\circ\rangle_M=\langle\langle M',\times\rangle_M,\circ\rangle_M$ bzgl. "$\circ$" abgeschlossen. Zeige: $\langle M',\times,\circ\rangle_M$ ist auch bzgl. "$\times$"

abgeschlossen. Seien $f,g\in\langle M',\times,\circ\rangle_M$. Nach Satz 1.1.20 existiert je eine endliche Zerlegung der Form $f=\bigcirc_{i=1}^{n} f_i$ bzw. $g=\bigcirc_{i=1}^{m} g_i$ mit $f_i,g_i\in\langle M',\times\rangle_M$. Da $\langle M',\times\rangle_M$ zu jedem Element auch eine linke und rechte Identität enthält, kann o.B.d.A. n=m angenommen werden, da fehlende Multiplikanden durch Identitäten ersetzt werden können. $\Rightarrow$ $f\times g=(\bigcirc_{i=1}^{n} f_i)\times(\bigcirc_{i=1}^{n} g_i)=\bigcirc_{i=1}^{n}(f_i\times g_i)$ nach Hilfssatz 2.1.20. $\langle M',\times\rangle_M$ ist bzgl. "$\times$" abgeschlossen $\Rightarrow$ $f_i\times g_i\in\langle M',\times\rangle_M$ $\Rightarrow$ $f\times g=\bigcirc_{i=1}^{n}(f_i\times g_i)\in\langle\langle M',\times\rangle_M,\circ\rangle_M=\langle M',\times,\circ\rangle_M$.
Wie oben gezeigt ist $\langle M',\times,\circ\rangle_M\subseteq M$ mit Neutralelementen und damit nach Satz 2.1.14 ein Untermonopolyid.

q.e.d.

Hilfssatz 2.1.24:

Ist $(M,\times,\circ_D)$ ein Monopolyid und $M'\subseteq M$ mit Neutralelementen, dann läßt sich jedes $f\in\langle M',\times,\circ\rangle_M$ in der Form $f=\bigcirc_{i=1}^{n}(\times_{j=1}^{m_i} f_{ij})$ darstellen, wobei $f_{ij}\in M'$ ist.

Beweis:

Da $\langle M',\times,\circ\rangle_M=\langle\langle M',\times\rangle_M,\circ\rangle_M$ ist, kann jedes $f_i\in\langle M',\times\rangle_M$ in der Form $f_i=\times_{j=1}^{m_i} f_{ij}$ mit $f_{ij}\in M'$ dargestellt werden. Aus dem selben Grund kann jedes $f\in\langle\langle M',\times\rangle_M,\circ\rangle_M$ in der Form $f=\bigcirc_{i=1}^{n} f_i$ dargestellt werden, wobei $f_i\in\langle M',\times\rangle_M$ ist. $\Rightarrow$ Behauptung.

q.e.d.

Satz und Definition 2.1.26:

Ist $(M,\times,\circ_D)$ ein Monopolyid, $M'\subseteq M$ und $U_M(M')$ die Menge aller Untermonopolyide von $(M,\times,\circ_D)$, die M' enthalten, dann ist $\boldsymbol{\langle M'\rangle_M}:=\bigcap_{M''\in U_M(M')} M''$ ein Untermonopolyid von $(M,\times,\circ_D)$, das das von M' **erzeugte Untermonopolyid** heißt. M' heißt dann auch ein **Erzeugendensystem** von $\langle M'\rangle_M$.

Beweis:

Nach Satz 2.1.14 ist jedes $(M'',\times,\circ_{D''})\in U_M(M')$ bzgl. "$\times$" und "$\circ$" abgeschlossen mit $1_{M''}\subseteq 1_M$. $\Rightarrow$ $\langle M'\rangle_M$ ist bzgl. "$\times$" und "$\circ$" abgeschlossen mit $1_{\langle M'\rangle_M}\subseteq 1_M$. Nach Satz 2.1.14 ist $\langle M'\rangle_M$ also ein Untermonopolyid von $(M'',\times,\circ_{D''})$.

Satz 2.1.28:

Ist $(M,\times,\circ_D)$ ein Monopolyid und $\overline{M'}$ der neutrale Abschluß von $M'\subseteq M$, dann ist $\langle M'\rangle_M = \langle\overline{M'},\times,\circ\rangle_M$.

Beweis:

Nach Satz und Definition 2.1.22 ist $\langle\overline{M'},\times,\circ\rangle_M$ ein Untermonopolyid von $(M,\times,\circ_D)$. $\Rightarrow$ $\langle M'\rangle_M \subseteq\langle\overline{M'},\times,\circ\rangle_M$. Da $\langle\overline{M'},\times,\circ\rangle_M$ die kleinste Teilmenge von M ist, die gegenüber "$\times$" und "$\circ$" abgeschlossen ist und $\overline{M'}$ als Teilmenge enthält und $\langle M'\rangle_M$ ebenfalls gegenüber "$\times$" und "$\circ$" abgeschlossen ist mit $\overline{M'}\subseteq\langle M'\rangle_M$ $\Rightarrow$ $\langle\overline{M'},\times,\circ\rangle_M\subseteq\langle M'\rangle_M$ $\Rightarrow$ $\langle\overline{M'},\times,\circ\rangle_M=\langle M'\rangle_M$.

Erzeugendensysteme werden im weiteren Verlauf noch eine wichtige Rolle spielen.

2.2 Sequentielle Darstellungen

Im Prinzip stellen sequentielle Darstellungen $3\times n$-Matrizen dar deren Koeffizienten mit Elementen aus einem Monopolyid besetzt sind (wie nachfolgende Definition zeigen wird). Der Name "sequentielle Darstellung" ist dabei ein Verweis auf die Möglichkeit ein Element des Monopolyids in der Form $(1_{t1}\times f_1\times 1_{b1})\circ\ldots\circ(1_{tn}\times f_n\times 1_{bn})$ darzustellen.

Definition 2.2.2:

Ist $(M,\times,\circ_D)$ ein Monopolyid, dann heißt eine $3\times n$-Matrix $S=\begin{pmatrix} 1_{t1} & & 1_{tn} \\ f_1 & \ldots & f_n \\ 1_{b1} & & 1_{bn} \end{pmatrix}$ eine **sequentielle Darstellung**, wenn $1_{ti},1_{bi}\in 1_M$ für $1\leq i\leq n$ und $1_r(1_{ti}\times f_i\times 1_{bi})=1_l(1_{ti+1}\times f_{i+1}\times 1_{bi+1})$ für $1\leq i\leq n-1$. Die Menge **Kern(S)**$:=\{f_i\colon 1\leq i\leq n\}$ heißt der **Kern von S**, **L(S)**$:=n$ heißt die Länge von S und $\boldsymbol{\omega_M}$**(S)**$:=(1_{t1}\times f_1\times 1_{b1})\circ\ldots\circ(1_{tn}\times f_n\times 1_{bn})$ heißt der **Wert von S**. Ist $\omega_M(S)=f$, dann heißt S auch eine **sequentielle Darstellung von f**. $\mathbf{S}^{(j)}$ sei als die j-te Spalte von S definiert. Ist $M'\subseteq M$ mit $1_M\subseteq M'$, so sei **S(M,M')** als die Menge aller sequentiellen Darstellungen S mit $Kern(S)\subseteq M'$ definiert.

Definition und Satz 2.2.4:

Ist $(M,\times,\circ_D)$ ein Monopolyid, $M'\subseteq M$ mit $1_M\subseteq M'$ und $S,S'\in S(M,M')$, dann heißen S und S' **äquivalent** (in Zeichen **S~S'**), wenn $\omega_M(S)=\omega_M(S')$ ist. Dabei definiert die Relation "~" eine Äquivalenzrelation auf S(M,M').

Beweis:

"~" definiert trivialerweise eine Äquivalenzrelation auf S(M,M'), da "=" eine Äquivalenzrelation auf M definiert.

Ist S eine sequentielle Darstellung, so kann also $\omega_M(S)$ in der Form $\omega_M(S)=(1_{t1}\times f_1\times 1_{b1})\circ\ldots\circ(1_{tn}\times f_n\times 1_{bn})$ dargestellt werden. Gibt es umgekehrt zu $f\in M$ eine Darstellung der Form $f=(1_{t1}\times f_1\times 1_{b1})\circ\ldots\circ(1_{tn}\times f_n\times 1_{bn})$ mit $1_{ti},1_{bi}\in 1_M$, so kann daraus unmittelbar eine Matrix S obiger Form gewonnen werden so, daß S eine sequentielle Darstellung von f ist. Da $f=0\times f\times 0$ ist, ist klar, daß zu jedem $f\in M$ eine sequentielle Darstellung existiert. Diese Aussage kann jedoch noch genauer spezifiziert werden.

Hilfssatz 2.2.6:

Ist $(M,\times,\circ_D)$ ein Monopolyid und $M'\subseteq M$ ein Erzeugendensystem von $(M,\times,\circ_D)$, so existiert für jedes $f\in M\backslash 1_M$ eine sequentielle Darstellung $S\in S(M)$ mit $\omega_M(S)=f$ und $\mathrm{Kern}(S)\subseteq M'\backslash 1_M$.

Beweis:

Zeige, daß jedes $f\in M\backslash 1_M$ in der Form $f=(1_{t1}\times f_1\times 1_{b1})\circ\ldots\circ(1_{tn}\times f_n\times 1_{bn})$ dargestellt werden kann mit $1_{ti},1_{bi}\in 1_M$ und $f_i\in M'\backslash 1_M$ für $1\leq i\leq n$. Dann kann daraus unmittelbar eine sequentielle Darstellung S von f gewonnen werden mit $\mathrm{Kern}(S)\subseteq M'\backslash 1_M$.
M' ist ein Erzeugendensystem von $(M,\times,\circ_D)$ $\Rightarrow$ $M=\langle M'\rangle_M$. Nach Satz 2.1.28 $\Rightarrow$ $M=\langle\overline{M'},\times,\circ\rangle_M$. Nach Hilfssatz 2.1.24 kann damit jedes $f\in M$ in der Form $f=\bigcirc_{i=1}^{n}(\times_{j=1}^{m_i} f_{ij})$ mit $f_{ij}\in\overline{M'}$ dargestellt werden.

Zeige zunächst über Induktion, daß jedes $f_i':=\times_{j=1}^{m_i} f_{ij}$ in obiger Form dargestellt werden kann.
Nach Satz 2.1.6 (2) gilt allgemein: $g\times h=(1_l(g)\circ g)\times(h\circ 1_r(h))=(1_l(g)\times h)\circ(g\times 1_r(h))=(1_l(g)\times h\times 0)\circ(g\times 1_r(h))$ $\Rightarrow$
Für $m_i=1$ ist $f_{i1}=(0\times f_{i1}\times 0)$.
Angenommen die Aussage ist für $m_i=n-1$ richtig und $m_i=n$. Definiere $g:=\times_{j=1}^{n-1} f_{ij}$ und $h:=f_{in}$ $\Rightarrow$ $\times_{j=1}^{n} f_{ij}=g\times h=(1_l(g)\times h\times 0)\circ(g\times 1_r(h))=(1_l(\times_{j=1}^{n-1} f_{ij})\times f_{in}\times 0)\circ(g\times 1_r(f_{in}))$. $(1_l(\times_{j=1}^{n-1} f_{ij})\times f_{in}\times 0)$ ist ein Faktor obiger Form, da das Produkt zweier Identitäten wieder eine Identität ist. g läßt sich nach Induktionsvoraussetzung in obiger Form darstellen. Sei $g=(1_{t1}\times g_1\times 1_{b1})\circ\ldots\circ(1_{tm}\times g_m\times 1_{bm})$, dann ist $g\times 1_r(f_{in})=(1_{t1}\times g_1\times 1_{b1}\times 1_r(f_{in}))\circ\ldots\circ(1_{tm}\times g_m\times 1_{bm}\times 1_r(f_{in}))$ nach Satz 2.1.6 (4).
Damit kann jedes f_i' in obiger Form dargestellt werden.
Da $f=\bigcirc_{i=1}^{n} f_i'$ kann auch f in obiger Form mit $f_{ij}\in\overline{M'}$ dargestellt werden. Angenommen es ist $f_{ij}\in 1_M$, so handelt es sich bei dem entsprechenden Faktor um eine Identität, die weggekürzt werden kann. (D.h. der Faktor kann entfernt werden.) Da $f\in M\backslash 1_M$ ist, muß dabei mindestens ein Faktor übrig bleiben. Damit kann jedes f_{ij} als Element von $\overline{M'}\backslash 1_M=M'\backslash 1_M$ vorausgesetzt werden.

q.e.d.

Satz 2.2.8:

Ist $(M,\times,\circ_D)$ ein Monopolyid und $M'\subseteq M$ ein Erzeugendensystem von $(M,\times,\circ_D)$ mit $1_M\subseteq M'$, so existiert für jedes $f\in M$ eine sequentielle Darstellung $S\in S(M,M')$ mit $\omega_M(S)=f$.

Beweis:

Ist $f \in 1_M$, so ist über $f=(0 \times f \times 0)$ eine entsprechende sequentielle Darstellung $S \in S(M)$ gegeben. Ist dagegen $f \in M \backslash 1_M$, so existiert eine derartige sequentielle Darstellung nach Hilfssatz 2.2.6.

q.e.d.

Als nächstes sollen die Operationen des Monopolyids auf die Menge $S(M,M')$ übertragen werden.

Definition und Satz 2.2.10:

Ist $(M,\times,\circ_D)$ ein Monopolyid, $1_M \subseteq M' \subseteq M$, $S,S' \in S(M,M')$ mit

$$S=\begin{pmatrix} 1_{t1} & & 1_{tn} \\ f_1 & \dots & f_n \\ 1_{b1} & & 1_{bn} \end{pmatrix},\ S'=\begin{pmatrix} 1_{t1}' & & 1_{tm}' \\ f_1' & \dots & f_m' \\ 1_{b1}' & & 1_{bm}' \end{pmatrix}$$

und für $1_r(1_{tn} \times f_n \times 1_{bn})=1_l(1_{t1}' \times f_1' \times 1_{b1}')$

$$S \circ S' := \begin{pmatrix} 1_{t1} & & 1_{tn} & 1_{t1}' & & 1_{tm}' \\ f_1 & \dots & f_n & f_1' & \dots & f_m' \\ 1_{b1} & & 1_{bn} & 1_{b1}' & & 1_{bm}' \end{pmatrix},$$ dann ist $(S(M,M'),\circ_{\mathcal{D}})$ mit

$\mathcal{D}:=\{(S,S') \in S(M,M') x S(M,M'):\ 1_r(1_{tn} \times f_n \times 1_{bn})=1_l(1_{t1}' \times f_1' \times 1_{b1}')\}$ eine partielle Halbgruppe.

Beweis:

Es ist leicht zu sehen, daß $S \circ S' \in S(M,M')$ und damit "$\circ$" eine partiell definierte Operation auf $S(M,M')$ ist. Das partielle Assoziativgesetz läßt sich ebenso einfach nachweisen.

Satz 2.2.12:

Ist $(M,\times,\circ_D)$ ein Monopolyid, $1_M \subseteq M' \subseteq M$, und $S,S' \in (S(M,M'),\circ_{\mathcal{D}})$, dann ist $(S,S') \in \mathcal{D} \Leftrightarrow (\omega_M(S),\omega_M(S')) \in D$, sowie $\omega_M(S \circ S')= \omega_M(S) \circ \omega_M(S')$ und $\mathrm{Kern}(S \circ S')=\mathrm{Kern}(S) \cup \mathrm{Kern}(S')$, wenn $S \circ S'$ definiert ist.

Beweis:

Seien S und S' wie in Definition und Satz 2.2.10 gegeben, dann gilt mit Satz 1.3.6 (5): $(S,S') \in \mathcal{D} \Leftrightarrow 1_r(1_{tn} \times f_n \times 1_{bn})= 1_l(1_{t1}' \times f_1' \times 1_{b1}') \Leftrightarrow 1_r(\omega_M(S))=1_l(\omega_M(S')) \Leftrightarrow (\omega_M(S),\omega_M(S')) \in D$. Der Beweis zu $\omega_M(S \circ S')=\omega_M(S) \circ \omega_M(S')$ und $\mathrm{Kern}(S \circ S')=\mathrm{Kern}(S) \cup \mathrm{Kern}(S')$ ist trivial.

q.e.d.

Definition und Satz 2.2.14:

Ist $(M,\times,\circ_D)$ ein Monopolyid, $1_M \subseteq M' \subseteq M$, $S,S' \in S(M,M')$ mit

$$S=\begin{pmatrix} 1_{t1} & & 1_{tn} \\ f_1 & \ldots & f_n \\ 1_{b1} & & 1_{bn} \end{pmatrix},\ S'=\begin{pmatrix} 1_{t1}' & & 1_{tm}' \\ f_1' & \ldots & f_m' \\ 1_{b1}' & & 1_{bm}' \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$S \times S' := \begin{pmatrix} 1_{t1} & & 1_{tn} & 1_R \times 1_{t1}' & & 1_R \times 1_{tm}' \\ f_1 & \ldots & f_n & f_1' & \ldots & f_m' \\ 1_{b1} \times 1_L & & 1_{bn} \times 1_L & 1_{b1}' & & 1_{bm}' \end{pmatrix} \text{ mit}$$

$1_L := 1_l(1_{t1}' \times f_1' \times 1_{b1}')$ und $1_R := 1_r(1_{tn} \times f_n \times 1_{bn})$, dann ist $(S(M,M'),\times)$ eine Halbgruppe.

Beweis:

Berücksichtigt man die nach Satz 2.1.6 (1) geltenden Formeln $1_l(f \times g)=1_l(f) \times 1_l(g)$ und $1_r(f \times g)=1_r(f) \times 1_r(g)$, sowie $1_l(f)=f\ \ \forall f \in 1_M$ und $1_r(f)=f\ \ \forall f \in 1_M$, so kann man durch mehr oder weniger einfache Koeffizientenrechnung zeigen, daß $S \times S' \in S(M,M')$ ist und das Assoziativgesetz gilt.

Satz 2.2.16:

Ist $(M,\times,\circ_D)$ ein Monopolyid, $1_M \subseteq M' \subseteq M$, und $S,S' \in (S(M,M'),\times)$, dann ist $\omega_M(S \times S')=\omega_M(S) \times \omega_M(S')$ und $\mathrm{Kern}(S \times S')=\mathrm{Kern}(S) \cup \mathrm{Kern}(S')$.

Beweis:

Seien S und S' wie in Definition und Satz 2.2.14 gegeben, dann gilt mit Satz 2.1.6 (4): $\omega_M(S \times S')=(1_{t1} \times f_1 \times 1_{b1} \times 1_L)\circ\ldots\circ(1_{t1} \times f_1 \times 1_{b1} \times 1_L)\circ(1_R \times 1_{t1}' \times f_1' \times 1_{b1}')\circ\ldots\circ(1_R \times 1_{t1}' \times f_1' \times 1_{b1}')=(((1_{t1} \times f_1 \times 1_{b1})\circ\ldots\circ(1_{t1} \times f_1 \times 1_{b1})) \times 1_L)\circ(1_R \times ((1_{t1}' \times f_1' \times 1_{b1}')\circ\ldots\circ(1_{t1}' \times f_1' \times 1_{b1}'))=(\omega_M(S) \times 1_L)\circ(1_R \times \omega_M(S'))$. Da $1_L=1_l(\omega_M(S'))$ und $1_R=1_r(\omega_M(S))$ ist nach Satz 2.1.6 (2) $(\omega_M(S) \times 1_L)\circ(1_R \times \omega_M(S'))=(\omega_M(S) \times 1_l(\omega_M(S'))\circ(1_r(\omega_M(S)) \times \omega_M(S'))=\omega_M(S) \times \omega_M(S')$.
Der Beweis zu $\mathrm{Kern}(S \times S')=\mathrm{Kern}(S) \cup \mathrm{Kern}(S')$ ist trivial

q.e.d.

Es ist leicht einzusehen, daß die Menge S(M,M') mit den Operationen "$\times$" und "$\circ$" leider kein Monopolyid bildet, da zum Beispiel keine links- und rechtsseitigen Identitäten existieren. Gleich zu Beginn des nächsten Anschnitts wird jedoch gezeigt, daß bei entsprechendem Zusammenfassen zu Äquivalenzklassen ein Monopolyid gebildet werden kann. Dieser Umstand kann wiederum genutzt werden, wenn sogenannte, auf sequentielle Darstellungen übertragbare Abbildungen zu Monopolyiden-Homomorphismen fortgesetzt werden sollen.

2.3 Monopolyiden-Homomorphismen und übertragbare Abbildungen

Die strukturerhaltenden Abbildungen im Bezug auf Monopolyide sind die Monopolyiden-Homomorphismen.

Definition 2.3.2:

Sind $(M_1,\times,\circ_{D_1})$ und $(M_2,+,\cdot_{D_2})$ zwei Monopolyide, dann heißt eine Abbildung $\phi:M_1\rightarrow M_2$ genau dann ein **Monopolyiden-Homomorphismus**, wenn ϕ sowohl bzgl. "$\times$" als auch "$\circ$" ein Polyiden-Homomorphismus ist. Analog heißt ϕ ein **Monopolyiden-Monomorphismus** bzw. **-Epimorphismus** bzw. **-Isomorphismus**, wenn ϕ sowohl bzgl. "$\times$" als auch "$\circ$" ein Polyiden-Monomorphismus bzw. -Epimorphismus bzw. -Isomorphismus ist. ϕ heißt der **triviale** Monopolyiden-Homomorphismus, wenn $\phi(f)=0\ \forall\ f\in M_1$ ist.

Wie bereits erwähnt, bildet die Menge der sequentiellen Darstellungen $(S(M,M'),\times,\circ_{\mathcal{D}})$ kein Monopolyid. Jedoch kann man unter Verwendung des nachfolgenden Satzes zeigen, daß bei entsprechendem Zusammenfassen der Elemente zu Äquivalenzklassen ein Monopolyid gebildet werden kann.

Satz 2.3.4:

Ist $(M,\times)$ ein Monoid, $(M,\circ_D)$ ein Polyid, $(M_2,+,\cdot_{D_2})$ ein Monopolyid und $\phi:M\rightarrow M_2$ sowohl ein Monoiden-Isomorphismus bzgl. "$\times$" als auch ein Polyiden-Isomorphismus bzgl. "$\circ$", so ist $(M,\times,\circ_D)$ ein zu $(M_2,+,\cdot_{D_2})$ isomorphes Monopolyid.

Beweis:

Es ist nur zu zeigen, daß $(M,\times,\circ_D)$ die Monopolyidengesetze erfüllt. Dabei wird stets ausgenutzt, daß ϕ ein Isomorphismus ist.

0) Da ϕ Polyiden-Isomorphismus ist, ist ϕ bijektiv und damit auch injektiv und es gilt nach Satz 1.3.30 (b) und (c): $(f,g)\in D \Leftrightarrow (\phi(f),\phi(g))\in D_2$ und $f\in 1_M \Leftrightarrow \phi(f)\in 1_{M_2}$.

1) Sei $(f,0)\in D \Rightarrow (\phi(f),\phi(0))\in D_2 \Rightarrow \phi(f)\cdot\phi(0)=\phi(f) \Rightarrow \phi^{-1}(\phi(f)\cdot\phi(0))=\phi^{-1}(\phi(f))\circ\phi^{-1}(\phi(0))=\phi^{-1}(\phi(f)) \Rightarrow f\circ 0=f$. Analog folgt mit $(f,0)\in D \Rightarrow 0\circ f=f \Rightarrow 0\in 1_M$.

2) $f,g\in 1_M \Rightarrow \phi(f),\phi(g)\in 1_{M_2} \Rightarrow \phi(f)+\phi(g)\in 1_{M_2} \Rightarrow \phi^{-1}(\phi(f)+\phi(g))\in 1_M \Rightarrow \phi^{-1}(\phi(f))\times\phi^{-1}(\phi(g))=f\times g\in 1_M$.

3) $(f,g),(h,e),(f\times h,g\times e)\in D \Leftrightarrow (\phi(f),\phi(g)),(\phi(h),\phi(e)),(\phi(f)+\phi(h),\phi(g)+\phi(e))\in D_2$ wg. 0) $\Leftrightarrow (\phi(f)\cdot\phi(g))+(\phi(h)\cdot\phi(e))=$

$(\phi(f)+\phi(h))\cdot(\phi(g)+\phi(e)) \Leftrightarrow \phi^{-1}((\phi(f)\cdot\phi(g))+(\phi(h)\cdot\phi(e)))=$
$\phi^{-1}((\phi(f)+\phi(h))\cdot(\phi(g)+\phi(e))) \Leftrightarrow (f\circ g)\times(h\circ e)=(f\times h)\circ(g\times e)$

4) $(f,g),(h,e)\in D \Rightarrow (\phi(f),\phi(g)),(\phi(h),\phi(e))\in D_2$ wg. 0) $\Rightarrow$ $(\phi(f)+\phi(h),\phi(g)+\phi(e))\in D_2 \Rightarrow (\phi^{-1}(\phi(f)+\phi(h)),\phi^{-1}(\phi(g)+\phi(e)))\in D$ $\Rightarrow (f\times h,g\times e)\in D$.

q.e.d.

Satz 2.3.6:

Ist $(M,\times,\circ_D)$ ein Monopolyid und M' ein Erzeugendensystem von $(M,\times,\circ_D)$ mit $1_M\subseteq M'$, dann ist $(S(M,M')/\sim,\times,\circ_{\mathcal{D}})$ ein zu $(M,\times,\circ_D)$ isomorphes Monopolyid. (Die zugehörigen Operationen werden dabei wie üblich über entsprechende Repräsentanten definiert, wobei [S] für die Äquivalenzklasse von $S\in S(M,M')$ steht.)

Beweis:

Nach Definition und Satz 2.2.4 ist "~" eine Äquivalenzrelation. Da die Operationen "$\times$" und "$\circ$" über entsprechende Repräsentanten der Äquivalenzklassen definiert werden, ist $(S(M,M')/\sim,\times)$ nach Definition und Satz 2.2.14 eine Halbgruppe und $(S(M,M')/\sim,\circ_{\mathcal{D}})$ nach Definition und Satz 2.2.10 eine partielle Halbgruppe. Da jedes $S\in S(M,M')$ mit $\mathrm{Kern}(S)\subseteq 1_M$ eine Identität definiert, definieren die Äquivalenzklassen von

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix}0\\1_l(_M(S))\\0\end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix}0\\1_r(_M(S))\\0\end{pmatrix}$$

gerade das Neutralelement bezüglich "$\times$" bzw. die links- und rechtsseitige Identität von [S]. Damit ist $(S(M,M')/\sim,\times)$ ein Monoid und $(S(M,M')/\sim,\circ_{\mathcal{D}})$ ein Polyid.
Definiere $\overline{\omega}_M:(S(M,M')/\sim,\times,\circ_{\mathcal{D}}) \to M$ mit $\overline{\omega}_M([S])=\omega_M(S)$. Dann ist $\overline{\omega}_M$ nach Definition von ~ eine injektive Abbildung. Da M' ein Erzeugendensystem ist, ist $\overline{\omega}_M$ nach Satz 2.2.8 auch surjektiv und somit bijektiv. Ist $[S],[S']\in(S(M,M')/\sim,\times,\circ_{\mathcal{D}})$, so ist nach Satz 2.2.16 $\overline{\omega}_M([S]\times[S'])=\omega_M(S\times S')=\omega_M(S)\times\omega_M(S')=\overline{\omega}_M([S])\times\overline{\omega}_M([S'])$ und nach Satz 2.2.12 $\overline{\omega}_M([S]\circ[S'])=\omega_M(S\circ S')=\omega_M(S)\circ\omega_M(S')=$ $\overline{\omega}_M([S])\circ\overline{\omega}_M([S'])$, wobei $[S]\circ[S']$ genau dann definiert ist, wenn $\omega_M(S)\circ\omega_M(S')$ definiert ist. Damit kann man zeigen, daß $\overline{\omega}_M$ Identitäten auf Identitäten abbildet und somit ein Monopolyiden-Isomorphismus ist. $\Rightarrow$ Nach Satz 2.3.4 ist $(S(M,M')/\sim,\times,\circ_{\mathcal{D}})$ ein zu $(M,\times,\circ_D)$ isomorphes Monopolyid.

q.e.d.

Sind zwei Monopolyide $(M_1,\times,\circ_{D_1})$ und $(M_2,+,\cdot_{D_2})$ gegeben, so ist es manchmal von besonderem Interesse einen Monopolyiden-Homomorphismus angeben zu können, der jedem Element aus M_1 ein

Element aus M_2 zuordnet. Nachfolgend wird darauf hingearbeitet zu klären, welche Bedingungen das Monopolyid $(M_1,\times,\circ_{D1})$, eine Teilmenge $M_1'\subseteq M_1$ und eine Abbildung $\phi':M_1'\rightarrow M_2$ erfüllen müssen, damit, ϕ' zu genau einem Homomorphismus $\phi:M_1\rightarrow M_2$ fortgesetzt werden kann.

Satz und Definition 2.3.8:

Sind $(M,\times,\circ_D)$ und $(M_2,+,\cdot_{D2})$ zwei Monopolyide, $M'\subseteq M$ mit $1_M\subseteq M'$, dann muß eine Abbildung $\phi':M'\rightarrow M_2$, die zu genau einem Monopolyiden-Homomorphismus fortsetzbar ist, folgenden Bedingungen genügen:

(F0) $\phi'(0)=0$ und für $f,g\in 1_M \Rightarrow \phi'(f),\phi'(g)\in 1_{M_2}$, sowie $\phi'(f\times g)=\phi'(f)+\phi'(g)$

(F1) $(f,g)\in D\cap M'xM' \Rightarrow (\phi'(f),\phi'(g))\in D_2$

ϕ' heißt dann **die Minimalvoraussetzungen zur Fortsetzung zu genau einem Monopolyiden-Homomorphismus erfüllend.**

Beweis:

Angenommen ϕ' kann zu einem Monopolyiden-Homomorphismus ϕ fortgesetzt werden, dann ist die Restriktion von ϕ auf 1_M ebenfalls ein Monopolyiden-Homomorphismus von 1_M nach M_2. Da diese Restriktion auf 1_M mit ϕ' identisch ist, muß ϕ' die Bedingung (F0) erfüllen. Da die Restriktion von ϕ auf M' gerade ϕ' ist, erfüllt ϕ' auch die Bedingung (F1).

Hilfssatz 2.3.10:

Sind $(M,\times,\circ_D)$ und $(M_2,+,\cdot_{D2})$ zwei Monopolyide, $M'\subseteq M$ mit $1_M\subseteq M'$ und $\phi':M'\rightarrow M_2$ eine Abbildung die die Minimalvoraussetzungen zur Fortsetzung zu genau einem Monopolyiden-Homomorphismus erfüllt, dann genügt ϕ' auch der Bedingung:

(F2) $f\in M' \Rightarrow 1_{l2}(\phi'(f))=\phi'(1_l(f))$ und $1_{r2}(\phi'(f))=\phi'(1_r(f))$.

Beweis:

Da $(M,\circ_D)$ und $(M_2,\cdot_{D2})$ Polyide sind, folgt die Behauptung aus Hilfssatz 1.4.6.

Hilfssatz 2.3.12:

Sind $(M,\times,\circ_D)$ und $(M_2,+,\cdot_{D2})$ zwei Monopolyide, $M'\subseteq M$ mit $1_M\subseteq M'$ und $\phi':M'\rightarrow M_2$ eine Abbildung, die die Minimalvoraussetzungen zur Fortsetzung zu genau einem Monopolyiden-Homomorphismus erfüllt, dann gilt:

$1_t, 1_b, 1_T, 1_B \in 1_M$, $f, g \in M_1'$ und $1_r(1_t \times f \times 1_b) = 1_l(1_T \times g \times 1_B) \Rightarrow$ $1_{r2}(\phi'(1_t) + \phi'(f) + \phi'(1_b)) = 1_{l2}(\phi'(1_T) + \phi'(g) + \phi'(1_B))$.

Beweis:

$1_r(1_t \times f \times 1_b) = 1_l(1_T \times g \times 1_B) \Rightarrow 1_t \times 1_{r1}(f) \times 1_b = 1_T \times 1_{l1}(g) \times 1_B$ nach Satz 2.1.6 (1). Wegen (F0) ist $\phi'(1_t), \phi'(1_b), \phi'(1_T), \phi'(1_B) \in 1_{M_2}$ und $\phi'(1_t) + \phi'(1_r(f)) + \phi'(1_b) = \phi'(1_t \times 1_{r1}(f) \times 1_b) = \phi'(1_T \times 1_l(g) \times 1_B) = \phi'(1_T) + \phi'(1_{l1}(g)) + \phi'(1_B)$. Nach Hilfssatz 2.3.10 besitzt ϕ' auch die Eigenschaft (F2). $\Rightarrow 1_{r2}(\phi'(1_t) + \phi'(f) + \phi'(1_b)) = \phi'(1_t) + 1_{r2}(\phi'(f)) + \phi'(1_b) = \phi'(1_t) + \phi'(1_r(f)) + \phi'(1_b) = \phi'(1_T) + \phi'(1_l(g)) + \phi'(1_B) = \phi'(1_T) + 1_{l2}(\phi'(g)) + \phi'(1_B) = 1_{l2}(\phi'(1_T) + \phi'(g) + \phi'(1_B))$.

q.e.d.

Scheinbar ohne Zusammenhang werden nun die (auf sequentielle Darstellungen) übertragbaren Abbildungen eingeführt. Aber schon mit dem nächsten Satz zeigt sich die verblüffende Äquivalenz von übertragbaren Abbildungen und solchen, die die Minimalvoraussetzungen zur Fortsetzung zu genau einem Monopolyiden-Homomorphismus erfüllen.

Definition 2.3.14:

Sind $(M, \times, \circ_D)$ und $(M_2, +, \cdot_{D_2})$ zwei Monopolyide, $M' \subseteq M$ mit $1_M \subseteq M'$, dann heißt eine Abbildung $\phi': M' \to M_2$ (auf die sequentiellen Darstellungen) **übertragbar**, wenn sie die Bedingungen (1)-(4) erfüllt:

(1) $\phi'(0) = 0$.

(2) $S = \begin{pmatrix} 1_{t1} & & 1_{tn} \\ f_1 & \dots & f_n \\ 1_{b1} & & 1_{bn} \end{pmatrix} \in S(M, M') \Rightarrow \overline{\boldsymbol{\phi}'}(\mathbf{S}) := \begin{pmatrix} \phi'(1_{t1}) & & \phi'(1_{tn}) \\ \phi'(f_1) & \dots & \phi'(f_n) \\ \phi'(1_{b1}) & & \phi'(1_{bn}) \end{pmatrix} \in S(M_2)$

(3) $S, S' \in S(M, M') \Rightarrow \overline{\phi'}(S \times S') = \overline{\phi'}(S) + \overline{\phi'}(S')$

(4) $S, S' \in S(M, M')$ und $(S, S') \in \mathcal{D} \Rightarrow (\overline{\phi'}(S), \overline{\phi'}(S')) \in \mathcal{D}_2$ und $\overline{\phi'}(S \circ S') = \overline{\phi'}(S) \cdot \overline{\phi'}(S')$.

Satz 2.3.16:

Sind $(M,\times,\circ_D)$ und $(M_2,+,\cdot_{D_2})$ zwei Monopolyide und $M'\subseteq M$ mit $1_M\subseteq M'$, dann ist eine Abbildung $\phi':M'\to M_2$ genau dann eine (auf die sequentiellen Darstellungen) übertragbare Abbildung, wenn sie die Minimalvoraussetzungen zur Fortsetzung zu genau einem Monopolyiden-Homomorphismus erfüllt.

Beweis:

"$\Rightarrow$" Seien ϕ' eine Abbildung, die die Minimalvoraussetzungen erfüllt und S und S' wie in Definition und Satz 2.2.10 gegeben.

1) Folgt unmittelbar aus (F0).

2) Da alle Koeffizienten von S aus M' sind, ist $\overline{\phi'}(S)$ als Matrix wohldefiniert.
$S\in S(M,M') \Rightarrow 1_{ti},1_{bi}\in 1_M$ für $1\leq i\leq n$ und $1_r(1_{ti}\times f_i\times 1_{bi})= 1_l(1_{ti+1}\times f_{i+1}\times 1_{bi+1})$ für $1\leq i\leq n-1$. $\Rightarrow$ $\phi'(1_{ti}),\phi'(1_{bi})\in 1_{M_2}$ für $1\leq i\leq n$, wegen (F0) und $1_{r2}(\phi'(1_{ti})+\phi'(f_i)+\phi'(1_{bi}))= 1_{l2}(\phi'(1_{ti+1})+\phi'(f_{i+1})+\phi'(1_{bi+1}))$ nach Hilfssatz 2.3.12. $\Rightarrow$ $\overline{\phi'}(S)\in S(M_2)$.

3) Um die Gleichheit von $\overline{\phi'}(S\times S')$ und $\overline{\phi'}(S)+\overline{\phi'}(S')$ zu verifizieren müssen beide Matrizen koeffizientenweise verglichen werden.
Es ist zu zeigen: $\phi'(1_r(1_{tn}\times f_n\times 1_{bn})\times 1_{tj}')=1_{r2}(\phi'(1_{tn})+\phi'(f_n)+ \phi'(1_{bn}))+\phi'(1_{tj}')$ für $1\leq j\leq m$ und $\phi'(1_{bi}\times 1_l(1_{t1}'\times f_1'\times 1_{b1}'))= \phi'(1_{bi})+1_{l2}(\phi'(1_{t1}')+\phi'(f_1')+\phi'(1_{b1}'))$ für $1\leq i\leq n$.
Wegen (F0) ist $\phi'(1_r(1_{tn}\times f_n\times 1_{bn})\times 1_{tj}')=\phi'(1_r(1_{tn}\times f_n\times 1_{bn}))+ \phi'(1_{tj}')=\phi'(1_{tn}\times 1_r(f_n)\times 1_{bn})+\phi'(1_{tj}')=\phi'(1_{tn})+\phi'(1_r(f_n))+ \phi'(1_{bn})+\phi'(1_{tj}')$. Da ϕ' nach Hilfssatz 2.3.10 auch die Bedingung (F2) erfüllt, ist $\phi'(1_{tn})+\phi'(1_r(f_n))+\phi'(1_{bn})+ \phi'(1_{tj}') = \phi'(1_{tn})+1_{r2}(\phi'(f_n))+\phi'(1_{bn})+\phi'(1_{tj}') = 1_{r2}(\phi'(1_{tn})+\phi'(f_n)+\phi'(1_{bn}))+\phi'(1_{tj}')$.
Analog kann $\phi'(1_{bi}\times 1_l(1_{t1}'\times f_1'\times 1_{b1}'))=\phi'(1_{bi})+1_{l2}(\phi'(1_{t1}')+ \phi'(f_1')+\phi'(1_{b1}'))$ gezeigt werden.

4) $(S,S')\in\wp \Rightarrow 1_r(1_{tn}\times f_n\times 1_{bn})=1_l(1_{t1}'\times f_1'\times 1_{b1}') \Rightarrow 1_{r2}(\phi'(1_t)+\phi'(f)+\phi'(1_b))=1_{l2}(\phi'(1_T)+\phi'(g)+\phi'(1_B))$ nach Hilfssatz 2.3.12. $\Rightarrow$ $(\overline{\phi'}(S),\overline{\phi'}(S'))\in\wp_2$. Damit ist der Beweis von $\overline{\phi'}(S\circ S')=\overline{\phi'}(S)\cdot\overline{\phi'}(S')$ trivial, wenn die zugehörigen Matrizen koeffizientenweise verglichen werden.

"$\Rightarrow$" Seien ϕ' eine übertragbare Abbildung und S und S' wie in Definition und Satz 2.2.10 gegeben.

F0) Wegen (1) ist $\phi'(0)=0$. Seien $f,g\in 1_{M_1}$ $\Rightarrow$ $\overline{\phi'}\left(\begin{pmatrix}f\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\phi'(f)\\0\\0\end{pmatrix}\in S(M_2)$ nach (2). $\Rightarrow$ $\phi(f)=\phi'(f)\in 1_{M_2}$. Analog ist auch $\phi(g)\in 1_{M_2}$. Nach Definition und Satz 2.2.14 ist $\begin{pmatrix}f\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}g\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f & f\times g\\0 & 0\\g & 0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}\phi'(f)\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\phi'(g)\\0\\0\end{pmatrix}=$ $\begin{pmatrix}\phi'(f) & \phi'(f)+\phi'(g)\\0 & 0\\\phi'(g) & 0\end{pmatrix}$. Wegen (3) ist $\overline{\phi'}\left(\begin{pmatrix}f\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}g\\0\\0\end{pmatrix}\right)=$ $\overline{\phi'}\left(\begin{pmatrix}f\\0\\0\end{pmatrix}\right)+\overline{\phi'}\left(\begin{pmatrix}g\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix}\phi'(f) & \phi'(f\times g)\\0 & 0\\\phi'(g) & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\phi'(f) & \phi'(f)+\phi'(g)\\0 & 0\\\phi'(g) & 0\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $\phi'(f\times g)=\phi'(f)+\phi'(g)$.

F1) Seien $(f,g)\in D_1\cap M_1'\mathrm{x}M_1'$ und $S:=\begin{pmatrix}0\\f\\0\end{pmatrix}$ bzw. $S':=\begin{pmatrix}0\\g\\0\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $1_r(f)=1_l(g)$ nach Satz 1.3.6 (5) $\Rightarrow$ $1_r(0\times f\times 0)=1_l(0\times g\times 0)$ $\Rightarrow$ $(S,S')\in\mathcal{D}$. $\Rightarrow$ $(\overline{\phi'}(S),\overline{\phi'}(S'))\in\mathcal{D}_2$ wegen (4). $\Rightarrow$ $1_{r2}(0\times\phi'(f)\times 0)=1_{l2}(0\times\phi'(g)\times 0)$ $\Rightarrow$ $1_{r2}(\phi'(f))=1_{l2}(\phi'(g))$ $\Rightarrow$ $(\phi'(f),\phi'(g))\in D_2$.

q.e.d.

Natürlich erfüllt jeder Monopolyiden-Homomorphismus die Minimalvoraussetzungen zur Fortsetzung zu genau einem Monopolyiden-Homomorphismus und ist damit eine übertragbare Abbildung. Im nächsten Satz wird diese Aussage etwas differenzierter zum Ausdruck gebracht.

Satz 2.3.18:

Sind $(M,\times,\circ_D)$ und $(M_2,+,\cdot_{D_2})$ zwei Monopolyide, U ein Untermonopolyid von M mit $1_M\subseteq U$ und $\phi:U\to M_2$ ein Monopolyiden-Homomorphismus, dann ist ϕ eine (auf S(M,U)) übertragbare Abbildung mit $\phi(\omega_M(S))=\omega_{M_2}(\overline{\phi}(S))\ \forall\ S\in S(M,U)$.

Beweis:

Da ϕ ein Monopolyiden-Homomorphismus ist, erfüllt ϕ die Bedingungen (F0) und (F1) von Definition 2.5.2. $\Rightarrow$ ϕ ist nach Satz 2.3.16 eine auf S(M,U) übertragbare Abbildung.

Ist $S=\begin{pmatrix} 1_{t1} & & 1_{tn} \\ f_1 & \ldots & f_n \\ 1_{b1} & & 1_{bn} \end{pmatrix} \in S(M,U)$ eine sequentielle Darstellung, dann ist $\omega_M(S)=(1_{t1}\times f_1\times 1_{b1})\circ\ldots\circ(1_{tn}\times f_n\times 1_{bn})\in U$ und $\phi(\omega_M(S))= \phi((1_{t1}\times f_1\times 1_{b1})\circ\ldots\circ(1_{tn}\times f_n\times 1_{bn})) = (\phi(1_{t1})+\phi(f_1)+\phi(1_{b1}))\circ\ldots\circ (\phi(1_{tn})+\phi(f_n)+\phi(1_{bn})))= \omega_{M_2}(\overline{\phi}(S))$.

q.e.d.

Der obige Satz gilt natürlich insbesondere, wenn U=M ist.

Mit nachfolgender Definition und Satz kommt man dem Ziel, Monopolyiden-Homomorphismen zu konstruieren, bereits in greifbare Nähe.

Definition 2.3.20:

Sind $(M,\times,\circ_D)$ und $(M_2,+,\cdot_{D_2})$ zwei Monopolyide, $M'\subseteq M$ mit $1_M\subseteq M'$, dann heißt eine übertragbare Abbildung $\phi':M'\to M_2$ **äquivalenzerhaltend**, wenn $\overline{\phi'}$ relationserhaltend ist, d.h. für $S,S'\in S(M,M')$ gilt: $S\sim S' \Rightarrow \overline{\phi'}(S)\sim\overline{\phi'}(S')$.

Satz 2.3.22:

Sind $(M,\times,\circ_D)$ und $(M_2,+,\cdot_{D_2})$ zwei Monopolyide, $M'\subseteq M$ ein Erzeugendensystem von $(M,\times,\circ_D)$ mit $1_M\subseteq M'$ und $\phi':M'\to M_2$ eine äquivalenzerhaltende, übertragbare Abbildung, dann läßt sich ϕ' zu genau einem Monopolyiden-Homomorphismus $\phi:M\to M_2$ fortsetzen.

Beweis:

Nach Satz 2.2.8 gibt es zu jedem $f\in M$ eine sequentielle Darstellung $S_f\in S(M,M')$ mit $\omega_M(S_f)=f$. Da ϕ' eine äquivalenzerhaltende, übertragbare Abbildung ist, ist $\overline{\phi'}$ relationserhaltend und es gilt für je zwei sequentielle Darstellungen $S_f,S_f'\in S(M,M')$ von f:
$\omega_M(S_f)=f=\omega_M(S_f') \Rightarrow S_f\sim S_f' \Rightarrow \overline{\phi'}(S_f)\sim\overline{\phi'}(S_f') \Rightarrow \omega_{M_2}(\overline{\phi'}(S_f))= \omega_{M_2}(\overline{\phi'}(S_f'))$. Damit ist $\phi:M\to M_2$ mit $\phi(f):=\omega_{M_2}(\overline{\phi'}(S_f))$ eine wohldefinierte Abbildung.

Angenommen ϕ ist ein Monopolyiden-Homomorphismus. Dann ist ϕ der einzige Monopolyiden-Homomorphismus mit $\phi|_{M'}=\phi'$, da nach Satz 2.3.18 für jeden Homomorphismus ϕ'', der Fortsetzung von ϕ' ist, gilt: $\phi''(f)=\phi''(\omega_M(S_f))=\omega_{M_2}(\overline{\phi''}(S_f))=\omega_{M_2}(\overline{\phi'}(S_f))=\phi(\omega_M(S_f))= \phi(f)$.

Zeige ϕ ist ein Monopolyiden-Homomorphismus.
Da ϕ' eine übertragbare Abbildung ist, gilt $\phi'(0)=0 \Rightarrow \phi'(0)=\phi(0)=0$, wegen $0\in 1_M\subseteq M'$.

Für $1\in 1_M$ ist $\overline{\phi'}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\phi'(1)\\0\\0\end{pmatrix}\in S(M_2) \Rightarrow \phi(1)=\phi'(1)\in 1_{M_2}$.

Seien $f,g\in M$. $\Rightarrow \exists\ S_f\in S(M,M')$ mit $\omega_M(S_f)=f$ und $\exists\ S_g\in S(M,M')$ mit $\omega_M(S_g)=g$. $\Rightarrow$ $S_f\times S_g, S_f\circ S_g\in S(M,M')$, $\omega_M(S_f)\times\omega_M(S_g)=\omega_M(S_f\times S_g)$ bzw. $\omega_M(S_f)\circ\omega_M(S_g)=\omega_M(S_f\circ S_g)$ nach Satz 2.2.12 bzw. Satz 2.2.16. Ebenfalls mit diesen Sätzen folgt: $\omega_{M_2}(\overline{\phi'}(S_f)+\omega_{M_2}(\overline{\phi'}(S_g)=\omega_{M_2}(\overline{\phi'}(S_f)+\overline{\phi'}(S_g))$ und $\omega_{M_2}(\overline{\phi'}(S_f)\cdot\omega_{M_2}(\overline{\phi'}(S_g)=\omega_{M_2}(\overline{\phi'}(S_f)\cdot\overline{\phi'}(S_g))$.
Da ϕ' eine übertragbare Abbildung ist, gilt: $\phi(f)+\phi(g)=\omega_{M_2}(\overline{\phi'}(S_f))+\omega_{M_2}(\overline{\phi'}(S_g))=\omega_{M_2}(\overline{\phi'}(S_f)+\overline{\phi'}(S_g))=\omega_{M_2}(\overline{\phi'}(S_f\times S_g))$.
Andererseits ist aber auch $\phi(f\times g)=\phi(\omega_M(S_f)\times\omega_M(S_g))=\phi(\omega_M(S_f\times S_g))=\omega_{M_2}(\overline{\phi'}(S_f\times S_g)) \Rightarrow \phi(f)+\phi(g)=\phi(f\times g)$.
Analog ist $\phi(f)\cdot\phi(g)=\phi(f\circ g)$. Jedoch ist vorher zu zeigen:
$(f,g)\in D \Rightarrow (\phi(f),\phi(g))\in D_2$
Seien $(f,g)\in D \Rightarrow (\omega_M(S_f),\omega_M(S_g))\in D \Rightarrow (S_f,S_g)\in\mathcal{D}$ nach Satz 2.2.12. $\Rightarrow$ $(\overline{\phi'}(S_f),\overline{\phi'}(S_g))\in\mathcal{D}_2$, da ϕ' eine übertragbare Abbildung ist. $\Rightarrow (\omega_{M_2}(\overline{\phi'}(S_f)),\omega_{M_2}(\overline{\phi'}(S_g)))\in D_2$ nach Satz 2.2.12. $\Rightarrow$
$(\phi(f),\phi(g))\in D_2$ nach Definition von ϕ.

q.e.d.

An dieser Stelle sei explizit darauf hingewiesen, daß im Beweis zu obigem Satz die Fortsetzung von ϕ' zu einem Monopolyiden-Homomorphismus konstruktiv definiert wurde. Kennt man also zu einem Element f eine sequentielle Darstellung S_f, so kann man via $\omega_{M_2}(\overline{\phi'}(S_f))$ sofort das Bild von f angeben.

Der Beweis zu obigem Satz hätte unter Verwendung von Satz 2.3.6 auch einfacher und damit aber auch weniger konstruktiv geführt werden können. Dazu sind die Elemente aus $S(M,M')$ bzw. $S(M_2)$ zu Äquivalenzklassen zusammenzufassen und die Abbildung $\overline{\phi'}$ zu einer Abbildung $\overline{\overline{\phi'}}$ zwischen den Äquivalenzklassen zu erweitern. Dabei ist $\overline{\overline{\phi'}}$ allerdings nur dann wohldefiniert, wenn $\overline{\phi'}$ relationserhaltend ist. Der gesuchte Homomorphismus ϕ ist dann über das kommutative Diagramm von Bild 2.2 gegeben.

$$
\begin{tikzcd}
(M, \times, \circ_D) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, dash, "\overline{\omega}_M^{\,-1}"'] & (M_2, +, \cdot_{D_2}) \arrow[d, dash, "\overline{\omega}_{M_2}"] \\
(S(M, M')/\sim, \times, \circ_D) \arrow[r, "\overline{\overline{\phi}}{}'"'] & (S(M_2)/\sim, +, \cdot_{D_2})
\end{tikzcd}
$$

Bild 2.2: Kommutatives Diagramm zum Beweis von Satz 2.3.22. Dabei ist ϕ die Fortsetzung von ϕ'.

Im allgemeinen muß jedoch nicht unbedingt gezeigt werden, daß $\overline{\phi'}$ für die gesamte Äquivalenzrelation "~" relationserhaltend ist. Im nächsten Abschnitt wird bewiesen, daß es genügt zu zeigen, daß $\overline{\phi'}$ auf einer Basis (von "~") relationserhaltend ist.

2.4 Überführbare sequentielle Darstellungen und Substitutionsbasen

In diesem Abschnitt wird nach einem Kriterium gesucht, mit dem festgestellt werden kann, wann eine übertragbare Abbildung äquivalenzerhaltend ist. Die Grundlage hierfür bieten die im Kapitel "Partielle Halbgruppen und Polyide" gewonnenen Erkenntnisse über Kongruenzen. Der nachfolgende Satz ermöglicht es diese hier effektiv einsetzen zu können.

Satz 2.4.2:

Sind $(M,\times,\circ_D)$ und $(M_2,+,\cdot_{D_2})$ zwei Monopolyide, $M'\subseteq M$ mit $1_M\subseteq M'$ und $\phi':M'\rightarrow M_2$ eine (auf die sequentiellen Darstellungen) übertragbare Abbildung, dann ist die nach Definition 2.3.14 definierte Abbildung $\overline{\phi'}:(S(M,M'),\circ_{\mathcal{D}})\rightarrow(S(M_2),\cdot_{\mathcal{D}_2})$ ein Homomorphismus (auf partiellen Halbgruppen) und die nach Definition und Satz 2.2.4 definierte Äquivalenzrelation $\sim$ eine Kongruenz auf $(S(M,M'),\circ_{\mathcal{D}})$ bzw. $(S(M_2),\cdot_{\mathcal{D}_2})$.

Beweis:

Aus Definition 2.3.14 (4) folgt unmittelbar, daß $\overline{\phi'}$ ein Homomorphismus (auf partiellen Halbgruppen) ist. Nach Definition 1.2.6 bleibt zu zeigen, daß $\sim$ mit "$\circ$" bzw. "$\cdot$" links- und rechtsverträglich ist.
Sei $S\sim S'$ und $(S'',S)\in\mathcal{D}$ $\Rightarrow$ $\omega_M(S)=\omega_M(S')$ nach Definition und Satz 2.2.4 und $(\omega_M(S''),\omega_M(S))\in D$ nach Satz 2.2.12. $\Rightarrow$ $(\omega_M(S''),\omega_M(S'))\in D$ und damit $(S'',S)\in\mathcal{D}$ nach Satz 2.2.12. $\Rightarrow$ $\omega_M(S'')\circ\omega_M(S)=\omega_M(S'')\circ\omega_M(S')$ $\Rightarrow$ $\omega_M(S''\circ S)=\omega_M(S''\circ S')$ nach Satz 2.2.12 $\Rightarrow$ $S''\circ S\sim S''\circ S'$. Analog zeigt man, daß $\sim$ mit "$\circ$" rechtsverträglich ist. Aus dem selben Grund ist $\sim$ auch mit "$\cdot$" links- und rechtsverträglich.

q.e.d.

(Bei obigem Satz ist zu beachten, daß die beiden Kongruenzen $\sim$ auf $(S(M,M'),\circ_{\mathcal{D}})$ und $\sim$ auf $(S(M_2),\cdot_{\mathcal{D}_2})$ natürlich verschieden sind und trotzdem für beide dasselbe Zeichen verwendet wird.)

Mit obigen Voraussetzungen gibt Satz 1.2.32 Anlaß zu der berechtigten Hoffnung, daß eine übertragbare Abbildung ϕ' bereits dann äquivalenzerhaltend ist, wenn $\overline{\phi'}$ nur auf einer Basis von $\sim$ relationserhaltend ist. Aus diesem Grund werden als nächstes die Definitionen zum Begriff der Basis bzw. der Überführbarkeit in geeigneter Form wiederholt. Dabei möge der Leser stets beachten, daß nach Definition gilt:

$S \sim S' \Leftrightarrow \omega_M(S)=\omega_M(S')$. Andere Definitionen und Sätze sollten vorher im Kapitel "Partielle Halbgruppen und Polyide" Abschnitt "Kongruenzen" nachgelesen werden.

Definition 2.4.4:

Ist $(M,\times,\circ_D)$ ein Monopolyid, $M'\subseteq M$ mit $1_M \subseteq M'$ und ρ eine Teilmenge von $S(M,M')\times S(M,M')$, mit den Eigenschaften:

(1) $(S,S')\in\rho \Rightarrow \omega_M(S)=\omega_M(S')$

(2) $(S,S')\in\rho \Rightarrow (S',S)\in\rho$

Dann heißt ρ eine **symmetrische Substitutionsmenge von S(M,M').**

Definition 2.4.6:

Ist $(M,\times,\circ_D)$ ein Monopolyid, $M'\subseteq M$ mit $1_M \subseteq M'$, ρ eine symmetrische Substitutionsmenge von $S(M,M')$ und $S,S'\in S(M,M')$, dann heißt **S bzgl. ρ direkt überführbar in S'**, wenn $S=S'$ ist oder zwei sequentielle Darstellungen $S_1,S_1'\in S(M,M')$ existieren mit $(S_1,S_1')\in\rho$ und eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(a) $S=S_1$ und $S'=S_1'$.

(b) $\exists\ S_0\in S(M,M')$ mit $S=S_0\circ S_1$ und $S'=S_0\circ S_1'$

(c) $\exists\ S_2\in S(M,M')$ mit $S=S_1\circ S_2$ und $S'=S_1'\circ S_2$

(d) $\exists\ S_0,S_2\in S(M,M')$ $S=S_0\circ S_1\circ S_2$ und $S'=S_0\circ S_1'\circ S_2$

Definition 2.4.8:

Ist $(M,\times,\circ_D)$ ein Monopolyid, $M'\subseteq M$ mit $1_M \subseteq M'$, ρ eine symmetrische Substitutionsmenge von $S(M,M')$ und $S,S'\in S(M,M')$, dann heißt **S bzgl. ρ überführbar in S'** (in Zeichen: $\mathbf{S \rightarrow_\rho S'}$), wenn es eine Folge von sequentiellen Darstellungen $S_1,\ldots,S_m\in S(M,M')$ gibt mit $S=S_1$, $S_m=S'$ und für $1\le k\le m-1$ S_k bzgl. ρ direkt überführbar in S_{k+1} ist.

Bei genauerem Betrachten der Bedingungen (a)-(d) zeigt sich, daß diese gerade so formuliert sind, daß sie das Substituieren einer zusammenhängenden Folge von Spalten in einer sequentiellen Darstellung beschreiben. Eine sequentielle Darstellung ist also genau dann bzgl. ρ in eine andere direkt überführbar, wenn sich beide in einer Folge von zusammenhängenden Spalten unterscheiden und diese ihrerseits ein Paar von äquivalenten, sequentiellen Darstellungen aus ρ definieren. Weiter ist eine sequentielle Darstellung in eine andere (allgemein) überführbar, wenn es eine Folge von solchen elementaren Substitutionen gibt.

Im Umgang mit überführbaren, sequentiellen Darstellungen gelten damit folgende Rechenregeln:

Satz 2.4.10:

Ist $(M,\times,\circ_D)$ ein Monopolyid, $M'\subseteq M$ mit $1_M\subseteq M'$, ρ eine symmetrische Substitutionsmenge von $S(M,M')$, dann gilt:

(a) $S\in S(M,M') \Rightarrow S\boldsymbol{\rightarrow}_\rho S$

(b) $S\boldsymbol{\rightarrow}_\rho S' \Rightarrow S'\boldsymbol{\rightarrow}_\rho S$

(c) $S\boldsymbol{\rightarrow}_\rho S'$ und $S'\boldsymbol{\rightarrow}_\rho S'' \Rightarrow S\boldsymbol{\rightarrow}_\rho S''$

(d) $S\boldsymbol{\rightarrow}_\rho S'$ und $S\circ S''$ ist definiert $\Rightarrow$
$S'\circ S''$ ist definiert und $S\circ S''\boldsymbol{\rightarrow}_\rho S'\circ S''$

(e) $S\boldsymbol{\rightarrow}_\rho S'$ und $S''\circ S$ ist definiert $\Rightarrow$
$S''\circ S'$ ist definiert und $S''\circ S\boldsymbol{\rightarrow}_\rho S''\circ S'$

(f) $S_1\boldsymbol{\rightarrow}_\rho S_1'$, $S_2\boldsymbol{\rightarrow}_\rho S_2'$ und $S_1\circ S_2$ definiert $\Rightarrow$
$S_1'\circ S_2'$ ist definiert und $S_1\circ S_2\boldsymbol{\rightarrow}_\rho S_1'\circ S_2'$.

(g) $S\boldsymbol{\rightarrow}_\rho S' \Rightarrow \omega_M(S)=\omega_M(S')$

Beweis:

Nach Definition 2.4.4 ist ρ eine symmetrische Teilmenge von $\sim$. Damit folgt unter Beachtung der Tatsache $S\sim S' \Leftrightarrow \omega_M(S)=\omega_M(S')$ aus Satz 2.4.2 und Satz 1.2.18 die Behauptung.

q.e.d.

Es sei an dieser Stelle noch einmal hervorgehoben, daß nach (b) die Relation "$\boldsymbol{\rightarrow}_\rho$" symmetrisch ist und somit auch die Formulierung "S und S' sind bzgl. ρ ineinander überführbar" sinnvoll ist. Besonders erwähnenswert ist auch, daß nach Regel (g) je zwei bzgl. ρ ineinander überführbare, sequentielle Darstellungen äquivalent sind. Obwohl oder gerade weil die Umkehrung dieser Aussage im allgemeinen nicht gilt, ist gerade dieser Fall von Bedeutung. Dazu folgende Definition:

Definition 2.4.12:

Ist $(M,\times,\circ_D)$ ein Monopolyid, $M'\subseteq M$ mit $1_M\subseteq M'$ und ρ eine symmetrische Substitutionsmenge von $S(M,M')$, dann heißt ρ eine **Substitutionsbasis von S(M,M')**, wenn gilt: $S,S'\in S(M,M')$ und $\omega_M(S)=\omega_M(S') \Rightarrow S \rightarrow_\rho S'$.

Vergleicht man diese Definition mit Definition 1.2.20, so stellt man fest, daß einer Substitutionsbasis von $S(M,M')$ gerade eine Basis von "$\sim$" entspricht. Deshalb kann auch hier festgestellt werden, daß zu jeder Teilmenge $M'\subseteq M$ mit $1_M\subseteq M'$ eine Substitutionsbasis von $S(M,M')$ existiert, da die Menge $\{(S,S')\in S(M,M')\times S(M,M'):\ \omega_M(S)=\omega_M(S')\}$ gerade eine solche definiert. Natürlich ist man jedoch im allgemeinen daran interessiert, möglichst kleine bzw. möglichst günstige Substitutionsbasen angeben zu können. Dazu mehr am Ende dieses Kapitels.

Mit der nächsten Definition bzw. mit dem nächsten Satz ist das Ziel dieses Abschnittes erreicht. Letzterer begründet auch die besondere Bedeutung von Substitutionsbasen.

Definition 2.4.14:

Sind $(M,\times,\circ_D)$ und $(M_2,+,\cdot_{D_2})$ zwei Monopolyide, $M'\subseteq M$ mit $1_M\subseteq M'$ und ρ eine symmetrische Substitutionsmenge von $S(M,M')$, dann heißt eine übertragbare Abbildung $\phi':M'\rightarrow M_2$ **auf ρ äquivalenzerhaltend**, wenn $\overline{\phi'}$ auf ρ relationserhaltend ist, d.h. $(S,S')\in\rho \Rightarrow \overline{\phi'}(S)\sim\overline{\phi'}(S')$.

Satz 2.4.16:

Sind $(M,\times,\circ_D)$ und $(M_2,+,\cdot_{D_2})$ zwei Monopolyide, $M'\subseteq M$ ein Erzeugendensystem von $(M,\times,\circ_D)$ mit $1_M\subseteq M'$, ρ eine Substitutionsbasis von $S(M,M')$ und $\phi':M'\rightarrow M_2$ eine auf ρ äquivalenzerhaltende, übertragbare Abbildung, dann läßt sich ϕ' zu genau einem Monopolyiden-Homomorphismus $\phi:M\rightarrow M_2$ fortsetzen.

Beweis:

Nach Satz 2.4.2 ist $\overline{\phi'}:(S(M,M'),\circ_{\mathcal{S}})\rightarrow(S(M_2),\cdot_{\mathcal{S}_2})$ ein Homomorphismus (auf partiellen Halbgruppen) und $\sim$ eine Kongruenz auf $(S(M,M'),\circ_{\mathcal{S}})$ bzw. $(S(M_2),\cdot_{\mathcal{S}_2})$. Da ϕ' nach Voraussetzung auf ρ äquivalenzerhaltend ist, ist $\overline{\phi'}$ auf ρ relationserhaltend und da ρ nach Voraussetzung eine Substitutionsbasis ist, ist ρ eine Basis von $\sim$. Damit ist nach Satz 1.2.32 $\overline{\phi'}$ auf (ganz) $\sim$ relationserhaltend, d.h.

$S,S' \in S(M,M')$ und $S \sim S' \Rightarrow \overline{\phi'}(S) \sim \overline{\phi'}(S')$. (Dabei ist wieder zu beachten, daß die beiden Kongruenzen $\sim$ auf $(S(M,M'),\circ_{\mathcal{S}})$ und $\sim$ auf $(S(M_2),\cdot_{\mathcal{S}_2})$ natürlich verschieden sind und trotzdem für beide dasselbe Zeichen verwendet wird.) Damit ist ϕ' eine äquivalenzerhaltende, übertragbare Abbildung und kann nach Satz 2.3.22 zu genau einem Monopolyiden-Homomorphismus $\phi: M \to M_2$ fortgesetzt werden.

q.e.d.

Der Vorteil obigen Satzes gegenüber Satz 2.3.22 liegt nicht nur darin, daß von der Abbildung ϕ' nur gezeigt werden muß, daß sie auf ρ äquivalenzerhaltend ist. Darüber hinaus kann die Substitutionsbasis ρ unabhängig von ϕ' definiert bzw. ermittelt werden.

Unter den Substitutionsbasen von $S(M,M')$ sind gerade solche von besonderem Interesse, auf denen jede übertragbare Abbildung äquivalenzerhaltend ist. Dies führt direkt zu den vollkommenen bzw. α-vollkommenen Monopolyiden.

2.5 Vollkommene und freie Monopolyide

Vollkommene Monopolyide stellen den allgemeinsten Fall von α-vollkommenen Monopolyiden dar, die später noch wichtig werden. Bei den freien Monopolyiden dagegen handelt es sich um eine Oberklasse der vollkommenen Monopolyide, die im Bezug auf freie X-Kategorien von Bedeutung sind.

Wie bereits angedeutet, soll es in einem vollkommenen Monopolyiden möglich sein, jede übertragbare Abbildung zu genau einem Monopolyiden-Homomorphismus fortzusetzen. Dazu folgende Definition:

Definition 2.5.2:

Ist $(M,\times,\circ_D)$ ein Monopolyid, dann heißt eine Menge $M'\subseteq M$ mit $1_M\subseteq M'$ ein **vollkommenes Erzeugendensystem** von $(M,\times,\circ_D)$, wenn für jedes Monopolyid $(M_2,+,\cdot_{D_2})$ jede übertragbare Abbildung $\phi':M'\to M_2$ zu genau einem Monopolyiden-Homomorphismus $\phi:(M,\times,\circ_D)\to(M_2,+,\cdot_{D_2})$ fortgesetzt werden kann (d.h. $\phi|_{M'}=\phi'$). Besitzt ein Monopolyid ein vollkommenes Erzeugendensystem, so heißt es ein **vollkommenes Monopolyid**.

Statt der Bezeichnung "vollkommenes Monopolyid" würde sich auch der Name "**Hotz'sches Monopolyid**" anbieten, da sich G. Hotz in [HOT74] als erster mit freien X-Kategorien und damit implizit mit vollkommenen Monopolyiden auseinandergesetzt hat, wie weiter unten noch gezeigt wird.

Gleich der nächste Satz zeigt, daß ein vollkommenes Erzeugendensystem notwendigerweise immer auch ein Erzeugendensystem im Sinne von Satz und Definition 2.1.26 sein muß. Damit wird nachträglich die Bezeichnung "(vollkommenes) Erzeugendensystem" gerechtfertigt.

Satz 2.5.4:

Ist M' ein vollkommenes Erzeugendensystem eines Monopolyids $(M,\times,\circ_D)$, dann ist $\langle M'\rangle_M=M$.

Beweis:

Da $M'':=\langle M'\rangle_M\subseteq M$ ist, ist die Inklusion $Id_{M''}:M''\to M$ ein injektiver Monopolyiden-Homomorphismus. Andererseits erfüllt auch die identische Abbildung $Id_{M'}:M'\to M'\subseteq M''\subseteq M$ eine übertragbare Abbildung. $\Rightarrow$ Es gibt je genau eine homomorphe Fortsetzung $\phi_{M''}:M\to\langle M'\rangle$ und $\phi:M\to M$ von $Id_{M'}$, da nach Voraussetzung M' ein vollkommenes Erzeugendensystem von $(M,\times,\circ_D)$ ist. Da sowohl die

Hintereinanderausführung $Id_{M''} \circ \phi_{M''}: M \rightarrow \langle M' \rangle_M \rightarrow M$ als auch $Id_M: M \rightarrow M$ homomorphe Fortsetzungen von $Id_{M'}$ sind, ist $Id_{M''} \circ \phi_{M''} = Id_M$. Damit ist $Id_{M''}$ auch surjektiv. $\Rightarrow \langle M' \rangle_M = M$.

q.e.d.

Um aus Satz 2.4.16 ein geeignetes Kriterium für vollkommene Monopolyide entwickeln zu können, ist zuvor noch eine weitere Definition notwendig.

Definition 2.5.6:

Ist $(M,\times,\circ_D)$ ein Monopolyid, $M' \subseteq M$ mit $1_M \subseteq M'$ und ρ eine symmetrische Substitutionsmenge von $S(M,M')$, dann heißt ρ eine **vollkommene Substitutionsmenge von S(M,M')**, wenn jede übertragbare Abbildung $\phi': M' \rightarrow M_2$ in ein Monopolyid $(M_2,^+,\cdot_{D_2})$ auf ρ äquivalenzerhaltend ist. Ist ρ darüber hinaus eine Substitutionsbasis von $S(M,M')$, dann heißt ρ eine **vollkommene Substitutionsbasis von S(M,M')**.

Damit erhält man folgendes Kriterium für vollkommene Monopolyide:

Satz 2.5.8:

Ist $(M,\times,\circ_D)$ ein Monopolyid, $M' \subseteq M$ ein Erzeugendensystem von $(M,\times,\circ_D)$ mit $1_M \subseteq M'$ und ρ eine vollkommene Substitutionsbasis von $S(M,M')$, dann ist M' ein vollkommenes Erzeugendensystem und $(M,\times,\circ_D)$ ein vollkommenes Monopolyid.

Beweis:

Sei $(M_2,^+,\cdot_{D_2})$ ein Monopolyid und $\phi': M' \rightarrow M_2$ eine übertragbare Abbildung, dann ist ϕ' auf ρ äquivalenzerhaltend, da ρ eine vollkommene Substitutionsbasis von $S(M,M')$ ist. $\Rightarrow$ ϕ' läßt sich nach Satz 2.4.16 zu genau einem Monopolyiden-Homomorphismus $\phi: M \rightarrow M_2$ fortsetzen. $\Rightarrow$ M' ist ein vollkommenes Erzeugendensystem von $(M,\times,\circ_D)$. $\Rightarrow$ $(M,\times,\circ_D)$ ist ein vollkommenes Monopolyid.

q.e.d.

Natürlich ist es fraglich, ob überhaupt ein vollkommenes Monopolyid existiert. Diese Frage kann allerdings positiv beantwortet werden, wie in [HÜB95] gezeigt wird.

Bevor als nächstes die hier gewonnene Theorie über vollkommene Monopolyide für α-vollkommene Monopolyide verallgemeinert wird, noch ein kurzes Abschweifen zu den freien Monopolyiden, die im Bezug auf freie X-Kategorien von Bedeutung sind. Eine wesentliche Rolle dabei spielen die sogenannten freien Bestimmendensysteme, die in sehr engem Zusammenhang zu den vollkommenen Erzeugendensystemen stehen.

Definition 2.5.10:

Ist $(M_1,\times,\circ_{D_1})$ ein Monopolyid, dann heißt eine Menge $M_1'\subseteq M_1$ ein **freies Bestimmendensystem** von $(M_1,\times,\circ_{D_1})$, wenn für jedes Monopolyid $(M_2,+,\cdot_{D_2})$ und jeden Monoiden-Homomorphismus $\phi_1:(1_{M_1},\times)\to(1_{M_2},+)$ jede Abbildung $\phi':M_1'\to M_2$ mit den Eigenschaften

(F1) $(f,g)\in D_1\cap M_1'xM_1' \Rightarrow (\phi'(f),\phi'(g))\in D_2$

(F3) $f\in M_1' \Rightarrow 1_{l2}(\phi'(f))=\phi_1(1_{l1}(f))$ und $1_{r2}(\phi'(f))=\phi_1(1_{r1}(f))$

zu genau einem Monopolyiden-Homomorphismus $\phi:(M_1,\times,\circ_{D_1})\to(M_2,+,\cdot_{D_2})$ so fortgesetzt werden kann, daß die Restriktion von ϕ auf 1_{M_1} identisch zu ϕ_1 ist. Besitzt ein Monopolyid ein freies Bestimmendensystem, so heißt es ein **freies Monopolyid.** Ist ein freies Bestimmendensystem gleichzeitig auch ein Erzeugendensystem, so heißt es ein **freies Erzeugendensystem.**

Bei dieser Definition scheint es, als könnte man die Abbildungen ϕ_1 und ϕ' fast unabhängig voneinander wählen. Tatsächlich ist es aber so, daß zu fast allen Abbildungen ϕ_1 keine Abbildung ϕ' existiert, die die Bedingung (F3) erfüllen könnte.

Der oben erwähnte Zusammenhang zwischen vollkommenen Erzeugendensystemen und freien Erzeugendensystemen ist nun folgender:

Satz 2.5.12:

$M'\backslash 1_M$ ist genau dann ein freies Bestimmendensystem des Monopolyids $(M,\times,\circ_D)$, wenn $M'\cup 1_M$ ein vollkommenes Erzeugendensystem von $(M,\times,\circ_D)$ ist.

Beweis:

Nachfolgend wird $(M_2,+,\cdot_{D_2})$ als ein weiteres Monopolyid vorausgesetzt.

"$\Rightarrow$" Sei $M'':=M'\backslash 1_M$ ein freies Bestimmendensystem, $M''':=M'\cup 1_M$ und $\phi''':M'''\to M_2$ eine übertragbare Abbildung, dann erfüllt ϕ''' nach Satz 2.3.16 die Bedingungen (F0) und (F1) von Satz und Definition 2.3.8. Nach Hilfssatz 2.3.10 erfüllt ϕ''' auch die Bedingung (F2). Definiere $\phi'':=\phi'''|_{M''}$ und $\phi_1:=\phi'''|_{1_M}$, dann erfüllt ϕ'' die Bedingungen (F1) und (F3). Da 1_M und 1_{M_2} nach Satz 2.1.16 (bzgl. "$\times$") Monoide sind, ist ϕ_1 mit (F0) ein Monoiden-Homomorphismus. $\Rightarrow\exists$ genau eine Fortsetzung ϕ von ϕ'', so daß ϕ ein Monopolyiden-Homomorphismus ist mit $\phi|_{1_M}=\phi_1$. $\Rightarrow$ ϕ ist die einzige Fortsetzung von ϕ''', so daß ϕ ein Monopolyiden-Homomorphismus, da $\phi'''=\phi_1\cup\phi''$ ist. $\Rightarrow$ M"' bzw. $M'\cup 1_M$ ist ein vollkommenes Erzeugendensystem.

"$\Leftarrow$" Sei $M''':=M'\cup 1_M$ ein vollkommenes Erzeugendensystem, $M'':=M'\backslash 1_M$, $\phi_1:(1_M,\times)\rightarrow(1_{M_2},+)$ ein Monoiden-Homomorphismus und $\phi'':M''\rightarrow M_2$ eine Abbildung mit den Eigenschaften (F1) und (F3). Definiere $\phi':=\phi_1\cup\phi''$, dann erfüllt ϕ' die Bedingungen (F0)-(F1) und ist nach Satz 2.3.16 eine übertragbare Abbildung. $\Rightarrow$ $\exists$ genau eine Fortsetzung ϕ von ϕ', so daß ϕ ein Monopolyiden-Homomorphismus ist. $\Rightarrow$ $\phi|_{1_M}=\phi_1$ und $\phi|_{M''}=\phi''$ $\Rightarrow$ ϕ ist die einzige Fortsetzung von ϕ' so, daß ϕ ein Monopolyiden-Homomorphismus ist mit $\phi|_{1_M}=\phi_1$. $\Rightarrow$ $M'''=M'\backslash 1_M$ ist ein freies Bestimmendensystem.

q.e.d.

Damit gilt trivialerweise folgender Satz:

Satz 2.5.14:

Jedes vollkommene Monopolyid ist auch ein freies Monopolyid.

Beweis:

Sei M' ein vollkommenes Erzeugendensystem des Monopolyids $(M,\times,\circ_D)$, dann ist $1_M\subseteq M'$. $\Rightarrow$ $M'=M'\cup 1_M$ ist ein vollkommenes Erzeugendensystem. $\Rightarrow$ $M'\backslash 1_M$ ist nach Satz 2.5.12 ein freies Bestimmendensystem von $(M,\times,\circ_D)$.

q.e.d.

2.6 Alpha-vollkommene Monopolyide

Bei α-vollkommenen Monopolyiden handelt es sich um eine Verallgemeinerung von vollkommenen Monopolyiden. Dabei wird nicht gefordert, daß alle übertragbaren Abbildungen zu genau einem Monopolyiden-Homomorphismus fortgesetzt werden können, sondern nur diejenigen übertragbaren Abbildungen, die eine bestimmte Menge α von Bedingungen erfüllen. Obwohl nachfolgend immer von einer ganz bestimmten Menge α (nämlich $\alpha=\{(\alpha1),(\alpha2)\}$) ausgegangen wird, gelten jedoch nachfolgende Definitionen und Sätze für beliebige solche Mengen von Bedingungen. Insbesondere gilt dies für $\alpha=\emptyset$. In diesem Fall erhält man die im letzten Abschnitt besprochenen vollkommenen Monopolyide. Es folgen also nun Verallgemeinerungen der Definitionen und Sätze des letzten Abschnitts.

Definition 2.6.16:

Sind $(M,\times,\circ_D)$ und $(M_2,+,\cdot_{D_2})$ zwei Monopolyide, $M'\subseteq M$ mit $1_M\subseteq M'$, dann heißt eine übertragbare Abbildung $\phi':M'\to M_2$ **α-übertragbar**, wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt:

(α1) Ist U ein echtes Untermonopolyid von M mit $1_M\subseteq U\subseteq M'$, so ist die Restriktion $\phi'|_U$ ein Monopolyiden-Homomorphismus.

(α2) $1_t,1_t',1_b,1_b'\in 1_M$, $f\in M'$, $p_1,p_2\in M'$ invertierbar und $1_t\times f\times 1_b = p_1\circ(1_t'\times f\times 1_b')\circ p_2^{-1} \Rightarrow \phi'(1_t)+\phi'(f)+\phi'(1_b) = \phi'(p_1)\cdot(\phi'(1_t')+\phi'(f)+\phi'(1_b'))\cdot\phi'(p_2^{-1})$.

Ist $M'\neq M$, so ist in der Bedingung (α1) die Forderung "U ist ein echtes Untermonopolyid von M" überflüssig, da $U\subseteq M'$. Ist jedoch $M'=M$ und man läßt diese Forderung weg, so würde in nachfolgender Definition aus jedem Monopolyid ein α-vollkommenes Monopolyid. Dies wird durch diese zusätzliche Forderung verhindert.

Definition 2.6.18:

Ist $(M,\times,\circ_D)$ ein Monopolyid, dann heißt eine Menge $M'\subseteq M$ mit $1_M\subseteq M'$ ein **α-vollkommenes Erzeugendensystem** von $(M,\times,\circ_D)$, wenn für jedes Monopolyid $(M_2,+,\cdot_{D_2})$ jede α-übertragbare Abbildung $\phi':M'\to M_2$ zu genau einem Monopolyiden-Homomorphismus $\phi:(M,\times,\circ_D)\to(M_2,+,\cdot_{D_2})$ fortgesetzt werden kann (d.h. $\phi|_{M'}=\phi'$). Besitzt ein Monopolyid ein α-vollkommenes Erzeugendensystem, so heißt es ein **α-vollkommenes Monopolyid**.

Der nächste Satz zeigt, daß ein α-vollkommenes Erzeugendensystem notwendigerweise immer auch ein Erzeugendensystem im Sinne von Satz und Definition 2.1.26 sein muß. Damit wird nachträglich die Bezeichnung "(α-vollkommenes) Erzeugendensystem" gerechtfertigt.

Satz 2.6.20:

Ist M' ein α-vollkommenes Erzeugendensystem eines Monopolyids $(M,\times,\circ_D)$, dann ist $<M'>_M=M$.

Beweis:

Da $M":=<M'>_M\subseteq M$ ist, ist die Inklusion $Id_{M"}:M"\rightarrow M$ ein injektiver Monopolyiden-Homomorphismus. Andererseits erfüllt auch die identische Abbildung $Id_{M'}:M'\rightarrow M'\subseteq M"\subseteq M$ eine α-übertragbare Abbildung. $\Rightarrow$ Es gibt je genau eine homomorphe Fortsetzung $\phi_{M"}:M\rightarrow<M'>$ und $\phi:M\rightarrow M$ von $Id_{M'}$, da nach Voraussetzung M' ein vollkommenes Erzeugendensystem von $(M,\times,\circ_D)$ ist. Da sowohl die Hintereinanderausführung $Id_{M"}o\phi_{M"}:M\rightarrow<M'>_M\rightarrow M$ als auch $Id_M:M\rightarrow M$ homomorphe Fortsetzungen von $Id_{M'}$ sind, ist $Id_{M"}o\phi_{M"}=Id_M$. Damit ist $Id_{M"}$ auch surjektiv. $\Rightarrow$ $<M'>_M=M$.

q.e.d.

Bevor nachfolgend für α-vollkommene Monopolyide ein geeignetes Kriterium angegeben werden kann, ist noch eine weitere Definition notwendig.

Definition 2.6.22:

Ist $(M,\times,\circ_D)$ ein Monopolyid, $M'\subseteq M$ mit $1_M\subseteq M'$ und ρ eine symmetrische Substitutionsmenge von S(M,M'), dann heißt ρ eine **α-vollkommene Substitutionsmenge von S(M,M')**, wenn jede α-übertragbare Abbildung $\phi':M'\rightarrow M_2$ in ein Monopolyid $(M_2,^+,\cdot_{D_2})$ auf ρ äquivalenzerhaltend ist. Ist ρ darüber hinaus eine Substitutionsbasis von S(M,M'), dann heißt ρ eine **α-vollkommene Substitutionsbasis von S(M,M')**.

Das Kriterium für α-vollkommene Monopolyide lautet damit:

Satz 2.6.24:

Ist $(M,\times,\circ_D)$ ein Monopolyid, $M'\subseteq M$ ein Erzeugendensystem von $(M,\times,\circ_D)$ mit $1_M\subseteq M'$ und ρ eine α-vollkommene Substitutionsbasis von $S(M,M')$, dann ist M' ein α-vollkommenes Erzeugendensystem und $(M,\times,\circ_D)$ ein α-vollkommenes Monopolyid.

Beweis:

Sei $(M_2,+,\cdot_{D_2})$ ein Monopolyid und $\phi':M'\rightarrow M_2$ eine α-übertragbare Abbildung, dann ist ϕ' auf ρ äquivalenzerhaltend, da eine α-vollkommene Substitutionsbasis von $S(M,M')$ ist. $\Rightarrow$ ϕ' läßt sich nach Satz 2.4.16 zu genau einem Monopolyiden-Homomorphismus
$\phi:M\rightarrow M_2$ fortsetzen. $\Rightarrow$ M' ist ein α-vollkommenes Erzeugendensystem von $(M,\times,\circ_D)$. $\Rightarrow$ $(M,\times,\circ_D)$ ist ein α-vollkommenes Monopolyid.

q.e.d.

Obwohl man auf den ersten Blick vermuten möchte, daß es unwahrscheinlich ist, daß Monopolyide mit einer vollkommenen bzw. α-vollkommenen Substitutionsbasis existieren, trifft dies dennoch zu. So wird zum Beispiel in [HÜB95] ein solches Monopolyid vorgestellt. Um den Beweis dazu zu erleichtern wird im nächsten Abschnitt auf einige spezielle symmetrische Substitutionsmengen genauer eingegangen. Im übernächsten Abschnitt wird schließlich ein geeignetes Kriterium für vollkommene bzw. α-vollkommene Substitutionsbasen angegeben.

2.7 Spezielle symmetrische Substitutionsmengen

Will man zeigen, daß eine bestimmte, übertragbare bzw. α-übertragbare Abbildung ϕ' auf einer Substitutionsbasis ρ von S(M,M') äquivalenzerhaltend ist, so kann man ρ in mehrere (disjunkte) symmetrische Substitutionsmengen von S(M,M') zerlegen und den Beweis für jede Teilmenge getrennt führen. Aus diesem Grund ist es nützlich gerade solche Teilmengen von ρ zu kennen, die eine vollkommene bzw. α-vollkommene Substitutionsmenge definieren. Unter anderem zu diesem Zweck werden nun einige solcher vollkommener Substitutionsmengen vorgestellt.

Definition 2.7.2:

Ist $(M,\times,\circ_D)$ ein Monopolyid, $M'\subseteq M$ mit $1_M\subseteq M'$ und $S,S',S''\in S(M,M')$ mit
$S=\begin{pmatrix}1_{t1} & 1_{t2}\\ f_1 & f_2\\ 1_{b1} & 1_{b2}\end{pmatrix}$, $S'=\begin{pmatrix}1_{t1}\\ f_1\\ 1_{b1}\end{pmatrix}$ und $S''=\begin{pmatrix}1_{t2}\\ f_2\\ 1_{b2}\end{pmatrix}$, dann heißt das Paar (S,S') bzw. (S',S) eine **Rechtskürzung** bzw. **Rechtserweiterung in S(M,M')**, wenn $f_2\in 1_M$ ist. Umgekehrt heißt das Paar (S,S") bzw. (S",S) eine **Linkskürzung** bzw. **Linkserweiterung in S(M,M')**, wenn $f_1\in 1_M$ ist.

Die Bezeichnungen in obiger Definition sind ein Hinweis darauf, daß die Werte von $\omega_M(S)$, $\omega_M(S')$ und $\omega_M(S'')$ entsprechend durch Kürzen bzw. Erweitern ineinander überführt werden können, wie aus dem Beweis zu nachfolgendem Satz ersehen werden kann.

Satz 2.7.4:

Ist $(M,\times,\circ_D)$ ein Monopolyid, $M'\subseteq M$ mit $1_M\subseteq M'$, dann ist die Menge $\boldsymbol{\rho_X(M')}$ aller Rechts- und Linkskürzungen bzw. -erweiterungen in S(M,M') eine vollkommene Substitutionsmenge von S(M,M').

Beweis:

Seien $S,S',S''\in S(M,M')$ wie oben definiert und (S,S') eine Rechtskürzung. $\Rightarrow$ $f_2\in 1_M$ $\Rightarrow$ $(1_{t2}\times f_2\times 1_{b2})\in 1_M$ $\Rightarrow$ $\omega_M(S)=(1_{t1}\times f_1\times 1_{b1})\circ(1_{t2}\times f_2\times 1_{b2})=1_{t1}\times f_1\times 1_{b1}=\omega_M(S')$ $\Leftrightarrow$ $S\sim S'$.
Sei weiter $(M_2,+,\cdot_{D_2})$ ein Monopolyid und $\phi':M'\to M_2$ eine übertragbare Abbildung, dann erfüllt ϕ' nach Satz 2.3.16 die Bedingung (F0) aus Satz und Definition 2.3.8. $\Rightarrow$ $\phi'(1_{t2}),\phi'(f_2)$, $\phi'(1_{b2})\in 1_{M_2}$ $\Rightarrow$ $\phi'(1_{t2})+\phi'(f_2)+\phi'(1_{b2})\in 1_{M_2}$ $\Rightarrow$ $\omega_{M_2}(\overline{\phi'}(S))$ =

$(\phi'(1_{t1})+\phi'(f_1)+\phi'(1_{b1}))\cdot(\phi'(1_{t2})+\phi'(f_2)+\phi'(1_{b2})) =$
$\phi'(1_{t1})+\phi'(f_1)+\phi'(1_{b1}) = \omega_{M_2}(\overline{\phi'}(S')) \Leftrightarrow \overline{\phi'}(S)\sim\overline{\phi'}(S')$.
Analog kann gezeigt werden, daß $S\sim S'$ und $\overline{\phi'}(S)\sim\overline{\phi'}(S')$ auch dann gelten, wenn eine Linkskürzung oder eine Rechts- bzw. Linkserweiterung vorliegt. Da obige Definition symmetrisch abgefaßt ist, ist leicht einzusehen, daß $\rho_X(M')$ eine symmetrische Substitutionsmenge von $S(M,M')$ ist und jede übertragbare Abbildung auf $\rho_X(M')$ äquivalenzerhaltend ist. $\Rightarrow$ $\rho_X(M')$ ist eine vollkommene Substitutionsmenge von $S(M,M')$.

q.e.d.

Satz 2.7.6:

Ist $(M,\times,\circ_D)$ ein Monopolyid, $M'\subseteq M$ mit $1_M\subseteq M'$, $S\in S(M,M')$ mit $\mathrm{Kern}(S)\subseteq 1_M$, dann ist S bzgl. $\rho_X(M')$ überführbar in $S':=\begin{pmatrix}0\\ \omega_M(S)\\ 0\end{pmatrix}$.

Beweis:

Sei $\rho_X:=\rho_X(M')$. Führe den Beweis über Induktion nach der Länge $L(S)$.
$\mathrm{Kern}(S)\subseteq 1_M \Rightarrow \omega_M(S)\in 1_M \Rightarrow 1_r(\omega_M(S))=\omega_M(S)=1_l(\omega_M(S')) \Rightarrow$ $\omega_M(S)\circ\omega_M(S')$ ist definiert. $\Rightarrow$ Nach Satz 1.3.6 (5) ist $S\circ S'$ definiert.
Induktionsanfang: Sei $L(S)=1$: $\Rightarrow$ $(S,S\circ S')$ ist nach Definition 2.7.2 eine Rechtserweiterung und $(S\circ S',S')$ eine Linkskürzung, da $\mathrm{Kern}(S)\subseteq 1_M$. $\Rightarrow$ $(S,S\circ S'),(S\circ S',S')\in\rho_X \Rightarrow S\rightarrow_{\rho_x} S\circ S'$ und $S\circ S'\rightarrow_{\rho_x} S'$ nach Definition 2.4.6 (a). $\Rightarrow$ $S\rightarrow_{\rho_x} S'$ nach Satz 2.4.10 (c).
Induktionsschritt: Sei $L(S)=n+1$. Definiere $S'':=S^{(1)}\circ\ldots\circ S^{(n)}$, dann ist $S''\circ S^{(n+1)}=S$ und nach Satz 2.2.12 $\omega_M(S'')\circ\omega_M(S^{(n+1)})=\omega_M(S)$. Wegen $\mathrm{Kern}(S^{(n+1)})\subseteq 1_M$ ist $\omega_M(S^{(n+1)})\in 1_M$. $\Rightarrow$ $\omega_M(S'')=\omega_M(S'')\circ\omega_M(S^{(n+1)})=\omega_M(S)$. Ist S' wie oben definiert, so ist nach Induktionsvoraussetzung $S''\rightarrow_{\rho_x} S'$. $\Rightarrow$ $S=S''\circ S^{(n+1)}\rightarrow_{\rho_x} S'\circ S^{(n+1)}$ nach Satz 2.4.10 (d). Nach Definition 2.7.2 ist $(S'\circ S^{(n+1)},S')$ eine Rechtskürzung. $\Rightarrow$ $(S'\circ S^{(n+1)},S')\in\rho_X$ $\Rightarrow$ $S'\circ S^{(n+1)}\rightarrow_{\rho_x} S'$ nach Definition 2.4.6 (a). $\Rightarrow$ $S\rightarrow_{\rho_x} S'\circ S^{(n+1)}\rightarrow_{\rho_x} S'$, d.h $S\rightarrow_{\rho_x} S'$.

q.e.d.

Definition 2.7.8:

Ist $(M,\times,\circ_D)$ ein Monopolyid, $M'\subseteq M$ mit $1_M\subseteq M'$ und $S,S'\in S(M,M')$ mit $S=\begin{pmatrix}1_{t1} & 1_{t2}\\ f_1 & f_2\\ 1_{b1} & 1_{b2}\end{pmatrix}$ und $S'=\begin{pmatrix}1_{t1}' & 1_{t2}'\\ f_2 & f_1\\ 1_{b1}' & 1_{b2}'\end{pmatrix}$, dann heißt das Paar (S,S') eine **Vertauschung in S(M,M')**, wenn (a) oder (b) gilt:

(a) $1_{t1}'=1_{t2}$, $1_{b2}'=1_{b1}$ und es existiert ein $1_m \in 1_M$ mit der Eigenschaft $1_{t1}=1_{t2} \times 1_l(f_2) \times 1_m$, $1_{b2}=1_m \times 1_r(f_1) \times 1_{b1}$, $1_{t2}'=1_{t2} \times 1_r(f_2) \times 1_m$ und $1_{b1}'=1_m \times 1_l(f_1) \times 1_{b1}$.

(b) $1_{t2}'=1_{t1}$, $1_{b1}'=1_{b2}$ und es existiert ein $1_m \in 1_M$ mit der Eigenschaft $1_{t2}=1_{t1} \times 1_r(f_1) \times 1_m$, $1_{b1}=1_m \times 1_l(f_2) \times 1_{b2}$, $1_{t1}'=1_{t1} \times 1_l(f_1) \times 1_m$ und $1_{b2}'=1_m \times 1_r(f_2) \times 1_{b2}$.

Die im Fall (a) bzw. (b) angegebenen Gleichungen können etwas anschaulicher in Matrizenform dargestellt werden, in dem man fordert:

$$S=\begin{pmatrix} 1_{t2} \times 1_l(f_2)\ 1_m & 1_{t2} \\ f_1 & f_2 \\ 1_{b1} & 1_m \times 1_r(f_1)\ 1_{b1} \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$S'=\begin{pmatrix} 1_{t2} & 1_{t2} \times 1_r(f_2)\ 1_m \\ f_2 & f_1 \\ 1_m \times 1_l(f_1)\ 1_{b1} & 1_{b1} \end{pmatrix}$$

bzw.

$$S=\begin{pmatrix} 1_{t1} & 1_{t1} \times 1_r(f_1)\ 1_m \\ f_1 & f_2 \\ 1_m \times 1_l(f_2)\ 1_{b2} & 1_{b2} \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$S'=\begin{pmatrix} 1_{t1} \times 1_l(f_1)\ 1_m & 1_{t1} \\ f_2 & f_1 \\ 1_{b2} & 1_m \times 1_r(f_2)\ 1_{b2} \end{pmatrix}.$$

Die Bedingungen der Eigenschaft (a) bzw. (b) scheinen zunächst absolut willkürlich gewählt zu sein. Tatsächlich aber garantieren sie, daß unter ausschließlicher Anwendung der Monopolyid-Axiome $S \sim S'$ und $\overline{\phi}'(S) \sim \overline{\phi}'(S')$ folgt, wie im Beweis zu folgendem Satz gezeigt wird.

Satz 2.7.10:

Ist $(M,\times,\circ_D)$ ein Monopolyid, $M' \subseteq M$ mit $1_M \subseteq M'$, dann ist die Menge $\boldsymbol{\rho_V(M')}$ aller Vertauschungen in $S(M,M')$ eine vollkommene Substitutionsmenge von $S(M,M')$.

Beweis:

Seien (S,S') eine Vertauschung in S(M,M') und S bzw. S' wie in obiger Definition gegeben, dann gilt mit Satz 2.1.6 (2) im Fall (a):

$\omega_M(S)=(1_{t1}\times f_1\times 1_{b1})\circ(1_{t2}\times f_2\times 1_{b2})=$
$((1_{t2}\times 1_l(f_2)\times 1_m)\times f_1\times 1_{b1})\circ(1_{t2}\times f_2\times(1_m\times 1_r(f_1)\times 1_{b1}))=$
$((1_{t2}\times 1_l(f_2)\times 1_m)\times(f_1\times 1_{b1}))\circ((1_{t2}\times f_2\times 1_m)\times(1_r(f_1)\times 1_{b1}))=$
$(1_l(1_{t2}\times f_2\times 1_m)\times(f_1\times 1_{b1}))\circ((1_{t2}\times f_2\times 1_m)\times 1_r(f_1\times 1_{b1}))=$ mit (2)
$((1_{t2}\times f_2\times 1_m)\times 1_l(f_1\times 1_{b1}))\circ(1_r(1_{t2}\times f_2\times 1_m)\times(f_1\times 1_{b1}))=$
$((1_{t2}\times f_2\times 1_m)\times(1_l(f_1)\times 1_{b1}))\circ((1_{t2}\times 1_r(f_2)\times 1_m)\times(f_1\times 1_{b1}))=$
$(1_{t2}\times f_2\times(1_m\times 1_l(f_1)\times 1_{b1}))\circ((1_{t2}\times 1_r(f_2)\times 1_m)\times f_1\times 1_{b1})=$
$(1_{t1}'\times f_2\times 1_{b1}')\circ(1_{t2}'\times f_1\times 1_{b2}')=\omega_M(S') \Leftrightarrow S\sim S'$.
Im Fall (b) folgt analog zu Fall (a) $S\sim S'$.

Ist (S,S') eine Vertauschung und liegt der Fall (a) vor und es werden in obigen Formeln f_1 und f_2 vertauscht, sowie 1_{t2} bzw. 1_{b1} durch $1_{t1}'$ bzw. $1_{b2}'$ ersetzt, so ist leicht ersichtlich, daß der Fall (b) vorliegt, wenn die Rolle von S und S' vertauscht wird. Da die entsprechend analoge Aussage auch für den Fall (b) gilt, ist also (S,S') genau dann eine Vertauschung von S(M,M'), wenn auch (S',S) eine Vertauschung von S(M,M') ist. Damit ist $\rho_V(M')$ eine symmetrische Substitutionsmenge von S(M,M').

Sei $(M_2,{}^+,\cdot_{D_2})$ ein Monopolyid und $\phi':M'\to M_2$ eine übertragbare Abbildung, dann ist $\phi'(1_m)\in 1_{M_2}$ und es gilt im Fall (a):

$$\overline{\phi'}(S)=\begin{pmatrix}\phi'(1_{t2}\times 1_l(f_2)\times 1_m) & \phi'(1_{t2})\\ \phi'(f_1) & \phi'(f_2)\\ \phi'(1_{b1}) & \phi'(1_m\times 1_r(f_1)\times 1_{b1})\end{pmatrix} \text{ und}$$

$$\overline{\phi'}(S')=\begin{pmatrix}\phi'(1_{t2}) & \phi'(1_{t2}\times 1_r(f_2)\ 1_m)\\ \phi'(f_2) & \phi'(f_1)\\ \phi'(1_m\times 1_l(f_1)\ 1_{b1}) & \phi'(1_{b1})\end{pmatrix}.$$

Da ϕ' nach Satz 2.3.16 bzw. Hilfssatz 2.3.10 die Bedingungen (F0)-(F2) erfüllt, können alle zusammengesetzten Koeffizienten der Form $\phi'(1_u\times 1_l(f)\times 1_v)$ bzw. $\phi'(1_u\times 1_r(f)\times 1_v)$ umgeformt werden zu: $\phi'(1_u\times 1_l(f)\times 1_v) = \phi'(1_u)+\phi'(1_l(f))+\phi'(1_v) =$
$\phi'(1_u)+1_{l2}(\phi'(f))+\phi'(1_v)$ bzw. $\phi'(1_u\times 1_r(f)\times 1_v) =$
$\phi'(1_u)+1_{r2}(\phi'(f))+\phi'(1_v)$.
Werden diese Terme in obigen Matrizen entsprechend ersetzt, so folgt in vollkommen analoger Form wie für S und S': $\omega_{M_2}(\overline{\phi'}(S))=\omega_{M_2}(\overline{\phi'}(S')) \Rightarrow \overline{\phi'}(S)\sim\overline{\phi'}(S')$.
Da dies in analoger Weise auch für den Fall (b) gilt, ist also $\rho_V(M')$ eine vollkommene Substitutionsmenge von S(M,M')

q.e.d.

Definition 2.7.12:

Ist $(M,\times,\circ_D)$ ein Monopolyid, $M'\subseteq M$ mit $1_M\subseteq M'$, $S,S'\in S(M,M')$ und existiert ein echtes Untermonopolyid U von M mit $1_M\subseteq U\subseteq M'$, $\mathrm{Kern}(S)\subseteq U$ und $S'=\begin{pmatrix}0\\ \omega(S)\\ 0\end{pmatrix}$, dann heißt das Paar (S,S') eine **Verschmelzung in S(M,M')**. Analog heißt das Paar (S',S) eine **Zerlegung in S(M,M')**.

Satz 2.7.14:

Ist $(M,\times,\circ_D)$ ein Monopolyid und $M'\subseteq M$ mit $1_M\subseteq M'$, dann ist die Menge $\boldsymbol{\rho_Z(M')}$ aller Zerlegungen und Verschmelzungen in $S(M,M')$ eine α-vollkommene Substitutionsmenge von $S(M,M')$.

Beweis:

Sei (S,S') eine Verschmelzung und S bzw. S' wie in obiger Definition gegeben. $\Rightarrow$ $\omega_M(S)=0\times\omega_M(S)\times 0=\omega_M(S')$ $\Leftrightarrow$ $S\sim S'$. Da mit (S,S') auch (S',S) Element von $\rho_Z(M')$ ist, ist $\rho_Z(M')$ eine symmetrische Substitutionsmenge.
Sei $(M_2,+,\cdot_{D_2})$ ein Monopolyid und $\phi':M'\to M_2$ eine α-übertragbare Abbildung, dann ist wegen $(\alpha 1)$ die Restriktion $\phi'|_U$ ein Monopolyiden-Homomorphismus. Da $\mathrm{Kern}(S)\subseteq U$ $\Rightarrow$ $\omega_M(S)\in U$ $\Rightarrow$ $\mathrm{Kern}(S')\subseteq U$ $\Rightarrow$ $S,S'\in S(M,U)$. Mit Satz 2.3.18 folgt deshalb:
$\omega_{M_2}(\overline{\phi'}(S))=\phi'(\omega_M(S))=\phi'(\omega_M(S'))=\omega_{M_2}(\overline{\phi'}(S'))$ $\Leftrightarrow$ $\overline{\phi'}(S)\sim\overline{\phi'}(S')$. Analog gilt dies auch, wenn (S,S') eine Zerlegung ist. $\Rightarrow$ $\rho_Z(M')$ ist eine α-vollkommene Substitutionsmenge von $S(M,M')$.

q.e.d.

Satz 2.7.16:

Ist $(M,\times,\circ_D)$ ein Monopolyid, $M'\subseteq M$ mit $1_M\subseteq M'$ und 1_M das einzige echte Untermonopolyid U von M mit $1_M\subseteq U\subseteq M'$, dann ist die Menge $\rho_Z(M')$ aller Zerlegungen und Verschmelzungen in $S(M,M')$ eine vollkommene Substitutionsmenge von $S(M,M')$.

Beweis:

Sei (S,S') eine Verschmelzung und S bzw. S' wie in obiger Definition gegeben. $\Rightarrow$ $\omega_M(S)=0\times\omega_M(S)\times 0=\omega_M(S')$ $\Leftrightarrow$ $S\sim S'$. Da mit (S,S') auch (S',S) Element von $\rho_Z(M')$ ist, ist $\rho_Z(M')$ eine symmetrische Substitutionsmenge.
Sei $(M_2,+,\cdot_{D_2})$ ein Monopolyid und $\phi':M'\to M_2$ eine übertragbare Abbildung, dann erfüllt ϕ' nach Satz 2.3.16 die Bedingung (F0) aus Satz und Definition 2.3.8. Damit ist die Restriktion $\phi'|_{1_M}$ ein Monopolyiden-Homomorphismus. Da (S,S') eine Verschmelzung

ist, existiert ein echtes Untermonopolyid U von M mit $1_M \subseteq U \subseteq M'$ und $Kern(S) \subseteq U \Rightarrow \omega_M(S) \in U \Rightarrow Kern(S') \subseteq U \Rightarrow S,S' \in S(M,U)$. Nach Voraussetzung ist $U=1_M$. Deshalb folgt mit Satz 2.3.18 :
$\omega_{M_2}(\overline{\phi'}(S))=\phi'(\omega_M(S))=\phi'(\omega_M(S'))=\omega_{M_2}(\overline{\phi'}(S')) \Leftrightarrow \overline{\phi'}(S)\sim\overline{\phi'}(S')$. Analog gilt dies auch, wenn (S,S') eine Zerlegung ist. $\Rightarrow$ $\rho_Z(M')$ ist eine vollkommene Substitutionsmenge von S(M,M').

q.e.d.

Definition 2.7.18:

Ist $(M,\times,\circ_D)$ ein Monopolyid, $M' \subseteq M$ mit $M^{-1} \subseteq M'$ und $S,S' \in S(M,M')$, dann heißt das Paar (S,S') eine **Überbrückung in S(M,M')**, wenn (a) oder (b) gilt:

(a)

$$S=\begin{pmatrix} 0 & 1_{t2} \\ g_1 & f \\ 0 & 1_{b2} \end{pmatrix},\quad S'=\begin{pmatrix} 1_{t1} & 0 \\ f & g_2 \\ 1_{b1} & 0 \end{pmatrix},$$ und g_1 und g_2 sind invertierbar mit $g_1 \circ (1_{t2} \times f \times 1_{b2}) = (1_{t1} \times f \times 1_{b1}) \circ g_2$.

(b)

$$S=\begin{pmatrix} 1_{t1} & 0 \\ f & g_2 \\ 1_{b1} & 0 \end{pmatrix} \text{ und } S'=\begin{pmatrix} 0 & 1_{t2} \\ g_1 & f \\ 0 & 1_{b2} \end{pmatrix},$$ und g_1 und g_2 sind invertierbar mit $(1_{t1} \times f \times 1_{b1}) \circ g_2 = g_1 \circ (1_{t2} \times f \times 1_{b2})$.

Satz 2.7.20:

Ist $(M,\times,\circ_D)$ ein Monopolyid, $M' \subseteq M$ mit $M^{-1} \subseteq M'$, dann ist die Menge $\boldsymbol{\rho_B(M')}$ aller Überbrückungen in S(M,M') eine α-vollkommene Substitutionsmenge von S(M,M').

Beweis:

Sei $(S,S') \in \rho_B(M')$ und S bzw. S' wie in obiger Definition gegeben, dann gilt im Fall (a): $\omega_M(S)=g_1 \circ (1_{t2} \times f \times 1_{b2}) = (1_{t1} \times f \times 1_{b1}) \circ g_2 = \omega_M(S') \Leftrightarrow S \sim S'$. Analog gilt dies auch im Fall (b). Da beide Fälle symmetrisch zueinander formuliert sind, folgt: $(S,S') \in \rho_B(M') \Leftrightarrow (S',S) \in \rho_B(M')$. Damit ist $\rho_B(M')$ eine symmetrische Substitutionsmenge.
Sei $(M_2,+,\cdot_{D_2})$ ein Monopolyid und $\phi':M' \to M_2$ eine α-übertragbare Abbildung. Im Fall (a) ist $g_1 \circ (1_{t2} \times f \times 1_{b2}) = (1_{t1} \times f \times 1_{b1}) \circ g_2$. $\Rightarrow$
$1_{t2} \times f \times 1_{b2} = g_1^{-1} \circ (1_{t1} \times f \times 1_{b1}) \circ g_2$. $\Rightarrow$ $\phi'(1_{t2}) + \phi'(f) + \phi'(1_{b2}) =$
$\phi'(g_1^{-1}) \cdot (\phi'(1_{t1}) + \phi'(f) + \phi'(1_{b1})) \cdot \phi'(g_2)$ wegen (α2). $\Rightarrow$
$\phi'(g_1^{-1})^{-1} \cdot (\phi'(1_{t2}) + \phi'(f) + \phi'(1_{b2})) = (\phi'(1_{t1}) + \phi'(f) + \phi'(1_{b1})) \cdot \phi'(g_2)$.
Da M^{-1} nach Satz 2.1.18 ein Untermonopolyid von M ist mit

$1_M \subseteq M^{-1}$, ist mit (α1) und Satz 1.3.30 (e) $\phi'(g_1{}^{-1})=\phi'(g_1)^{-1}$. $\Rightarrow$
$\phi'(g_1{}^{-1})^{-1}=\phi'(g_1) \Rightarrow \phi'(g_1{}^{-1})^{-1}\cdot(\phi'(1_{t2})+\phi'(f)+\phi'(1_{b2}))=$
$\phi'(g_1)\cdot(\phi'(1_{t2})+\phi'(f)+\phi'(1_{b2})) = (\phi'(1_{t1})+\phi'(f)+\phi'(1_{b1}))\cdot\phi'(g_2)$. $\Rightarrow$
$\omega_{M_2}(\overline{\phi'}(S)) = \phi'(g_1)\cdot(\phi'(1_{t2})+\phi'(f)+\phi'(1_{b2})) =$
$(\phi'(1_{t1})+\phi'(f)+\phi'(1_{b1}))\cdot\phi'(g_2) = \omega_{M_2}(\overline{\phi'}(S')) \Leftrightarrow \overline{\phi'}(S)\sim\overline{\phi'}(S')$.
Da dies analog auch im Fall (b) gilt, ist $\rho_B(M')$ eine α-vollkommene Substitutionsmenge von S(M,M').

q.e.d.

2.8 Natürliche Monopolyide

Definition 2.8.2:

Ein Monopolyid $(M,\times,\circ_D)$ heißt genau dann ein **natürliches Monopolyid**, wenn ein nicht-trivialer Monopolyiden-Homomorphismus $\|\ \|:(M,\times,\circ_D)\to(\mathbb{N}_0,+,+)$ existiert.

Würde in obiger Definition nicht ein <u>nicht-trivialer</u> Monopolyiden-Homomorphismus gefordert werden, so wäre jedes Monopolyid ein natürliches Monopolyid, da $\|\ \|:(M,\times,\circ_D)\to(\mathbb{N}_0,+,+)$ mit $\|f\|=0\ \forall\ f\in M$ stets ein Monopolyiden-Homomorphismus ist. Diese Bedingung führt andererseits aber auch dazu, daß ein Untermonopolyid eines natürlichen Monopolyids nicht unbedingt auch ein natürliches Monopolyid sein muß, da ein Monopolyiden-Homomorphismus $\|\ \|:(M,\times,\circ_D)\to(\mathbb{N}_0,+,+)$ Identitäten auf Identitäten und damit alle Elemente des Untermonopolyids 1_M auf die 0 abbildet.

Kann zu einem Monopolyid nicht explizit ein nicht-trivialer Monopolyiden-Homomorphismus angegeben werden, so ist es im allgemeinen schwierig nachzuweisen, ob überhaupt ein solcher existiert. Dazu jedoch folgender einfacher Satz:

Satz 2.8.4:

Ist M' ein Erzeugendensystem des Monopolyids $(M,\times,\circ_D)$ mit der Eigenschaft:

(*) Zu jedem $f\in M'$ existiert ein $g\in M$ mit $f\times g\in 1_M$ oder $g\times f\in 1_M$ oder $f\circ g\in 1_M$ oder $g\circ f\in 1_M$.

So ist $(M,\times,\circ_D)$ kein natürliches Monopolyid. Insbesondere ist damit für jedes Monopolyid $(M,\times,\circ_D)$ das Untermonopolyid $(M^{-1},\times,\circ_D)$ kein natürliches Monopolyid.

Beweis:

Sei $\|\ \|:(M,\times,\circ_D)\to(\mathbb{N}_0,+,+)$ ein Monopolyiden-Homomorphismus. $\Rightarrow$ $\|\ \|$ bildet Identitäten auf Identitäten ab. $\Rightarrow$ $\|f\|=0\ \forall\ f\in 1_M$. Da zu jedem $f\in M'$ ein $g\in M$ existiert mit $f\times g\in 1_M$ oder $g\times f\in 1_M$ oder $f\circ g\in 1_M$ oder $g\circ f\in 1_M$ folgt: $0=\|f\times g\|=\|f\|+\|g\|$ oder $0=\|g\times f\|=\|g\|+\|f\|=\|f\|+\|g\|$ oder $0=\|f\circ g\|=\|f\|+\|g\|$ oder $0=\|g\circ f\|=\|g\|+\|f\|=\|f\|+\|g\|$. $\Rightarrow$ $\|f\|=\|g\|=0$ $\forall\ f\in M'$ $\Rightarrow$ $\|f\|=0\ \forall\ f\in\overline{M'}$.
Da M' ein Erzeugendensystem vom M ist, ist nach Satz 2.1.28 $M=\langle M'\rangle_M=\langle\overline{M'},\times,\circ\rangle_M$. Damit ist nach Hilfssatz 2.1.24 jedes $f\in M$ darstellbar in der Form: $f=\bigcirc_{i=1}^{n}(\times_{j=1}^{m_i} f_{ij})$ mit $f_{ij}\in\overline{M'}$. $\Rightarrow$

$\|f\|=\|\bigcirc_{i=1}^{n}(\times_{j=1}^{m_i} f_{ij})\|=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}\|f_{ij}\|=0$, da $\|\ \|$ ein Monopolyiden-Homomorphismus und $\|f_{ij}\|=0$ ist. $\Rightarrow$ $\|f\|=0\ \forall\ f\in M$. $\Rightarrow$ $(M,\times,\circ_D)$ ist kein natürliches Monopolyid.
Da M^{-1} selbst ein Erzeugendensystem von $(M^{-1},\times,\circ_D)$ mit obiger Eigenschaft ist, folgt die Behauptung.

q.e.d.

Nachfolgend gilt das besondere Interesse jedoch nicht den nicht-natürlichen, sondern den natürlichen Monopolyiden, da diese es ermöglichen "handsame" Kriterien für Substitutionsbasen festzulegen.

Der nachfolgende Satz zeigt, daß jeder nicht-triviale Monopolyiden-Homomorphismus $\|\ \|:(M,\times,\circ_D)\to(\mathbb{N}_0,+,+)$ ein echtes Untermonopolyid von M definiert.

Satz 2.8.6:

Ist $(M,\times,\circ_D)$ ein Monopolyid und $\|\ \|:(M,\times,\circ_D)\to(\mathbb{N}_0,+,+)$ ein Monopolyiden-Homomorphismus, dann ist $M^{\|0\|}:=\{f\in M\colon \|f\|=0\}$ ein Untermonopolyid von M mit $1_M\subseteq M^{-1}\subseteq M^{\|0\|}$. Ist darüber hinaus $\|\ \|$ ein nicht-trivialer Monopolyiden-Homomorphismus, so ist $M^{\|0\|}$ ein echtes Untermonopolyid von M.

Beweis:

Da $\|\ \|$ ein Monopolyiden-Homomorphismus ist, bildet er Identitäten auf Identitäten ab. $\Rightarrow$ $\|f\|=0\ \forall\ f\in 1_M$. $\Rightarrow$ $M^{\|0\|}$ ist eine Teilmenge von M mit Neutralelementen.
Sei $f,g\in M^{\|0\|}$. $\Rightarrow$ $\|f\times g\|=\|f\|+\|g\|=0+0=0$ $\Rightarrow$ $f\times g\in M^{\|0\|}$. Ist außerdem $f\circ g$ definiert, so ist analog $f\circ g\in M^{\|0\|}$. $\Rightarrow$ $M^{\|0\|}$ ist bzgl. "$\times$" und "$\circ$" abgeschlossen. $\Rightarrow$ $M^{\|0\|}$ ist ein Untermonopolyid von M.
Nach Satz 2.8.4 ist M^{-1} kein natürliches Monopolyid. $\Rightarrow$ $\|f\|=0\ \forall$ $f\in M^{-1}$ $\Rightarrow$ $f\in M^{\|0\|}$ $\Rightarrow$ $M^{-1}\subseteq M^{\|0\|}$. Nach Satz 2.1.18 ist $1_M\subseteq M^{-1}$.
Ist $\|\ \|$ ein nicht-trivialer Monopolyiden-Homomorphismus, so existiert ein $f\in M$ mit $\|f\|\neq 0$. $\Rightarrow$ $M^{\|0\|}\neq M$ $\Rightarrow$ $M^{\|0\|}$ ein echtes Untermonopolyid von M.

q.e.d.

Ausgehend von Satz 1.2.24 ist es möglich für Substitutionsbasen von natürlichen Monopolyiden "handsame" Kriterien angeben zu können. Folgender kleiner Hilfssatz liefert die Grundlage dazu.

Hilfssatz 2.8.8:

Ist $(M,\times,\circ_D)$ ein Monopolyid, $\|\ \|:(M,\times,\circ_D)\to(\mathbb{N}_0,+,+)$ ein Monopolyiden-Homomorphismus und $M'\subseteq M$ mit $1_M\subseteq M'$, dann ist $|\ |:(S(M,M'),\circ_{\mathcal{S}})\to(\mathbb{N}_0,+)$ mit $|\mathbf{S}|:=\|\omega_M(S)\|$ ein Homomorphismus (auf partiellen Halbgruppen).

Beweis:

Ist $S,S'\in S(M,M')$ und $S\circ S'$ definiert, dann ist stets auch $\|\omega_M(S)\|+\|\omega_M(S)\|$ definiert und mit Satz 2.2.12 $|S\circ S'|=\|\omega_M(S\circ S')\|=\|\omega_M(S)\circ\omega_M(S')\|=\|\omega_M(S)\|+\|\omega_M(S')\|=|S|+|S'|$. $\Rightarrow$ $|\ |$ ist ein Homomorphismus (auf partiellen Halbgruppen).

q.e.d.

Unter diesen Voraussetzungen kann nun Satz 1.2.24 für die hier vorliegenden Belange entscheidend aufbereitet werden.

Satz 2.8.10:

Ist $(M,\times,\circ_D)$ ein Monopolyid, $\|\ \|:(M,\times,\circ_D)\to(\mathbb{N}_0,+,+)$ ein Monopolyiden-Homomorphismus, $M'\subseteq M$ mit $1_M\subseteq M'$ und ρ eine symmetrische Substitutionsmenge von $S(M,M')$ mit den Eigenschaften:

(1) $S_1,S_2\in S(M,M')$, $\|\omega_M(S_1)\|\geq 1$ und $\omega_M(S_1)=\omega_M(S_2)$ $\Rightarrow$
$\exists$ $S_0',S_1',S_2'\in S(M,M')$ mit $\|\omega_M(S_0')\|\geq 1$, $\omega_M(S_1')=\omega_M(S_2')$, $S_1'\circ S_0'$ und $S_2'\circ S_0'$ sind definiert und $S_1 \rightarrow_\rho S_1'\circ S_0'$ sowie $S_2\rightarrow_\rho S_2'\circ S_0'$.

(2) $S_1,S_2\in S(M,M')$, $\|\omega_M(S_1)\|=0$ und $\omega_M(S_1)=\omega_M(S_2)$ $\Rightarrow$ $S_1\rightarrow_\rho S_2$.

So ist ρ eine Substitutionsbasis von $S(M,M')$.

Beweis:

Nach Hilfssatz 2.8.8 ist $|\ |:(S(M,M'),\circ_{\mathcal{S}})\to(\mathbb{N}_0,+)$ mit $|S|:=\|\omega_M(S)\|$ ein Homomorphismus (auf partiellen Halbgruppen). Zeige, daß $|\ |$ die Bedingungen (0)-(2) von Satz 1.2.24 erfüllt.

0) $S_1 \sim S_2 \Rightarrow \omega_M(S_1)=\omega_M(S_2) \Rightarrow \|\omega_M(S_1)\|=\|\omega_M(S_2)\| \Rightarrow |S_1|=|S_2|$.

1) Da $\omega_M(S)=\omega_M(S') \Leftrightarrow S\sim S'$ und $|S|=\|\omega_M(S)\|$ ist, gilt mit der gegeben Voraussetzung (1) für den Monopolyiden-Homomorphismus $\|\ \|$: $S_1,S_2 \in S(M,M')$, $|S_1|\geq 1$ und $S_1\sim S_2 \Rightarrow$ $\|\omega_M(S_1)\|\geq 1$ und $\omega_M(S_1)=\omega_M(S_2) \Rightarrow \exists\ S_0',S_1',S_2' \in S(M,M')$ mit $\|\omega_M(S_0')\|\geq 1$, $\omega_M(S_1')=\omega_M(S_2')$, $S_1'\circ S_0'$ und $S_2'\circ S_0'$ sind definiert und $S_1 \rightarrow_\rho S_1'\circ S_0'$ sowie $S_2 \rightarrow_\rho S_2'\circ S_0'$. $\Rightarrow$ $\exists\ S_0',S_1',S_2' \in S(M,M')$ mit $|S_0'|=\|\omega_M(S_0')\|\geq 1$, $S_1'\sim S_2'$, $S_1'\circ S_0'$ und $S_2'\circ S_0'$ sind definiert und $S_1 \rightarrow_\rho S_1'\circ S_0'$ sowie $S_2 \rightarrow_\rho S_2'\circ S_0'$.

2) $S_1\sim S_2$ und $|S_1|=0 \Rightarrow \omega_M(S_1)=\omega_M(S_2)$ und $\|\omega_M(S_1)\|=0 \Rightarrow S_1 \rightarrow_\rho S_2$ nach Voraussetzung (2).

q.e.d.

Betrachtet man obiges Kriterium unter dem Gesichtspunkt des Beweises von Satz 1.2.24, so sieht man, daß zwei äquivalente sequentielle Darstellungen S_1 und S_2 durch iteratives Anwenden von Voraussetzung (1) in zwei andere sequentielle Darstellungen $S_1''\circ S_0''$ und $S_2''\circ S_0''$ überführt werden können, deren Spalten auf der rechten Seite (S_0'') identisch sind bzw. identisch bleiben und deren restliche Spalten je eine sequentielle Darstellung S_1'' und S_2'' mit $\|\omega_M(S_1'')\|=\|\omega_M(S_2'')\|=0$ definieren. Unter Anwendung von Voraussetzung (2) können abschließend auch S_1'' und S_2'' in einander überführt werden. Betrachtet man alle Überführungen zusammen genommen, so ist damit S_1 in S_2 überführbar, was zu beweisen war.

Die nächsten beiden Hilfssätze bereiten den Beweis für ein Kriterium vor, bei dem die Bedingung (2) entfällt.

Hilfssatz 2.8.12:

Ist $(M,\times,\circ_D)$ ein Monopolyid, $\|\ \|:(M,\times,\circ_D)\rightarrow(\mathbb{N}_0,+,+)$ ein Monopolyiden-Homomorphismus, $M'\subseteq M$ mit $1_M\subseteq M'$ und $S\in S(M,M')$ mit $\|\omega_M(S)\|=0$, dann ist $\mathrm{Kern}(S)\subseteq M^{\|0\|}$.

Beweis:

Sei $S=\begin{pmatrix} 1_{t1} & & 1_{tn} \\ f_1 & \ldots & f_n \\ 1_{b1} & & 1_{bn} \end{pmatrix}$. $\Rightarrow$ $\omega_M(S)=(1_{t1}\times f_1\times 1_{b1})\circ\ldots\circ(1_{tn}\times f_n\times 1_{bn})$ $\Rightarrow$

$\|\omega_M(S)\|=\|(1_{t1}\times f_1\times 1_{b1})\circ\ldots\circ(1_{tn}\times f_n\times 1_{bn})\|=\|1_{t1}\|+\|f_1\|+\|1_{b1}\|+\ldots+\|1_{tn}\|+\|f_n\|+\|1_{bn}\|$. Da nach Voraussetzung $\|\omega_M(S)\|=0$ folgt: $\|f_1\|=\ldots=\|f_n\|=0$. $\Rightarrow$ $\mathrm{Kern}(S)=\{f_1,\ldots,f_n\}\subseteq M^{\|0\|}$ nach Satz 2.8.6.

q.e.d.

Hilfssatz 2.8.14:

Ist $(M,\times,\circ_D)$ ein Monopolyid, $M'\subseteq M$ mit $M^{\|0\|}\subseteq M'$, $S\in S(M,M')$ mit $\|\omega_M(S)\|=0$ und ρ eine symmetrische Substitutionsmenge mit $\rho_Z(M')\subseteq\rho$, dann ist S bzgl. ρ überführbar in $S':=\begin{pmatrix}0\\ \omega_M(S)\\ 0\end{pmatrix}$.

Beweis:

$M^{\|0\|}\subseteq M' \Rightarrow 1_M\subseteq M'$ nach Satz 2.8.6. Nach dem selben Satz ist $M^{\|0\|}$ ein Untermonopolyid von M. $\|\omega_M(S)\|=0 \Rightarrow \mathrm{Kern}(S)\subseteq M^{\|0\|}$ nach Hilfssatz 2.8.12 $\Rightarrow$ (S,S') ist nach Definition 2.7.12 eine Verschmelzung. $\Rightarrow S \Rightarrow_\rho S'$, da $\rho_Z(M')\subseteq\rho$.

q.e.d.

Satz 2.8.16:

Ist $(M,\times,\circ_D)$ ein Monopolyid, $\|\ \|:(M,\times,\circ_D)\rightarrow(\mathbb{N}_0,+,+)$ ein Monopolyiden-Homomorphismus, $M'\subseteq M$ mit $M^{\|0\|}\subseteq M'$ und ρ eine symmetrische Substitutionsmenge von S(M,M') mit $\rho_Z(M')\subseteq\rho$ und der Eigenschaft:

(1) $S_1,S_2\in S(M,M')$, $\|\omega_M(S_1)\|\geq 1$ und $\omega_M(S_1)=\omega_M(S_2) \Rightarrow$
$\exists\ S_0',S_1',S_2'\in S(M,M')$ mit $\|\omega_M(S_0')\|\geq 1$, $\omega_M(S_1')=\omega_M(S_2')$, $S_1'\circ S_0'$ und $S_2'\circ S_0'$ sind definiert und $S_1 \Rightarrow_\rho S_1'\circ S_0'$ sowie $S_2 \Rightarrow_\rho S_2'\circ S_0'$.

So ist ρ eine Substitutionsbasis von S(M,M').

Beweis:

Zeige, daß ρ auch die Eigenschaft (2) von Satz 2.8.10 besitzt, dann folgt aus eben diesem Satz die Behauptung.
Sei $S_1,S_2\in S(M,M')$, $\|\omega_M(S_1)\|=0$ und $\omega_M(S_1)=\omega_M(S_2)$. Definiere $S':=\begin{pmatrix}0\\ \omega_M(S_1)\\ 0\end{pmatrix}$. $\Rightarrow S_1 \Rightarrow_\rho S'$ nach Hilfssatz 2.8.14. Wegen $\omega_M(S_1)=\omega_M(S_2)$ gilt analog: $S_2 \Rightarrow_\rho S'$. $\Rightarrow S_1 \Rightarrow_\rho S' \Rightarrow_\rho S_2$ d.h. $S_1 \Rightarrow_\rho S_2$.

q.e.d.

Ein weiteres Kriterium, bei dem die Bedingung (2) entfällt, kann mit folgendem Hilfssatz bewiesen werden.

Hilfssatz 2.8.18:

Ist $(M,\times,\circ_D)$ ein Monopolyid, $M'\subseteq M$ mit $1_M\subseteq M'$, $S_1,S_2\in S(M,M')$ mit $\omega_M(S_1)=\omega_M(S_2)$, $\mathrm{Kern}(S_1)\subseteq 1_M$ und $\mathrm{Kern}(S_2)\subseteq 1_M$ und ρ eine symmetrische Substitutionsmenge von $S(M,M')$ mit $\rho_X(M')\subseteq\rho$, so ist $S_1 \Rightarrow_\rho S_2$.

Beweis:

Definiere $S':=\begin{pmatrix} 0 \\ \omega_M(S_1) \\ 0 \end{pmatrix}$. $\Rightarrow$ $S_1 \Rightarrow_\rho S'$ nach Satz 2.7.6, da $\rho_X(M')\subseteq\rho$.

Wegen $\omega_M(S_1)=\omega_M(S_2)$ gilt analog: $S_2 \Rightarrow_\rho S'$ $\Rightarrow$ $S_1 \Rightarrow_\rho S' \Rightarrow_\rho S_2$ d.h. $S_1 \Rightarrow_\rho S_2$.

q.e.d.

Satz 2.8.20:

Ist $(M,\times,\circ_D)$ ein Monopolyid, $\| \ \|:(M,\times,\circ_D)\to(\mathbb{N}_0,+,+)$ ein nicht-trivialer Monopolyiden-Homomorphismus mit $M^{\|0\|}=1_M$, $M'\subseteq M$ mit $M^{\|0\|}\subseteq M'$ und ρ eine symmetrische Substitutionsmenge von $S(M,M')$ mit $\rho_X(M')\subseteq\rho$ und der Eigenschaft:

(1) $S_1,S_2\in S(M,M')$, $\|\omega_M(S_1)\|\geq 1$ und $\omega_M(S_1)=\omega_M(S_2)$ $\Rightarrow$
$\exists$ $S_0',S_1',S_2'\in S(M,M')$ mit $\|\omega_M(S_0')\|\geq 1$, $\omega_M(S_1')=\omega_M(S_2')$, $S_1'\circ S_0'$ und $S_2'\circ S_0'$ sind definiert und $S_1 \Rightarrow_\rho S_1'\circ S_0'$ sowie $S_2 \Rightarrow_\rho S_2'\circ S_0'$.

So ist ρ eine Substitutionsbasis von $S(M,M')$.

Beweis:

Zeige, daß ρ auch die Eigenschaft (2) von Satz 2.8.16 besitzt, dann folgt aus eben diesem Satz die Behauptung.
Sei $S_1,S_2\in S(M,M')$, $\|\omega_M(S_1)\|=0$ und $\omega_M(S_1)=\omega_M(S_2)$ $\Rightarrow$ $\mathrm{Kern}(S_1)\subseteq M^{\|0\|}$ und $\mathrm{Kern}(S_2)\subseteq M^{\|0\|}$ nach Hilfssatz 2.8.12. $\Rightarrow$ $\mathrm{Kern}(S_1)\subseteq 1_M$ und $\mathrm{Kern}(S_2)\subseteq 1_M$, da nach Voraussetzung $M^{\|0\|}=1_M$ ist. Damit sind die Voraussetzungen von Hilfssatz 2.8.18 erfüllt. $\Rightarrow$ $S_1 \Rightarrow_\rho S_2$.

q.e.d.

Die nächsten Sätze stellen das Ziel aller Bemühungen in diesen Kapitel dar. Mit ihnen kann in [HÜB95] bewiesen werden, daß bestimmte Untermonopolyide des Monopolyids der geordneten Subzentren-Netzwerke α-vollkommene Monopolyide sind und ein von 1_M verschiedenes vollkommenes Untermonopolyid existiert.

Satz 2.8.22:

Ist $(M,\times,\circ_D)$ ein Monopolyid, $\| \,\|:(M,\times,\circ_D)\to(\mathbb{N}_0,+,+)$ ein nicht-trivialer Monopolyiden-Homomorphismus, $M'\subseteq M$ mit $M^{\|0\|}\subseteq M'$ und erfüllt $\rho:=\rho_X(M')\cup\rho_V(M')\cup\rho_Z(M')\cup\rho_B(M')$ die Bedingung:

(1) $S_1,S_2\in S(M,M')$, $\|\omega_M(S_1)\|\geq 1$ und $\omega_M(S_1)=\omega_M(S_2) \Rightarrow$
$\exists\ S_0',S_1',S_2'\in S(M,M')$ mit $\|\omega_M(S_0')\|\geq 1$, $\omega_M(S_1')=\omega_M(S_2')$, $S_1'\circ S_0'$ und $S_2'\circ S_0'$ sind definiert und $S_1 \rightarrow_\rho S_1'\circ S_0'$ sowie $S_2\rightarrow_\rho S_2'\circ S_0'$.

so ist ρ eine α-vollkommene Substitutionsbasis von $S(M,M')$. Ist darüber hinaus M' ein Erzeugendensystem, so ist M' ein α-vollkommenes Erzeugendensystem und $(M,\times,\circ_D)$ ein α-vollkommenes Monopolyid.

Beweis:

Nach Satz 2.7.4 bzw. Satz 2.7.10 sind $\rho_X(M')$ und $\rho_V(M')$ vollkommene Substitutionsmengen von $S(M,M')$ und somit auch α-vollkommene Substitutionsmengen von $S(M,M')$. Nach Satz 2.7.14 bzw. Satz 2.7.20 sind auch $\rho_Z(M')$ und $\rho_B(M')$ α-vollkommene Substitutionsmengen von $S(M,M')$. $\Rightarrow$ $\rho=\rho_X(M')\cup\rho_V(M')\cup\rho_Z(M')\cup\rho_B(M')$ ist eine α-vollkommene Substitutionsmenge von $S(M,M')$. Da $\rho_Z(M')\subseteq\rho$ und ρ eine symmetrische Substitutionsmenge von $S(M,M')$ ist, ist ρ nach Satz 2.8.16 eine Substitutionsbasis und somit eine α-vollkommene Substitutionsbasis von $S(M,M')$.
Ist darüber hinaus M' ein Erzeugendensystem, so ist nach Satz 2.6.24 M' ein α-vollkommenes Erzeugendensystem und $(M,\times,\circ_D)$ ein α-vollkommenes Monopolyid.

q.e.d.

Zu obigem Satz noch ein wichtiger Hinweis. Auf den ersten Blick sieht es so aus, als könnte es sich bei der Menge M' um eine beliebige Teilmenge von M mit $M^{\|0\|}\subseteq M'$ handeln. Dies ist jedoch nicht der Fall! Angenommen es ist $f,g\in M'\setminus M^{-1}$ und auch $f\circ g\in M'$, dann sind $S:=\begin{pmatrix}0&0\\ f&g\\ 0&0\end{pmatrix}$ und $S':=\begin{pmatrix}0\\ f\circ g\\ 0\end{pmatrix}$ zwei äquivalente, sequentielle Dartstellungen aus $S(M,M')$, da $\omega_M(S)=f\circ g=\omega_M(S')$. Soll nun ρ eine Substitutionsbasis sein, so muß S bzgl. ρ in S' direkt überführbar sein, da $L(S')=1$ ist. Es kann sich bei (S,S') aber weder um eine Rechtskürzung, eine Vertauschung, noch um eine Überbrückung handeln, da $f,g\notin M^{-1}$ und $f,g\notin 1_M$ nach Satz 2.8.6. Damit muß es sich bei (S,S') um eine Zerlegung handeln, da $\rho:=\rho_X(M')\cup\rho_V(M')\cup\rho_Z(M')\cup\rho_B(M')$ vorausgesetzt wird. Das heißt, es existiert ein Untermonopolyid

U von M mit $U \subseteq M'$ und $f,g \in U$. Zusammenfassend kann also festgestellt werden, daß die Teilmenge M' zu zwei Elementen stets auch das von diesen Elementen erzeugte Untermonopolyid enthalten muß.

Der folgende Satz stellt einen Spezialfall von Satz 2.8.22 dar.

Satz 2.8.24:

Ist $(M,\times,\circ_D)$ ein Monopolyid, $\| \,\|:(M,\times,\circ_D)\to(\mathbb{N}_0,+,+)$ ein nichttrivialer Monopolyiden-Homomorphismus mit $M^{\|0\|}=1_M$, $M'\subseteq M$ mit $1_M \subseteq M'$ und erfüllt $\rho:=\rho_X(M')\cup\rho_V(M')$ die Bedingung:

(1) $S_1,S_2\in S(M,M')$, $\|\omega_M(S_1)\|\geq 1$ und $\omega_M(S_1)=\omega_M(S_2) \Rightarrow$
$\exists\ S_0',S_1',S_2'\in S(M,M')$ mit $\|\omega_M(S_0')\|\geq 1$, $\omega_M(S_1')=\omega_M(S_2')$, $S_1'\circ S_0'$ und $S_2'\circ S_0'$ sind definiert und $S_1 \Rightarrow_\rho S_1'\circ S_0'$ sowie $S_2 \Rightarrow_\rho S_2'\circ S_0'$.

so ist ρ eine vollkommene Substitutionsbasis von S(M,M'). Ist darüber hinaus M' ein Erzeugendensystem, so ist M' ein vollkommenes Erzeugendensystem und $(M,\times,\circ_D)$ ein vollkommenes Monopolyid.

Beweis:

Nach Satz 2.7.4 bzw. Satz 2.7.10 sind $\rho_X(M')$ und $\rho_V(M')$ vollkommene Substitutionsmengen von S(M,M'). $\Rightarrow$ $\rho=\rho_X(M')\cup\rho_V(M')$ ist eine vollkommene Substitutionsmenge von S(M,M'). Da nach Voraussetzung $M^{\|0\|}=1_M$ und $\rho_X(M')\subseteq\rho$ ist, ist ρ nach Satz 2.8.20 eine Substitutionsbasis und somit eine vollkommene Substitutionsbasis von S(M,M').
Ist darüber hinaus M' ein Erzeugendensystem, so ist nach Satz 2.5.8 M' ein vollkommenes Erzeugendensystem und $(M,\times,\circ_D)$ ein vollkommenes Monopolyid.

q.e.d.

Man kann zeigen, daß es α-vollkommene Monopolyide gibt, die keine vollkommenen Monopolyide sind. Dazu folgender Satz:

Satz 2.8.26:

Ist $(M,\times,\circ_D)$ ein Monopolyid, $\| \,\|:(M,\times,\circ_D)\to(\mathbb{N}_0,+,+)$ ein nichttrivialer Monopolyiden-Homomorphismus so, daß zu jedem $f\in M^{\|0\|}$ ein $f^*\in M$ existiert mit $\|f^*\|\geq 1$, $1_l(f^*)=1_l(f)$ und $1_r(f^*)=1_r(f)$, so gilt: Ist U ein Untermonopolyid von M in dem es zwei Elemente f,g aus $M^{\|0\|}\setminus 1_M$ gibt mit $f\circ g\in 1_M$ oder $g\circ f\in 1_M$ oder $f\times g\in 1_M$ oder $g\times f\in 1_M$, so kann U kein vollkommenes Monopolyid sein. Insbesondere kann dann auch $(M,\times,\circ_D)$ kein vollkommenes Monopolyid sein.

Beweis:

Betrachte zunächst den Fall: $(f,g)\in D$ und $f\circ g\in 1_M$.
Angenommen U ist ein vollkommenes Monopolyid. $\Rightarrow$ $\exists$ ein vollkommenes Erzeugendensystem $U'\subseteq U$ mit $1_U\subseteq U'$. $\Rightarrow$ Nach Hilfssatz 2.1.24 existieren $f_{ij}\in U'$ mit $f=\bigcirc_{i=1}^{n}(\mathop{\times}_{j=1}^{m_i} f_{ij})$. $\Rightarrow$ $\exists$ k,l mit $1\leq k\leq n$, $1\leq l\leq m_k$ und $f_{kl}\notin 1_M$, da sonst alle $f_{ij}\in 1_M$ sind und somit auch $f=\bigcirc_{i=1}^{n}(\mathop{\times}_{j=1}^{m_i} f_{ij})\in 1_M$ ist, was ein Widerspruch zur Voraussetzung $f\in M^{\|0\|}\setminus 1_M$ wäre. Da $\|f\|=0$ ist, ist $\|f_{ij}\|=0$ $\forall$ i,j und insbesondere $\|f_{kl}\|=0$. $\Rightarrow$ $f_{kl}\in M^{\|0\|}$. Nach Voraussetzung existiert damit ein $f^*\in M$ mit $\|f^*\|\geq 1$, $1_l(f^*)=1_l(f_{kl})$ und $1_r(f^*)=1_r(f_{kl})$.
Definiere $\varphi':U'\to M$ als die identische Abbildung auf $U'\setminus\{f_{kl}\}$ und $\varphi'(f_{kl})=f^*$. Damit erfüllt φ' die Bedingung (F0) von Satz und Definition 2.3.8 da U ein Untermonopolyid von M und somit nach Satz 2.1.14 $1_U\subseteq 1_M$ ist. Wegen $1_l(f^*)=1_l(f_{kl})$ und $1_r(f^*)=1_r(f_{kl})$ erfüllt φ' nach Satz 1.3.6 (5) auch die Bedingung (F1). $\Rightarrow$ φ' ist nach Satz 2.3.16 eine übertragbare Abbildung. $\Rightarrow$ φ' kann nach Definition 2.5.2 zu genau einem Monopolyiden-Homomorphismus $\varphi:U\to M$ fortgesetzt werden, da U' ein vollkommenes Erzeugendensystem ist. $\Rightarrow$ $\varphi(f\circ g)\in 1_M$, da $f\circ g\in 1_M$. $\Rightarrow$ $\|\varphi(f\circ g)\|=0$ nach Satz 2.8.6.
Andererseits ist $\|\varphi(f\circ g)\| = \|\varphi(f)\circ\varphi(g)\| = \|\varphi(\bigcirc_{i=1}^{n}(\mathop{\times}_{j=1}^{m_i} f_{ij}))\circ\varphi(g)\| = \|(\bigcirc_{i=1}^{n}(\mathop{\times}_{j=1}^{m_i}\varphi(f_{ij}))\circ\varphi(g)\|=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i} \|\varphi(f_{ij})\|+\|\varphi(g)\| \geq \|\varphi(f_{kl})\|=\|f^*\|\geq 1$. Dies steht im Widerspruch zu $\|\varphi(f\circ g)\|=0$. $\Rightarrow$ Die Annahme es gäbe zu U ein vollkommenes Erzeugendensystem ist damit falsch. $\Rightarrow$ U kann kein vollkommenes Monopolyid sein.
Existiert ein Untermonopolyid U von M mit obigen Voraussetzungen, so erfüllt auch M als Untermonopolyid von sich selbst diese Voraussetzungen. $\Rightarrow$ M kann kein vollkommenes Monopolyid sein.
Im Fall $f\times g\in 1_M$ ist nach Satz 2.1.6 (2) $f\times g=(f\times 1_l(g))\circ(1_r(f)\times g)$. Definiere $f':=f\times 1_l(g)$ und $g':=1_r(f)\times g$. $\Rightarrow$ $f',g'\in(U\cap M^{\|0\|})\setminus 1_M$ mit $f'\circ g'\in 1_M$, da $f,g\in(U\cap M^{\|0\|})\setminus 1_M$ und $f\times g\in 1_M$. Damit folgt aus obigem Fall die Behauptung.
Im Fall $g\times f\in 1_M$ oder $(g,f)\in D$ und $g\circ f\in 1_M$ ist die Rolle von f und g zu vertauschen.

q.e.d.

Als abschließender Satz folgt nun noch ein einfaches Kriterium für α-übertragbare Abbildungen zu dessen Beweis ein Hilfssatz notwendig ist.

Hilfssatz 2.8.28:

Ist $(M,\times,\circ_D)$ ein Monopolyid, $\| \,\|:(M,\times,\circ_D)\to(\mathbb{N}_0,+,+)$ ein Monopolyiden-Homomorphismus, $M'\subseteq M$ und existiert ein $n\in\mathbb{N}$ mit $\|f\|\leq n\ \forall\ f\in M'$, so ist jedes Untermonopolyid U von M mit $U\subseteq M'$ auch ein Untermonopolyid von $M^{\|0\|}$.

Beweis:

Zeige: U ist Teilmenge von $M^{\|0\|}$. Sei $f\in U$. $\Rightarrow$ $\underbrace{f\times\cdots\times f}_{(n+1)\text{-mal}}\in U$ $\Rightarrow$ $\|\underbrace{f\times\cdots\times f}_{(n+1)\text{-mal}}\|=\|f\|+...+\|f\|=(n+1)\cdot\|f\|$. Da $U\subseteq M'$, ist $\|\underbrace{f\times\cdots\times f}_{(n+1)\text{-mal}}\|\leq n$ nach Voraussetzung. $\Rightarrow$ $(n+1)\cdot\|f\|\leq n$ $\Rightarrow$ $\|f\|<1$ $\Rightarrow$ $\|f\|=0$ $\Rightarrow$ $U\subseteq M^{\|0\|}$. Da U ein Untermonopolyid U von M ist, ist U damit auch Untermonopolyid von $M^{\|0\|}$.

q.e.d.

Satz 2.8.30:

Sind $(M,\times,\circ_D)$ und $(M_2,+,\cdot_{D_2})$ zwei Monopolyide, $\| \,\|:(M,\times,\circ_D)\to(\mathbb{N}_0,+,+)$ ein nicht-trivialer Monopolyiden-Homomorphismus, $M'\subseteq M$ mit $M^{\|0\|}\subseteq M'$ und es existiert ein $n\in\mathbb{N}$ mit $\|f\|\leq n\ \forall\ f\in M'$, dann ist $\phi':M'\to M_2$ genau dann eine α-übertragbare Abbildung, wenn ϕ' folgende Bedingungen erfüllt:

(α0') $(f,g)\in D\cap M'\mathrm{x}M'$ $\Rightarrow$ $(\phi'(f),\phi'(g))\in D_2$

(α1') Die Restriktion von ϕ' auf $M^{\|0\|}$ ist ein Monopolyiden-Homomorphismus.

(α2') $1_t,1_t',1_b,1_b'\in 1_M$, $f\in M'\backslash M^{\|0\|}$, $p_1,p_2\in M^{-1}$ und $1_t\times f\times 1_b= p_1\circ(1_t'\times f\times 1_b')\circ p_2^{-1}$ $\Rightarrow$ $\phi'(1_t)+\phi'(f)+\phi'(1_b) = \phi'(p_1)\cdot(\phi'(1_t')+\phi'(f)+\phi'(1_b'))\cdot\phi'(p_2^{-1})$.

Beweis:

"$\Rightarrow$" Wegen (α0') erfüllt ϕ' die Bedingung (F1) aus Satz und Definition 2.3.8. Da nach Satz 2.8.6 $1_M\subseteq M^{\|0\|}$ und nach Voraussetzung $M^{\|0\|}\subseteq M'$ ist, ist $1_M\subseteq M'$ und die Restriktion von ϕ' wegen (α1) ein Monopolyiden-Homomorphismus. $\Rightarrow$ ϕ' erfüllt auch die Bedingung (F0). $\Rightarrow$ ϕ' ist eine übertragbare Abbildung.
Da nach Satz 2.8.6 $M^{\|0\|}$ ein echtes Untermonopolyid von M und nach Hilfssatz 2.8.28 jedes Untermonopolyid U von M mit $U\subseteq M'$ auch ein Untermonopolyid von $M^{\|0\|}$ ist, ist jedes Untermonopolyid U von M mit $U\subseteq M'$ ein echtes Untermonopolyid von M. Nach Voraussetzung (α1') ist die

Restriktion von ϕ' auf $M^{\|0\|}$ ein Monopolyiden-Homomorphismus. $\Rightarrow$ Auch die Restriktion von ϕ' auf U ist ein Monopolyiden-Homomorphismus. Damit erfüllt ϕ' die Bedingung (α1) aus Definition 2.6.16.
Seien $p_1,p_2 \in M'$ wie in Bedingung (α2) von Definition 2.6.16 invertierbar, d.h. $p_1,p_2 \in M^{-1}$. $\Rightarrow$ Für $f \in M' \setminus M^{\|0\|}$ ist nach Voraussetzung (α2') die Bedingung (α2) erfüllt. Sei $f \in M' \cap M^{\|0\|}$. $\Rightarrow$ $1_t, 1_t', 1_b, 1_b', f, p_1, p_2 \in M^{\|0\|}$, da nach Satz 2.8.6 $1_M \subseteq M^{-1} \subseteq M^{\|0\|}$ ist. $\Rightarrow$ Die Bedingung (α2) ist erfüllt, da nach Voraussetzung (α1') die Restriktion von ϕ' auf $M^{\|0\|}$ ein Monopolyiden-Homomorphismus ist. $\Rightarrow$ ϕ' erfüllt auch die Bedingung (α2) und ist somit eine α-übertragbare Abbildung.

"$\Leftarrow$" Ist ϕ' eine α-übertragbare Abbildung, so erfüllt sie trivialerweise die Bedingungen (α0') und (α1'). Da nach Satz 2.8.6 $M^{-1} \subseteq M^{\|0\|}$ und $M^{\|0\|} \subseteq M'$ ist, gilt für $p_1,p_2 \in M^{-1}$: p_1 und p_2 sind invertierbare Elemente aus M'. Mit Voraussetzung (α2) folgt damit die Bedingung (α2').

q.e.d.

3. Monopolyide und X-Kategorien

In diesem Kapitel wird aufgezeigt, daß es einen sehr engen Zusammenhang zwischen den in der einschlägigen Fachliteratur bekannten Kategorien bzw. X-Kategorien einerseits und den weiter vorne vorgestellten Polyiden bzw. Monopolyiden gibt. Das Ziel dieses Kapitels ist es zu zeigen, daß sich im allgemeinen alle Zusammenhänge, die über X-Kategorien beschreibbar sind, auch durch die einfacheren Monopolyide beschreiben lassen. Abschließend wird noch kurz darauf eingegangen, daß sich der Zusammenhang zwischen X-Kategorien und Monopolyiden auf Bikategorien und Bipolyide erweitern läßt.

3.1 Kategorien, Funktoren und Polyide

Eine in der theoretischen Informatik häufig auftretende algebraische Struktur ist die der Kategorie bzw. X-Kategorie. Eine Einführung dazu findet man auch in den Büchern von Hotz [HOT72] und [HOT74]. Beide wurden als Vorlage zur nachfolgenden Definition von X-Kategorien, X-Funktoren und freien X-Kategorien verwendet.

Definition 3.1.2:

Sind M und $\mathcal{O}$ zwei Mengen, $L:M\to\mathcal{O}$ und $R:M\to\mathcal{O}$ zwei Abbildungen, $D:=\{(f,g)\in M\times M:\ R(f)=L(g)\}$ und $\circ:D\to M$, dann heißt das Tupel $C=((M,\circ_D),\mathcal{O},L,R)$ eine **Kategorie**, wenn gilt:

(K0) $(f,g),(f\circ g,h)\in D \Leftrightarrow (g,h),(f,g\circ h)\in D$

(K1) Für $(f,g)\in D$ ist $L(f\circ g)=L(f)$ und $R(f\circ g)=R(g)$

(K2) Ist $(f,g)\in D$ und $(f\circ g,h)\in D$, so ist $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$.

(K3) Zu jedem $u\in\mathcal{O}$ existiert eine (partielle) Identität $1_u\in M$ mit der Eigenschaft $L(1_u)=R(1_u)=u$, $1_u\circ f=f\ \ \forall f\in M:L(f)=u$ und $f\circ 1_u=f\ \ \forall f\in M:R(f)=u$.

Außerdem wird **M(C)**$:=M$, $\mathcal{O}$**(C)**$:=\mathcal{O}$, **D(C)**$:=D$, **L(C)**$:=L$ und **R(C)**$:=R$ definiert.

Eine Kategorie kann anschaulich als folgendes Diagramm dargestellt werden:

$$\begin{tikzcd} (M,\circ_D) \arrow[d, shift right, "L"'] \arrow[d, shift left, "R"] \\ O \end{tikzcd}$$

Bild 3.2: Schematische Darstellung einer Kategorie.

Anmerkungen:

Die hier verwendete Nomenklatur ist gegenüber der von Hotz verwendeten (und gebräuchlichen) etwas abgewandelt. Hotz verwendet das Tupel $(\mathcal{O},M,Q,Z,\circ)$ zur Beschreibung einer Kategorie. Da das gängigste Beispiel für eine Kategorie die Menge der Abbildungen (Morphismen) M auf den Elementen einer Menge $\mathcal{O}$ von (Objekt-) Mengen ist und für eine Abbildung $f:A\to B$ $Q(f):=A$ und $Z(f):=B$ definiert wird, wird hier statt Q und Z L

und R verwendet, da diese eine Assoziation zum linksstehenden A bzw. rechtsstehenden B herstellen und in engem Zusammenhang zu den Abbildungen 1_l und 1_r stehen. Desweiteren ist die Reihenfolge von $\mathcal{O}$ und M vertauscht, da dies an die normale Darstellung für die Abbildung $L:M\to\mathcal{O}$ bzw. $R:M\to\mathcal{O}$ erinnern soll. Da das Operationszeichen bei Hotz innerhalb des Tupels an ganz anderer Stelle gesetzt wird ist eine Verwechslung zwischen beiden Darstellungen ausgeschlossen. Bleibt noch zu erwähnen, daß bei Hotz die Bedingungen (K0) und (K2) zu einer Bedingung zusammengefaßt sind. Im Hinblick auf den Zusammenhang mit Polyiden ist dies hier nicht geschehen.

Satz 3.1.4:

$C=((M,\circ_D),\mathcal{O},L,R)$ ist genau dann eine Kategorie, wenn $C'=((M,\bullet_{D'}),\mathcal{O},R,L)$ mit $f\bullet g:=g\circ f$ eine Kategorie ist.

Beweis:

Sei $L':=R$ und $R':=L$. Es gilt: $(f,g)\in D(C') \Leftrightarrow R'(f)=L'(g) \Leftrightarrow L(f)=R(g) \Leftrightarrow (g,f)\in D(C)$.

K0) $(f,g),((f\bullet g),h)\in D' \Leftrightarrow (g,f),(h,(g\circ f))\in D \Leftrightarrow$
$(h,g),((h\circ g),f)\in D \Leftrightarrow (g,h),(f,(g\bullet h))\in D'$

K1) Für $(f,g)\in D'$ ist $(g,f)\in D$, $L'(f\bullet g)=R(g\circ f)=R(f)=L'(f)$ und $R'(f\bullet g)=L(g\circ f)=L(g)=R'(g)$

K2) Ist $(f,g)\in D'$ und $((f\bullet g),h)\in D' \Rightarrow (g,f),(h,(g\circ f))\in D \Rightarrow (f,g),((f\circ g),h)\in D \Rightarrow (f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h) \Rightarrow (f\bullet g)\bullet h=h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f=f\bullet(g\bullet h)$.

K3) Zu jedem $u\in\mathcal{O}$ existiert eine (partielle) Identität 1_u mit der Eigenschaft $L(1_u)=R(1_u)=u$, $1_u\bullet f=f\circ 1_u=f \ \forall f\in M{:}L'(f)=R(f)=u$ und $f\bullet 1_u=1_u\circ f=f \ \forall f\in M{:}R'(f)=L(f)=u$.

q.e.d.

Satz 3.1.6:

(a) Ist $(M,\circ_D)$ ein Polyid und $\varphi:1_M\to\mathcal{O}$ eine bijektive Abbildung, dann ist $C=((M,\circ_D),\mathcal{O},\varphi o 1_l,\varphi o 1_r)$ eine Kategorie. (o steht dabei für die Hintereinanderausführung von Abbildungen.)

(b) Ist $C=((M,\circ_D),\mathcal{O},L,R)$ eine Kategorie, dann ist $(M,\circ_D)$ ein Polyid und es existiert genau eine bijektive Abbildung $\varphi:1_M\to\mathcal{O}$ mit $L=\varphi o 1_l$ und $R=\varphi o 1_r$.

Beweis:

a) Sei $(M,\circ_D)$ ein Polyid, $\varphi:1_M\to\mathcal{O}$ eine Abbildung und $L:M\to\mathcal{O}$ bzw. $R:M\to\mathcal{O}$ definiert durch $L:=\varphi o 1_l$ bzw.

$R:=\varphi o 1_r$. Zeige unter Verwendung von Satz 1.3.6, daß $C=((M,\circ_D),\mathcal{O},L,R)$ eine Kategorie ist.
Wegen $R(f)=L(g) \Leftrightarrow \varphi o 1_r(f)=\varphi o 1_l(g) \Leftrightarrow 1_r(f)=1_l(g) \Leftrightarrow 1_{rf}=1_{lf}$ $\Leftrightarrow$ $(f,g)\in D$ (nach Satz 1.3.6 (5)) folgt: $D':=\{(f,g)\in M\text{x}M: R(f)=L(g)\}=D$.

K0) $(f,g),(f\circ g,h)\in D \Leftrightarrow (g,h),(f,g\circ h)\in D$ folgt unmittelbar aus der Definition einer partiellen Halbgruppe bzw. eines Polyiden.

K1) Sei $(f,g)\in D$. Mit Satz 1.3.6 (3) ist $L(f\circ g)=(\varphi o 1_l)(f\circ g)=\varphi(1_l(f\circ g))=\varphi(1_l(f))=(\varphi o 1_l)(f)=L(f)$ und analog $R(f\circ g)=R(g)$

K2) Ist $(f,g)\in D$ und $((f\circ g),h)\in D'=D$, so ist $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$, da $(M,\circ_D)$ eine partielle Halbgruppe ist.

K3) Da φ bijektiv ist und zu jedem $u\in\mathcal{O}$ eine Identität $1_u:=\varphi^{-1}(u)\in 1_M$ existiert mit der Eigenschaft $L(1_u)=(\varphi o 1_l)(1_u)=\varphi(1_l(1_u))=\varphi(1_u)=\varphi(\varphi^{-1}(u))=u$ und $R(1_u)=(\varphi o 1_r)(1_u)=\varphi(1_r(1_u))=\varphi(1_u)=\varphi(\varphi^{-1}(u))=u$. Außerdem ist $\forall f\in M{:}L(f)=u=L(1_u)$ $L(f)=(\varphi o 1_l)(f)=(\varphi o 1_l)(1_u)=L(1_u) \Rightarrow 1_l(f)=1_l(1_u)$, da φ bijektiv ist. Wegen $1_l(1_u)=1_u \Rightarrow 1_u\circ f=f$. Analog ist $f\circ 1_u=f$ $\forall f\in M{:}R(f)=u$.

b) Sei $C=((M,\circ_D),\mathcal{O},L,R)$ eine Kategorie und $D:=\{(f,g)\in M\text{x}M: R(f)=L(g)\}$.
$(f,g),(g,h)\in D \Rightarrow R(f)=L(g)$ und $R(g)=L(h)$. Mit (K1) $\Rightarrow$ $R(f)=L(g)=L(g\circ h)$ und $R(f\circ g)=R(g)=L(h) \Rightarrow (f,g\circ h)\in D$ und $(f\circ g,h)\in D$. Umgekehrt gilt wegen (K0) $(f,g),(f\circ g,h)\in D \Leftrightarrow (g,h)(f,g\circ h)\in D \Rightarrow (f,g),(g,h)\in D$. Mit (K2) ist damit $(M,\circ_D)$ eine partielle Halbgruppe.
Sei $g\in M$ mit $L(g)=u$ und $R(g)=v$. Wegen (K3) existiert eine Identität $1_u\in M$ mit der Eigenschaft $L(1_u)=R(1_u)=u$ und $1_u\circ f=f$ $\forall f\in M{:}L(f)=u$ bzw. $f\circ 1_u=f$ $\forall f\in M{:}R(f)=u$. $\Rightarrow L(g)=R(1_u)$ $\Rightarrow \forall f\in M{:}(1_u,f)\in D$ ist $1_u\circ f=f$ und $\forall f\in M{:}(f,1_u)\in D$ ist $f\circ 1_u=f$. Damit ist 1_u ein Neutralelement mit $(1_u,g)\in D$. Analog ist 1_v ein Neutralelement mit $(g,1_v)\in D$. $\Rightarrow$ $(M,\circ_D)$ ist ein Polyid.
Wegen (K3) existiert eine surjektive Abbildung $\varphi^{-1}{:}\mathcal{O}\to 1_M$: $\varphi^{-1}(u):=1_u$ die jedem $u\in\mathcal{O}$ ein $1_u\in 1_M$ zuordnet. Wegen $L(1_u)=R(1_u)=u$ ist diese Abbildung injektiv und damit auch bijektiv. Die Umkehrabbildung $\varphi{:}1_M\to\mathcal{O}$ ist damit ebenfalls eine Bijektion, die mit der Restriktion von L bzw. R auf 1_M übereinstimmt.
Zeige: $L=\varphi o 1_l$ und $R=\varphi o 1_r$. Ist $f\in M \Rightarrow L(f)=L(1_l(f)\circ f)=L(1_l(f))=\varphi(1_l(f))=(\varphi o 1_l)(f)$ und $R(f)=R(f\circ 1_r(f))=R(1_r(f))=\varphi(1_r(f))=(\varphi o 1_l)(f)$.
Angenommen es existiert eine weitere Bijektion $\varphi'{:}1_M\to\mathcal{O}$ mit $L=\varphi' o 1_l$ und $R=\varphi' o 1_r$. $\Rightarrow$ Für $1\in 1_M$ ist $\varphi(1)=L(1)=$

$(\varphi' o 1_l)(1)=\varphi'(1_l(1))=\varphi'(1)$ und analog $\varphi(1)=R(1)=(\varphi' o 1_r)(1)=\varphi'(1_r(1))=\varphi'(1)$.

q.e.d.

Dieser Satz besagt also, daß jede Kategorie eineindeutig einem Polyid mit Bijektion (von der Menge der Identitäten in eine beliebige andere Menge) zugeordnet werden kann. Damit lassen sich Aussagen über Kategorien durch einfachere Aussagen über Polyide verifizieren. (Es sei an dieser Stelle auch darauf hingewiesen, daß P. Freyd bereits 1966 in [FRE66] eine Definition für Kategorien angibt, die sehr ähnlich zu der der Polyide ist. Er setzt dabei φ als die identische Abbildung auf 1_M voraus.)

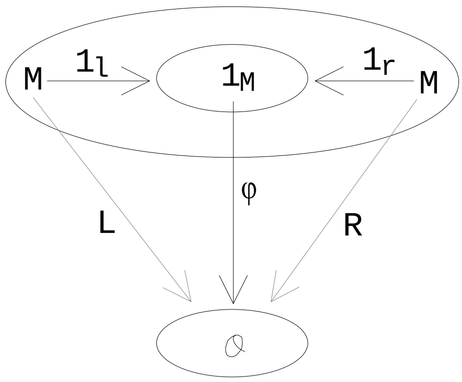

Bild 3.4: Darstellung einer Kategorie mit der nach Satz 3.1.6 (b) eindeutig bestimmten Bijektion φ.

Definition 3.1.8:

Sind $C_1=((M_1,\circ_{D_1}),\mathcal{O}_1,L_1,R_1)$ und $C_2=((M_2,\circ_{D_2}),\mathcal{O}_2,L_2,R_2)$ zwei Kategorien und $\phi_M:M_1\to M_2$ und $\phi_{\mathcal{O}}:\mathcal{O}_1\to\mathcal{O}_2$ zwei Abbildungen, dann heißt das Tupel $\phi=(\phi_M,\phi_{\mathcal{O}})$ ein **Funktor**, wenn gilt:

(1) Für $f\in M_1$ ist $L_2(\phi_M(f))=\phi_{\mathcal{O}}(L_1(f))$ und $R_2(\phi_M(f))=\phi_{\mathcal{O}}(R_1(f))$

(2) Für $f,g\in M_1$ mit $R_1(f)=L_1(g)$ ist $\phi_M(f\circ_1 g)=\phi_M(f)\circ_2\phi_M(g)$

(3) Für $u\in\mathcal{O}_1$ ist $\phi_M(1_u)=1_{\phi_{\mathcal{O}}(u)}$

Funktoren sind also die strukturerhaltenden Abbildungen zwischen Kategorien.

$$\begin{tikzcd} (M_1,\circ_{D1}) \arrow[r, "\phi_M"] \arrow[d, shift right, "L_1"'] \arrow[d, shift left, "R_1"] & (M_2,\circ_{D2}) \arrow[d, shift right, "L_2"'] \arrow[d, shift left, "R_2"] \\ O_1 \arrow[r, "\phi_O"'] & O_2 \end{tikzcd}$$

Bild 3.6: Schematische Darstellung zweier Kategorien mit Funktor.

Satz 3.1.10:

Sind $C_1=((M_1,\circ_{D_1}),\mathcal{O}_1,L_1,R_1)$ und $C_2=((M_2,\circ_{D_2}),\mathcal{O}_2,L_2,R_2)$ zwei Kategorien, $\varphi_1:1_{M_1}\to\mathcal{O}_1$ bzw. $\varphi_2:1_{M_2}\to\mathcal{O}_2$ die nach Satz 3.1.6 (b) eindeutig bestimmten Bijektionen, dann ist $(\phi_M,\phi_{\mathcal{O}})$ genau dann ein Funktor von C_1 nach C_2, wenn ϕ_M ein Polyiden-Homomorphismus mit $\phi_{\mathcal{O}}=\varphi_2 \mathrm{o} \phi_M \mathrm{o} \varphi_1^{-1}$ ist.

Beweis:

"$\Rightarrow$" Sei $(\phi_M,\phi_{\mathcal{O}})$ ein Funktor von C_1 nach C_2. $\Rightarrow$ $\phi_M:M_1\to M_2$ und $\phi_{\mathcal{O}}:\mathcal{O}_1\to\mathcal{O}_2$. Sei $f,g\in M_1$ mit $(f,g)\in D_1$ $\Rightarrow$ $R_1(f)=L_1(g)$. Wegen (1) ist $R_2(\phi_M(f))=\phi_{\mathcal{O}}(R_1(f))=\phi_{\mathcal{O}}(L_1(g))=L_2(\phi_M(f))$ $\Rightarrow$ $(\phi_M(f),\phi_M(g))\in D_2$. Wegen (2) ist $\phi_M(f\circ_1 g)=\phi_M(f)\circ_2\phi_M(g)$. Damit ist ϕ_M ein Polyiden-Homomorphismus, der wegen (3) Identitäten auf Identitäten abbildet.

Wegen (3) gilt für $u\in\mathcal{O}_1$: $\phi_M(\varphi_1^{-1}(u))=\phi_M(1_u)=1_{\phi_{\mathcal{O}}(u)}=\varphi_2^{-1}(\phi_{\mathcal{O}}(u))$ $\Leftrightarrow$ $\varphi_2(\phi_M(\varphi_1^{-1}(u))=\phi_{\mathcal{O}}(u)$ $\Leftrightarrow$ $\varphi_2 \mathrm{o}\phi_M \mathrm{o}\varphi_1^{-1}=\phi_{\mathcal{O}}$.

"$\Leftarrow$" Sei $\phi_M:M_1\to M_2$ ein Polyiden-Homomorphismus und $\phi_{\mathcal{O}}:\mathcal{O}_1\to\mathcal{O}_2$ definiert durch $\phi_{\mathcal{O}}:=\varphi_2 \mathrm{o}\phi_M \mathrm{o}\varphi_1^{-1}$.

1) Sei $f\in M_1$. Nach Satz 1.3.30 (a) ist $(\phi_M \mathrm{o} 1_{l1})(f)=(1_{l2} \mathrm{o}\phi_M)(f)$. Nach Voraussetzung ist $\phi_{\mathcal{O}}=\varphi_2 \mathrm{o}\phi_M \mathrm{o}\varphi_1^{-1}$ $\Rightarrow$ $\phi_{\mathcal{O}} \mathrm{o}\varphi_1=\varphi_2 \mathrm{o}\phi_M$ $\Rightarrow$ $(\varphi_2 \mathrm{o}\phi_M)(1_{l1}(f))=(\phi_{\mathcal{O}} \mathrm{o}\varphi_1)(1_{l1}(f))$ $\Rightarrow$ $(\varphi_2 \mathrm{o}\phi_M \mathrm{o} 1_{l1})(f)=(\phi_{\mathcal{O}} \mathrm{o}\varphi_1 \mathrm{o} 1_{l1})(f)$ $\Rightarrow$ $L_2(\phi_M(f))=(\varphi_2 \mathrm{o} 1_{l2})(\phi_M(f))=(\varphi_2 \mathrm{o} 1_{l2} \mathrm{o}\phi_M)(f)=(\varphi_2 \mathrm{o}\phi_M \mathrm{o} 1_{l1})(f)=(\phi_{\mathcal{O}} \mathrm{o}\varphi_1 \mathrm{o} 1_{l1})(f)=\phi_{\mathcal{O}}((\varphi_1 \mathrm{o} 1_{l1})(f))=\phi_{\mathcal{O}}(L_1(f))$.
Analog ist $R_2(\phi_M(f))=\phi_{\mathcal{O}}(R_1(f))$.

2) Seien $f,g\in M_1$ mit $R_1(f)=L_1(g)$ $\Rightarrow$ $(f,g)\in D_1$ $\Rightarrow$ $(\phi_M(f),\phi_M(g))\in D_2$ und $\phi_M(f\circ_1 g)=\phi_M(f)\circ_2\phi_M(g)$.

3) Für $u\in\mathcal{O}_1$ ist $\phi_M(1_u)=\phi_M(\varphi_1^{-1}(u))=\varphi_2^{-1}(\phi_{\mathcal{O}}(u))=1_{\phi_{\mathcal{O}}(u)}$, wegen $\phi_M(\varphi_1^{-1}(u))=\varphi_2^{-1}(\phi_{\mathcal{O}}(u))$ $\Leftrightarrow$ $\varphi_2 \mathrm{o}\phi_M \mathrm{o}\varphi_1^{-1}(u)=\phi_{\mathcal{O}}(u)$.

q.e.d.

3.2 X-Kategorien, X-Funktoren und Monopolyide

Definition 3.2.2:

Ein Tupel $X=((M,\times,\circ_D),(\mathcal{O},\times),L,R)$ heißt eine **monoidale Kategorie**, **Kronecker-Kategorie** oder kurz **X-Kategorie**, wenn gilt:

(X1) $C=((M,\circ_D),\mathcal{O},L,R)$ ist eine Kategorie.

(X2) $(M,\times)$ und $(\mathcal{O},\times)$ sind Monoide.

(X3) L und R sind Monoiden-Homomorphismen von $(M,\times)$ nach $(\mathcal{O},\times)$.

(X4) Für $u,v\in\mathcal{O}$ ist $1_u\times 1_v=1_{u\times v}$

(X5) $R(f)=L(g)$, $R(h)=L(e)$ und $R(f\times h)=L(g\times e)$ $\Leftrightarrow$ $(f\circ g)\times(h\circ e)=(f\times h)\circ(g\times e)$

Jede der drei Bezeichnungen ist in der Literatur durchaus gebräuchlich. Einige Autoren wie zum Beispiel P. Freyd [FRE66] benutzen die Bezeichnung "monoidale Kategorie". Dagegen verwendet G. Hotz [HOT72], [HOT74] fast ausschließlich die Kurzform "X-Kategorie". Die Bezeichnung "Kronecker-Kategorie" findet sich zum Beispiel bei J. Hoehnke [HOE75].

Eine X-Kategorie kann anschaulich als folgendes Diagramm dargestellt werden:

$$\begin{array}{ccc} & (M,\times,\circ_D) & \\ L & \downarrow\ \downarrow & R \\ & (\mathcal{O},\times) & \end{array}$$

Bild 3.8: Schematische Darstellung einer X-Kategorie.

Satz 3.2.4:

$C=((M,\times,\circ_D),(\mathcal{O},\times),L,R)$ ist genau dann eine X-Kategorie, wenn $C'=((M,\times,\bullet_{D'}),(\mathcal{O},\times),R,L)$ mit $f\bullet g:=g\circ f$ eine X-Kategorie ist.

Beweis:

Sei $L':=R$ und $R':=L$.

X1) $C=((M,\circ_D),\mathcal{O},L,R)$ ist eine Kategorie $\Leftrightarrow$ $C'=((M,\bullet_{D'}),\mathcal{O},R,L)$ ist eine Kategorie.

X2) $(M,\times)$ und $(\emptyset,\times)$ sind Polyide, da C eine X-Kategorie ist.

X3) L und R sind Polyiden-Homomorphismen von $(M,\times)$ nach $(\emptyset,\times)$, da C eine X-Kategorie ist.

X4) Für $u,v\in\emptyset$ ist $1_u\times 1_v=1_{u\times v}$, da C eine X-Kategorie ist.

X5) $R'(f_1)=L'(g_1)$ und $R'(f_2)=L \Leftrightarrow L(f_1)=R(g_1)$ u. $L(f_2)=R(g_2) \Rightarrow (f_1\bullet g_1)\times(f_2\bullet g_2)=(g_1\circ f_1)\times(g_2\circ f_2)=(g_1\times g_2)\circ(f_1\times f_2)=(f_1\times f_2)\bullet(g_1\times g_2)$.

q.e.d.

Satz 3.2.6:

(a) Ist $(M,\times,\circ_D)$ ein Monopolyid, $(\emptyset,\times)$ ein Monoid und $\varphi:(1_M,\times)\to(\emptyset,\times)$ ein Monoiden-Isomorphismus, dann ist $X=((M,\times,\circ_D),(\emptyset,\times),\varphi o 1_l,\varphi o 1_r)$ eine X-Kategorie. (o steht dabei für die Hintereinanderausführung von Abbildungen.)

(b) Ist $X=((M,\times,\circ_D),(\emptyset,\times),L,R)$ eine X-Kategorie, dann ist $(M,\times,\circ_D)$ ein Monopolyid, $(\emptyset,\times)$ ein Monoid und es existiert genau ein Monoiden-Isomorphismus $\varphi:(1_M,\times)\to(\emptyset,\times)$ so, daß $L=\varphi o 1_l$ und $R=\varphi o 1_r$ ist.

Beweis:

a) Sei $(M,\times,\circ_D)$ ein Monopolyid und $\varphi:(1_M,\times)\to(\emptyset,\times)$ ein Monoiden-Isomorphismus, $L':=\varphi o 1_l$ und $R':=\varphi o 1_r$.

X1) $(M,\circ_D)$ ist ein Polyid und $\varphi:1_M\to\emptyset$ eine Bijektion. Damit ist $C=((M,\circ_D),\emptyset,\varphi o 1_l,\varphi o 1_r))$ nach Satz 3.1.6 (a) eine Kategorie.

X2) $(M,\times)$ und $(\emptyset,\times)$ sind nach Voraussetzung Monoide.

X3) 1_l und 1_r sind bzgl. "$\times$" Monoiden-Homomorphismen nach Satz 2.1.6 (1). φ ist bzgl. "$\times$" ein Monoiden-Isomorphismus nach Voraussetzung $\Rightarrow$ $L':=\varphi o 1_l$ und $R':=\varphi o 1_r$ sind Monoiden-Homomorphismen von $(M,\times)$ nach $(\emptyset,\times)$.

X4) Für $u,v\in\emptyset$ sind $1_u:=\varphi^{-1}(u)$ und $1_v:=\varphi^{-1}(v)$ Identitäten; somit gilt: $1_u\times 1_v=\varphi^{-1}(u)\times\varphi^{-1}(v)=\varphi^{-1}(u\times v)=1_{u\times v}$.

X5) $R(f)=L(g)$ und $R(h)=L(e) \Rightarrow \varphi o 1_r(f)=\varphi o 1_l(g)$ und $\varphi o 1_r(h)=\varphi o 1_l(e)$. Da φ bijektiv ist, $\Rightarrow 1_r(f)=1_l(g)$ und $1_r(h)=1_l(e)$. Nach Satz 1.3.6 (5) $\Rightarrow (f,g)\in D$ und $(h,e)\in D \Rightarrow (f\times h,g\times e)\in D$ $\Rightarrow (f\circ g)\times(h\circ e)=(f\times h)\circ(g\times e)$ nach Definition 2.1.2 (4) und (3).

b) Sei $X=((M,\times,\circ_D),(\emptyset,\times),L,R)$ eine X-Kategorie, dann ist $C=((M,\circ_D),\emptyset,L,R)$ eine Kategorie. Mit $D:=\{(f,g)\in MxM: R(f)=L(g)\}$ ist nach Satz 3.1.6 (b) $(M,\circ_D)$ ein Polyid und es existiert genau eine bijektive Abbildung $\varphi:1_M\to\emptyset$ mit $L=\varphi o 1_l$ und $R=\varphi o 1_r$.

Zeige: $\varphi:(1_M,\times)\to(\mathcal{O},\times)$ ist ein Monoiden-Isomorphismus und $(M,\times,\circ_D)$ ist ein Monopolyid:
Da X eine X-Kategorie ist, sind L und R Monoiden-Homomorphismen von $(M,\times)$ nach $(\mathcal{O},\times)$. Sind $f,g\in 1_M \Rightarrow L(f\times g)=L(f)\times L(g) \Leftrightarrow \varphi o1_l(f\times g)=\varphi o1_l(f)\times\varphi o1_l(g) \Leftrightarrow \varphi(f\times g)=\varphi(f)\times\varphi(g)$ nach Satz 1.3.6 (4) $\Rightarrow \varphi$ ist bzgl. "$\times$" ein Monoiden-Homomorphismus. Da φ auch bijektiv ist, ist φ ein Monoiden-Isomorphismus.

1) Monoiden-Homomorphismen bilden Neutralelemente auf Neutralelemente ab. $\Rightarrow 0=\varphi^{-1}(0_{\mathcal{O}})\in 1_M$.
2) $f,g\in 1_M \Rightarrow \varphi(f),\varphi(g)\in\mathcal{O} \Rightarrow \varphi(f)\times\varphi(g)=\varphi(f\times g)\in\mathcal{O} \Rightarrow f\times g=\varphi^{-1}(\varphi(f\times g))\in 1_M$
3) $(f,g),(h,e),(f\times h,g\times e)\in D \Leftrightarrow R(f)=L(g),\ R(h)=R(e)$ und $R(f\times h)=L(g\times e) \Leftrightarrow (f\circ g)\times(h\circ e)=(f\times h)\circ(g\times e)$.
4) $(f,g),(h,e)\in D \Rightarrow R(f)=L(g)$ und $R(h)=L(e) \Rightarrow R(f\times h)=R(f)\times R(h)=L(g)\times L(e)=L(g\times e) \Rightarrow (f\times h,g\times e)\in D$.

q.e.d.

Definition 3.2.8:

Sind $X'=((M',\times',\circ_{D'}),(\mathcal{O}',\times'),L',R')$ und $X=((M,\times,\circ),(\mathcal{O},\times),L,R)$ zwei X-Kategorien, $M'\subseteq M$, $\mathcal{O}'\subseteq\mathcal{O}$ und stimmen die Abbildungen bzw. Operationen von C' und C auf C überein, so heißt C' eine **Unter-X-Kategorie** von C. (In Zeichen $C'\subseteq C$.)

Satz 3.2.10:

Ist $X=((M,\times,\circ_D),(\mathcal{O},\times),L,R)$ eine X-Kategorie und $M'\subseteq M$ bzw. $\mathcal{O}'\subseteq\mathcal{O}$, dann ist $X'=((M',\times,\circ_{D'}),(\mathcal{O}',\times),L',R')$ mit den entsprechend eingeschränkten Abbildungen $\circ$, $\times$, $\times$, L' und R' genau dann eine Unter-X-Kategorie von C, wenn gilt:

(1) M' bzw. $\mathcal{O}'$ ist gegenüber "$\circ$" und "$\times$" bzw. "$\times$" abgeschlossen.
(2) $(M',\times)$ bzw. $(\mathcal{O}',\times)$ ist ein Untermonoid von $(M,\times)$ bzw. $(\mathcal{O},\times)$.
(3) Zu jedem $u\in\mathcal{O}'$ existiert ein $1_u\in M'$ mit $L'(1_u)=R'(1_u)=u$.

Beweis:

"$\Rightarrow$" Sei X' eine Unter-X-Kategorie $\Rightarrow$

1) M' bzw. $\mathcal{O}'$ ist gegenüber "$\circ$" und "$\times$" bzw. "$\times$" abgeschlossen, da sonst im Widerspruch zu Definition 3.2.8.

2) $(M',\times)$ bzw. $(\mathcal{O}',\times)$ ist ein Untermonoid von $(M,\times)$ bzw. $(\mathcal{O},\times)$, da $(M',\times)$ bzw. $(\mathcal{O}',\times)$ wegen (X2) ein Polyid ist, $M'\subseteq M$ bzw. $\mathcal{O}'\subseteq\mathcal{O}$ und M' bzw. $\mathcal{O}'$ nach 1) gegenüber "$\circ$" und "$\times$" bzw. "$\times$" abgeschlossen ist.

3) Mit (X1) und (K3) $\Rightarrow$ Zu jedem $u\in\mathcal{O}'$ existiert eine (partielle) Identität $1_u\in M'$ $L(1_u)=R(1_u)=u$

"$\Rightarrow$" Es gelte (1),(2) und (3) $\Rightarrow$

Wegen (1) ist (K0) erfüllt. (K1) und (K2) sind automatisch erfüllt. (K3) ist wegen (3) erfüllt, da die Operation "$\circ$" auf M' identisch zu "$\circ$" auf M ist. $\Rightarrow$ $C'=((M',\circ_{D'}),\mathcal{O}',L',R')$ ist eine Kategorie.

(X2)-(X5) sind trivialer Weise erfüllt. $\Rightarrow$ X' ist Unter-X-Kategorie von X.

q.e.d.

Satz 3.2.12:

Ist $X=((M,\times,\circ_D),(\mathcal{O},\times),L,R)$ bzw. $X'=((M',\times,\circ_{D'}),(\mathcal{O}',\times),L',R')$ eine X-Kategorie und $\varphi:(1_M,\times)\rightarrow(\mathcal{O},\times)$ bzw. $\varphi':(1_{M'},\times)\rightarrow(\mathcal{O}',\times)$ die nach Satz 3.2.6 (b) eindeutig bestimmten Monoiden-Isomorphismen, dann ist X' genau dann eine Unter-X-Kategorie von X, wenn $(M',\times,\circ_{D'})$ ein Untermonopolyid von $(M,\times,\circ_D)$ und $\varphi'=\varphi|_{1_{M'}}$ ist.

Beweis:

Nach Satz 3.2.6 (b) gilt für φ bzw. φ': $L=\varphi o 1_l$ und $R=\varphi o 1_r$ bzw. $L'=\varphi' o 1_l'$ und $R'=\varphi' o 1_r'$.

"$\Rightarrow$" Sei X' eine Unter-X-Kategorie von X. $\Rightarrow$ $M'\subseteq M$, $\mathcal{O}'\subseteq\mathcal{O}$ und die Abbildungen bzw. Operationen von C' und C stimmen auf C überein. $\Rightarrow$ für $f\in M'$ ist $L'(f)=L(f)$ $\Rightarrow$ $\varphi' o 1_l'(f)=\varphi o 1_l'(f)$. Da $1_l'(f)=f$ für $f\in 1_{M'}$ $\Rightarrow$ $\varphi'(f)=\varphi(f)$ $\forall$ $f\in 1_{M'}$. $\Rightarrow$ $\varphi'=\varphi|_{1_{M'}}$. $\Rightarrow$ $1_{M'}=\varphi'^{-1}(\mathcal{O}')=\varphi^{-1}(\mathcal{O}')\subseteq\varphi^{-1}(\mathcal{O})=1_M$. Nach Satz 3.2.6 (b) ist $(M',\times,\circ_{D'})$ ein Monopolyid und damit nach Satz 2.1.14 ein Untermonopolyid von $(M,\times,\circ_D)$, da $1_{M'}\subseteq 1_M$.

"$\Leftarrow$" Sei $(M',\times,\circ_{D'})$ Untermonopolyid von $(M,\times,\circ_D)$ und $\varphi'=\varphi|_{1_{M'}}$ $\Rightarrow$ $M'\subseteq M$ und $1_{M'}\subseteq 1_M$ nach Satz 2.1.14, sowie $\mathcal{O}'=\varphi'(1_{M'})=\varphi(1_{M'})\subseteq \varphi(1_M)=\mathcal{O}$. Da φ bzw. φ' ein Monoiden-Isomorphismus ist, stimmen auf $\mathcal{O}'$ die Operationen "$\times$'" und "$\times$" überein, da die Operationen "$\times$'" und "$\times$" auf $1_{M'}$ übereinstimmen. Außerdem gilt für $f\in M'$: $L(f)=\varphi' o 1_l'(f)=\varphi o 1_l'(f)=\varphi o 1_l(f)$ $\Rightarrow$ $L'=L|_{M'}$ und analog $R'=R|_{M'}$. $\Rightarrow$ X' ist eine Unter-X-Kategorie von X.

q.e.d.

Satz 3.2.14:

Ist $X=((M,\times,\circ_D),(\mathcal{O},\times),L,R)$ eine X-Kategorie und $\varphi:(1_M,\times)\to(\mathcal{O},\times)$ der nach Satz 3.2.6 eindeutig bestimmte Monoiden-Isomorphismus, so definiert jedes Untermonopolyid $(M',\times,\circ_{D'})$ von $(M,\times,\circ_D)$ genau eine Unter-X-Kategorie $X'=((M',\times,\circ_{D'}),(\mathcal{O}',\times),L',R')=:\boldsymbol{\langle M'\rangle_X}$ von X mit $\mathcal{O}'=\varphi(1_{M'})$ und umgekehrt.

Beweis:

Die Aussage folgt unmittelbar aus Satz 3.2.12, da für ein Untermonopolyid $(M',\times,\circ_{D'})$ die Menge der Identitäten $1_{M'}$ eindeutig bestimmt ist und damit mit $\varphi':=\varphi|_{1_{M'}}$ eine Unter-X-Kategorie eindeutig festgelegt wird. Dabei gilt stets: $\mathcal{O}'=\varphi'(1_{M'})=\varphi(1_{M'})$.

q.e.d.

Satz und Definition 3.2.16:

Ist $X=((M,\times,\circ_D),(\mathcal{O},\times),L,R)$ eine X-Kategorie, $M'\subseteq M$, $\mathcal{O}'\subseteq\mathcal{O}$ und $U_X(M',\mathcal{O}'):=\{X''\subseteq X\colon M'\subseteq M(X'') \text{ und } \mathcal{O}'\subseteq\mathcal{O}(X'')\}$, sowie $(M')_X:=\bigcap_{X''\in U_X(M',\mathcal{O}')} M(X'')$ bzw. $(\mathcal{O}')_X:=\bigcap_{X''\in U_X(M',\mathcal{O}')} \mathcal{O}(X'')$, so ist $\boldsymbol{\langle M',\mathcal{O}'\rangle_X}:=(((M')_X,\times,\circ_{D'}),((\mathcal{O}')_X,\times),L',R')$ eine X-Kategorie. (Dabei sind $\circ$, $\times$, $\times$, L' und R' die Einschränkungen der entsprechenden Abbildungen von X.) $\langle M',\mathcal{O}'\rangle_X$ heißt die **von $(M',\mathcal{O}')$ erzeugte Unter-X-Kategorie.** $(M',\mathcal{O}')$ heißt dann auch ein **Erzeugendensystem** von $\langle M',\mathcal{O}'\rangle_X$. Ist $\mathcal{O}'=\varnothing$, so wird bereits M' als Erzeugendensystem von $\boldsymbol{\langle M'\rangle_X}:=\langle M',\varnothing\rangle_X$ bezeichnet.

Beweis:

Siehe Hotz [HOT74] Seite 251.

Anmerkungen:
Gegenüber der hier verwendeten Nomenklatur sind bei Hotz [HOT74] in den Formeln $(M',\mathcal{O}')$ für ein Erzeugendensystem und $\langle M',\mathcal{O}'\rangle_X$ für eine erzeugte Unter-X-Kategorie die Mengen M' und $\mathcal{O}'$ in der Reihenfolge vertauscht. Die hier verwendete Darstellung ist passend zur Darstellung einer X-Kategorie als das Tupel $((M,\times,\circ_D),(\mathcal{O},\times),L,R)$ gewählt worden.
Desgleichen wird bei Hotz $\langle M'\rangle_X:=\langle M',\mathcal{O}\rangle_X$ definiert. Hier dagegen ist $\langle M'\rangle_X:=\langle M',\varnothing\rangle_X$ die zu $\langle M'\rangle_M$ gehörende Unter-X-Kategorie, wobei $\langle M'\rangle_M$ das von M' in $(M,\times,\circ_D)$ erzeugte Untermonopolyid ist, wie der nachfolgende Satz zeigen wird.

Satz 3.2.18:

Ist $X=((M,\times,\circ_D),(\mathcal{O},\times),L,R)$ eine X-Kategorie, $M'\subseteq M$, $\mathcal{O}'\subseteq\mathcal{O}$ und $\varphi:(1_M,\times)\to(\mathcal{O},\times)$ der nach Satz 3.2.6 (b) eindeutig bestimmte Monoiden-Isomorphismus, dann ist die von $(M',\mathcal{O}')$ erzeugte Unter-X-Kategorie $<M',\mathcal{O}'>_X$ identisch zu der nach Satz 3.2.14 von $<M'\cup\varphi^{-1}(\mathcal{O}')>_M$ definierten Unter-X-Kategorie, d.h. $<M',\mathcal{O}'>_X=$ $<M'\cup\varphi^{-1}(\mathcal{O}'),\varnothing>_X=<M'\cup\varphi^{-1}(\mathcal{O}')>_X$.

Beweis:

$<M',\mathcal{O}'>_X=(((M')_X,\times,\circ_{D'}),((\mathcal{O}')_X,\times),L',R')$ mit $(M')_X:=\bigcap\limits_{X''\in U_X(M',\mathcal{O}')} M(X'')$ bzw. $(\mathcal{O}')_X:=\bigcap\limits_{X''\in U_X(M',\mathcal{O}')}\mathcal{O}(X'')$, wobei $U_X(M',\mathcal{O}'):=\{X''\subseteq X\colon M'\subseteq M(X'')$ und $\mathcal{O}'\subseteq\mathcal{O}(X'')\}$ ist. Für $G':=M'\cup\varphi^{-1}(\mathcal{O}')$ ist $<G'>_M=\bigcap\limits_{M''\in U_M(G')} M''$, wobei $U_M(G')$ die Menge aller Untermonopolyide von $(M,\times,\circ_D)$ ist, die G' enthalten. Ersetzt man M' durch $M'\cup\varphi^{-1}(\mathcal{O}')$ und $\mathcal{O}'$ durch $\varnothing$, so ist leicht zu sehen: $<M'\cup\varphi^{-1}(\mathcal{O}')>_X=<M'\cup\varphi^{-1}(\mathcal{O}'),\varnothing>_X=$ $<<M'\cup\varphi^{-1}(\mathcal{O}')>_M,\varnothing>_X$.
Nach Satz 3.2.14 entspricht jedem Untermonopolyid $(M'',\times,\circ_D)$ von $(M,\times,\circ_D)$ eine Unter-X-Kategorie $X''=((M'',\times,\circ_D),(\mathcal{O}'',\times),L'',R'')$ von $X=((M,\times,\circ_D),(\mathcal{O},\times),L,R)$ mit $\mathcal{O}''=\varphi(1_{M''})$ bzw. $1_{M''}=\varphi^{-1}(\mathcal{O}'')$ und umgekehrt.
Damit gilt für eine Unter-X-Kategorie $((M'',\times,\circ_D),(\mathcal{O}'',\times),L'',R'')$ mit $M'\subseteq M$ und $\mathcal{O}'\subseteq\mathcal{O}$: $\varphi^{-1}(\mathcal{O}')\subseteq\varphi^{-1}(\mathcal{O}'')=1_{M''}\subseteq M''$ und $\varphi(M'\cap 1_M)\subseteq$ $\varphi(M''\cap 1_M)=\varphi(1_{M''})=\mathcal{O}''$ $\Rightarrow$ $M'\cup\varphi^{-1}(\mathcal{O}')\subseteq M''$ und $\mathcal{O}'\cup\varphi(M'\cap 1_M)\subseteq\mathcal{O}''$ $\Rightarrow$ $<M',\mathcal{O}'>_X=<M'\cup\varphi^{-1}(\mathcal{O}'),\mathcal{O}'\cup\varphi(M'\cap 1_M)>_X$. Für die Unter-X-Kategorie $<M'\cup\varphi^{-1}(\mathcal{O}'),\varnothing>_X$ ist $\varphi((M'\cup\varphi^{-1}(\mathcal{O}'))\cap 1_M)=\varphi(M'\cap 1_M)\cup\mathcal{O}'$ $\Rightarrow$ $<M'\cup\varphi^{-1}(\mathcal{O}'),\mathcal{O}'\cup\varphi(M'\cap 1_M)>_X\subseteq<M'\cup\varphi^{-1}(\mathcal{O}'),\varnothing>_X$. Umgekehrt ist stets $<M'\cup\varphi^{-1}(\mathcal{O}'),\varnothing>_X\subseteq<M'\cup\varphi^{-1}(\mathcal{O}'),\mathcal{O}'\cup\varphi(M'\cap 1_M)>_X$. $\Rightarrow$ $<M'\cup\varphi^{-1}(\mathcal{O}'),\varnothing>_X=$ $<M'\cup\varphi^{-1}(\mathcal{O}'),\mathcal{O}'\cup\varphi(M'\cap 1_M)>_X$.

q.e.d.

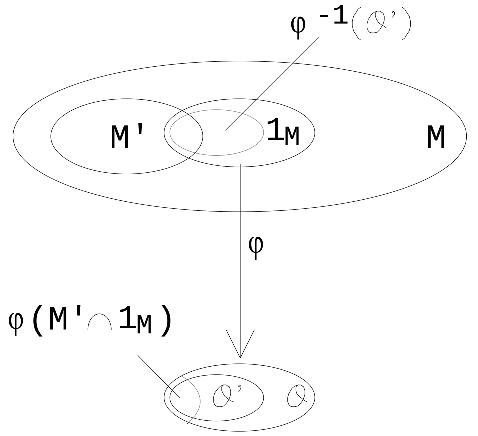

Bild 3.10: Skizze zu Beweis von Satz 3.2.18.

Definition 3.2.20:

Sind $X_1=((M_1,\times_1,\circ_{D1}),(\mathcal{O}_1,\times_1),L_1,R_1)$ und $X_2=((M_2,\times_2,\circ_{D2}),(\mathcal{O}_2,\times_2),L_2,R_2)$ zwei X-Kategorien, dann heißt ein Funktor $\phi=(\phi_M,\phi_{\mathcal{O}})$ ein **X-Funktor**, wenn ϕ_M und $\phi_{\mathcal{O}}$ Monoiden-Homomorphismen bzgl. "$\times$" bzw. "$\times$" sind.

$$\begin{tikzcd}
(M_1,\times_1,\circ_{D1}) \arrow[r, "\phi_M"] \arrow[d, shift right, "L_1"'] \arrow[d, shift left, "R_1"] & (M_2,\times_2,\circ_{D2}) \arrow[d, shift right, "L_2"'] \arrow[d, shift left, "R_2"] \\
(O_1,\times_1) \arrow[r, "\phi_O"'] & (O_2,\times_2)
\end{tikzcd}$$

Bild 3.12: Schematische Darstellung zweier X-Kategorien mit X-Funktor.

Satz 3.2.22:

Sind $X_1=((M_1,\times_1,\circ_{D1}),(\mathcal{O}_1,\times_1),L_1,R_1)$ und $X_2=((M_2,\times_2,\circ_{D2}),(\mathcal{O}_2,\times_2),L_2,R_2)$ zwei X-Kategorien, $\varphi_1:(1_{M_1},\times_1)\to(\mathcal{O}_1,\times_1)$ bzw. $\varphi_2:(1_{M_2},\times_2)\to(\mathcal{O}_2,\times_2)$ die nach Satz 3.2.6 (b) eindeutig bestimmten Monoiden-Isomorphismen, dann ist $(\phi_M,\phi_{\mathcal{O}})$ genau dann ein X-Funktor von X_1 nach X_2, wenn ϕ_M ein Monopolyiden-Homomorphismus ist mit $\phi_{\mathcal{O}}=\varphi_2 \circ \phi_M \circ \varphi_1^{-1}$.

Beweis:

"$\Rightarrow$" Sei $(\phi_M,\phi_{\mathcal{O}})$ ein X-Funktor von X_1 nach X_2. $\Rightarrow$ ϕ_M ist ein Monoiden-Homomorphismus bzgl. "$\times$". Da $(\phi_M,\phi_{\mathcal{O}})$ auch ein Funktor ist, ist ϕ_M nach Satz 3.1.10 auch ein Polyiden-Homomorphismus bzgl. "$\circ$" mit $\phi_{\mathcal{O}}=\varphi_2 o \phi_M o \varphi_1^{-1}$. Damit ist ϕ_M ein Monopolyiden-Homomorphismus mit $\phi_{\mathcal{O}}=\varphi_2 o \phi_M o \varphi_1^{-1}$.

"$\Leftarrow$" Sei $\phi_M:(M_1,\times_1,\circ_{D_1})\rightarrow(M_2,\times_2,\circ_{D_2})$ ein Monopolyiden-Homomorphismus und $\phi_{\mathcal{O}}:(\mathcal{O}_1,\times_1)\rightarrow(\mathcal{O}_2,\times_2)$ definiert durch $\phi_{\mathcal{O}}:=\varphi_2 o \phi_M o \varphi_1^{-1}$. Nach Satz 3.1.10 ist $(\phi_M,\phi_{\mathcal{O}})$ ein Funktor. Da ϕ_M ein Monopolyiden-Homomorphismus ist, ist ϕ_M auch ein Monoiden-Homomorphismus bzgl. "$\times$". φ_2 und φ_1^{-1} sind nach Definition Monoiden-Homomorphismen bzgl. "$\times$" $\Rightarrow$ $\phi_{\mathcal{O}}=\varphi_2 o \phi_M o \varphi_1^{-1}$ ist ebenfalls ein Monoiden-Homomorphismus bzgl. "$\times$". Damit ist $(\phi_M,\phi_{\mathcal{O}})$ ein X-Funktor.

q.e.d.

Beim Umgang mit X-Kategorien kommt den nachfolgend zu definierenden freien X-Kategorien eine besondere Bedeutung zu.

Definition 3.2.24:

Eine X-Kategorie $X_1=((M_1,\times_1,\circ_{D_1}),(\mathcal{O}_1,\times_1),L_1,R_1)$ heißt **frei**, wenn es eine Teilmenge $M_1'\subseteq M_1$ gibt so, daß sich zu jeder beliebigen X-Kategorie $X_2=((M_2,\times_2,\circ_{D_2}),(\mathcal{O}_2,\times_2),L_2,R_2)$ mit einem Monoiden-Homomorphismus $\phi_{\mathcal{O}}:\mathcal{O}_1\rightarrow\mathcal{O}_2$, eine Abbildung $\phi_{M'}:M_1'\rightarrow M_2$ mit $\phi_{\mathcal{O}}(L_1(f))=L_2(\phi_{M'}(f))$ und $\phi_{\mathcal{O}}(R_1(f))=R_2(\phi_{M'}(f))$ $\forall$ $f\in M_1'$ zu genau einer Abbildung $\phi_M:M_1\rightarrow M_2$ fortsetzen läßt so, daß $\phi=(\phi_M,\phi_{\mathcal{O}})$ ein X-Funktor ist. M_1' heißt dann ein **freies Bestimmendensystem** von X_1. Ist ein freies Bestimmendensystem auch ein Erzeugendensystem (d.h. $<M',\emptyset>_X=X$), so heißt M' ein **freies Erzeugendensystem.**

Im allgemeinen gilt für ein freies Bestimmendensystem M' einer X-Kategorie $X=((M,\times,\circ_D),(\mathcal{O},\times),L,R)$ nicht immer $<M',\emptyset>_X=X$, so daß M' in diesen Fällen kein Erzeugendensystem von ganz X ist. Bei Hotz [HOT74] dagegen wird (abgeleitet von der Aussage $<M',\mathcal{O}>_X=X$) M' auch dann als ein freies Erzeugendensystem bezeichnet, wenn $<M',\emptyset>_X\neq X$ ist. Dies bricht jedoch mit der hier für Monopolyide eingeführten Nomenklatur wie Satz 3.2.30 zeigen wird und überkreuzt sich damit letztendlich auch mit der gängigen Definition des freien Erzeugendensystems eines freien Monoids wie Satz 1.4.16 zeigt.

Satz 3.2.26:

Ist M' ein freies Bestimmendensystem einer X-Kategorie $X=((M,\times,\circ_D),(\mathcal{O},\times),L,R)$, so ist $\langle M',\mathcal{O}\rangle_X=X$.

Beweis:

Siehe Hotz [HOT74] Seite 252 Hilfssatz 2.

Hilfssatz 3.2.28:

Sind $X_1=((M_1,\times_1,\circ_{D_1}),(\mathcal{O}_1,\times_1),L_1,R_1)$ und $X_2=((M_2,\times_2,\circ_{D_2}),(\mathcal{O}_2,\times_2),L_2,R_2)$ zwei X-Kategorien, $\varphi_1:(1_{M_1},\times_1)\to(\mathcal{O}_1,\times_1)$ bzw. $\varphi_2:(1_{M_2},\times_2)\to(\mathcal{O}_2,\times_2)$ die nach Satz 3.2.6 (b) eindeutig bestimmten Monoiden-Isomorphismen, $\phi_{\mathcal{O}}:\mathcal{O}_1\to\mathcal{O}_2$ ein Monoiden-Homomorphismus, $M_1'\subseteq M_1$ und $\phi_{M'}:M_1'\to M_2$ eine Abbildung mit $\phi_{\mathcal{O}}(L_1(f))=L_2(\phi_{M'}(f))$ und $\phi_{\mathcal{O}}(R_1(f))=R_2(\phi_{M'}(f))\ \forall\ f\in M_1'$, dann gilt:

(1) $(f,g)\in D_1\cap M_1'\mathrm{x}M_1' \Rightarrow (\phi_{M'}(f),\phi_{M'}(g))\in D_2$.

(2) $\phi'':(1_{M_1},\times_1)\to(1_{M_2},\times_2)$ mit $\phi'':=\varphi_2{}^{-1}\mathrm{o}\phi_{\mathcal{O}}\mathrm{o}\varphi_1$ ist ein Monoiden-Homomorphismus mit der Eigenschaft $\phi''(1_{l1}(f))=1_{l2}(\phi_{M'}(f))$ und $\phi''(1_{r1}(f))=1_{r2}(\phi_{M'}(f))\ \forall\ f\in M_1'$.

Beweis:

1) $(f,g)\in D_1\cap M_1'\mathrm{x}M_1' \Rightarrow R_1(f)=L_1(g) \Rightarrow \phi_{\mathcal{O}}(R_1(f))=\phi_{\mathcal{O}}(L_1(g)) \Rightarrow R_2(\phi_{M'}(f))=L_2(\phi_{M'}(g)) \Rightarrow (\phi_{M'}(f),\phi_{M'}(g))\in D_2$.

2) $\phi'':=\varphi_2{}^{-1}\mathrm{o}\phi_{\mathcal{O}}\mathrm{o}\varphi_1$ ist ein Monoiden-Homomorphismus, da φ_1, $\phi_{\mathcal{O}}$ und $\varphi_2{}^{-1}$ Monoiden-Homomorphismen sind. Nach Satz 3.2.6 (b) ist $L_1=\varphi_1\mathrm{o}1_{l1}$ und $R_1=\varphi_1\mathrm{o}1_{r1}$ bzw. $L_2=\varphi_2\mathrm{o}1_{l2}$ und $R_2=\varphi_2\mathrm{o}1_{r2}$. Für $f\in M_1'$ ist $\phi_{\mathcal{O}}(\varphi_1(1_{l1}(f))) = \phi_{\mathcal{O}}(L_1(f))=L_2(\phi_{M'}(f))=\varphi_2(1_{l2}(\phi_{M'}(f))) \Rightarrow \varphi_2{}^{-1}\mathrm{o}\phi_{\mathcal{O}}\mathrm{o}\varphi_1\mathrm{o}1_{l1}(f)=\varphi_2{}^{-1}(\varphi_2(1_{l2}(\phi_{M'}(f)))) \Rightarrow \phi''(1_{l1}(f))=1_{l2}(\phi_{M'}(f))$. Analog ist $\phi''(1_{r1}(f))=1_{r2}(\phi_{M'}(f))$.

q.e.d.

Satz 3.2.30:

Ist $X=((M,\times,\circ_D),(\mathcal{O},\times),L,R)$ eine X-Kategorie, dann ist M' genau dann ein freies Bestimmendensystem von X, wenn M' ein freies Bestimmendensystem des Monopolyiden $(M,\times,\circ_D)$ ist.

Beweis:

"$\Rightarrow$" Sei $X_1=((M_1,\times,\circ_{D_1}),(\mathcal{O}_1,\times),L_1,R_1):=((M,\times,\circ_D),(\mathcal{O},\times),L,R)$ eine freie X-Kategorie. $\Rightarrow$ Es existiert ein freies Bestimmendensystem $M_1'\subseteq M_1$.
Sei $(M_2,+,\cdot_{D_2})$ ein Monopolyid, $\phi'':(1_{M_1},\times)\to(1_{M_2},+)$ ein Monoiden-Homomorphismus und $\phi_{M'}:M_1'\to M_2$ eine Abbildung mit

den Eigenschaften (F1) und (F3) von Definition 2.5.10.
Nach Satz 2.1.16 ist $(1_{M_2},+,\cdot_{D_2'})$ ein Untermonopolyid von $(M_2,+,\cdot_{D_2})$ und damit $(1_{M_2},+)$ ein Monoid. Sei φ_2 die identische Abbildung auf 1_{M_2}, dann ist $X_2:=((M_2,+,\cdot_{D_2}),(1_{M_2},+),\varphi_2 o 1_{l2},\varphi_2 o 1_{r2})$ nach Satz 3.2.6 (a) eine X-Kategorie. Sei weiter $\varphi_1:(1_{M_1},\times)\rightarrow(\mathcal{O}_1,\times)$ der nach Satz 3.2.6 (b) eindeutig bestimmte Monoiden-Isomorphismus, dann ist $\phi_{\mathcal{O}}:(\mathcal{O}_1,\times)\rightarrow M_2$ mit $\phi_{\mathcal{O}}:=\varphi_2 o \phi'' o \varphi_1^{-1}$ ein Monoiden-Homomorphismus, da φ_2, ϕ'' und φ_1^{-1} Monoiden-Homomorphismen sind.
Mit (F3) gilt dann: $\phi_{\mathcal{O}}(L_1(f))=\varphi_2 o \phi'' o \varphi_1^{-1}(\varphi_1 o 1_{l1}(f))=\varphi_2(\phi''(1_{l1}(f)))=\varphi_2(1_{l2}(\phi_{M'}(f)))=\varphi_2 o 1_{l2}(\phi_{M'}(f))=L_2(\phi_{M'}(f))$ und analog $\phi_{\mathcal{O}}(R_1(f))=R_2(\phi_{M'}(f))$ $\forall$ $f\in M_1'$. Da X_1 eine freie X-Kategorie ist existiert damit genau eine Fortsetzung $\phi_M:M_1\rightarrow M_2$ von $\phi_{M'}$ so, daß $(\phi_M,\phi_{\mathcal{O}})$ ein X-Funktor von X_1 nach X_2 ist. Nach Satz 3.2.22 ist ϕ_M Monopolyiden-Homomorphismus mit $\phi_{\mathcal{O}}=\varphi_2 o \phi_M o \varphi_1^{-1}$. Wegen $\phi_{\mathcal{O}}:=\varphi_2 o \phi'' o \varphi_1^{-1}$ $\Rightarrow$ $\varphi_2 o \phi'' o \varphi_1^{-1}=\varphi_2 o \phi_M o \varphi_1^{-1}$ $\Rightarrow$ $\phi''(f)=\phi_M(f)$ für $f\in 1_{M_1}$. ϕ_M ist eindeutig bestimmt, da der zugehörige X-Funktor eindeutig bestimmt ist. (Sonst würde aus Satz 3.2.22 ein Widerspruch folgen.) $\Rightarrow$ M' ist ein freies Bestimmendensystem des Monopolyiden $(M_1,\times,\circ_{D_1})$.

"$\Leftarrow$" Sei $X_1=((M_1,\times,\circ_{D_1}),(\mathcal{O}_1,\times),L_1,R_1):=((M,\times,\circ_D),(\mathcal{O},\times),L,R)$ eine X-Kategorie und $(M_1,\times,\circ_{D_1})=(M,\times,\circ_D)$ ein freies Monopolyid, dann existiert ein freies Bestimmendensystem $M_1'\subseteq M_1$ von $(M_1,\times,\circ_{D_1})$. Sei weiter $X_2:=((M_2,+,\cdot_{D_2}),(\mathcal{O}_2,+),L_2,R_2)$ eine X-Kategorie, $\phi_{\mathcal{O}}:(\mathcal{O}_1,\times)\rightarrow(\mathcal{O}_2,+)$ ein Monoiden-Homomorphismus und $\phi_{M'}:M_1'\rightarrow M_2$ eine Abbildung mit der Eigenschaft $\phi_{\mathcal{O}}(L_1(f))=L_2(\phi_{M'}(f))$ und $\phi_{\mathcal{O}}(R_1(f))=R_2(\phi_{M'}(f))$ $\forall$ $f\in M_1'$. Da $(M_1,\times,\circ_{D_1})$ ein freies Monopolyid, $\phi'':(1_{M_1},\times)\rightarrow(1_{M_2},+)$ mit $\phi'':=\varphi_2^{-1} o \phi_{\mathcal{O}} o \varphi_1$ ein Monoiden-Homomorphismus ist und $\phi_{M'}$ nach Hilfssatz 3.2.28 die Bedingungen (F1) und (F3) von Definition 2.5.10 erfüllt, existiert genau eine Fortsetzung $\phi_M:M_1\rightarrow M_2$ von $\phi_{M'}$ so, daß ϕ_M ein Monopolyiden-Homomorphismus ist mit $\phi''(f)=\phi_M(f)$ $\forall$ $f\in 1_{M_1}$. $\Rightarrow$ $\phi_{\mathcal{O}}=\varphi_2 o \varphi_2^{-1} o \phi_{\mathcal{O}} o \varphi_1 o \varphi_1^{-1}=\varphi_2 o \phi'' o \varphi_1^{-1}=\varphi_2 o \phi_M o \varphi_1^{-1}$. Damit ist $(\phi_M,\phi_{\mathcal{O}})$ nach Satz 3.2.22 ein X-Funktor von X_1 nach X_2. $(\phi_M,\phi_{\mathcal{O}})$ ist eindeutig bestimmt, da $\phi_{\mathcal{O}}$ vorgegeben und ϕ_M eindeutig bestimmt ist. Damit ist M_1' ein freies Bestimmendensystem von X_1.

q.e.d.

Hat man also gezeigt, daß ein Monopolyid frei ist, so ist jede X-Kategorie das dieses Monopolyid enthält eine freie X-Kategorie. Dieser Umstand erspart es also für X-Kategorien mit demselben freien Monopolyiden den Beweis der "Freiheit" immer wieder zu führen.

3.3 Bipolyide und Bikategorien

Auf die Theorie der Bipolyide soll nur kurz eingegangen werden. Bipolyide stehen jedoch in einer ähnlichen Beziehung zu den von Ch. Ehresmann [EHR65] eingeführten Bikategorien (Doppelkategorien) wie Polyide zu Kategorien.

Wenn nachfolgend zwei Polyide über derselben Menge B auftreten, so kennzeichnet man die zur partiellen Operation "$\otimes$" gehörenden Mengen und Abbildungen durch Unterstreichung, z.B. $\underline{D}$, $\underline{1}_B$, $\underline{1}_l$, $\underline{1}_r$.

Definition 3.3.2:

Das Tupel $(B,\otimes_{\underline{D}},\circ_D)$ soll genau dann ein **Bipolyid** heißen, wenn sowohl $(B,\otimes_{\underline{D}})$ als auch $(B,\circ_D)$ ein Polyid ist und es gilt:

(1) Es existiert genau ein Element $0\in\underline{1}_B\cap 1_B$

(2a) $f,g\in 1_B \Rightarrow (f,g)\in\underline{D}$ und $f\otimes g\in 1_B$
(2b) $f,g\in\underline{1}_B \Rightarrow (f,g)\in D$ und $f\circ g\in\underline{1}_B$

(3) $(f,g),(h,e)\in D$, $(f,h),(g,e)\in\underline{D}$, $(f\circ g,h\circ e)\in\underline{D}$ und $(f\otimes h,g\otimes e)\in D$
$\Leftrightarrow (f\circ g)\otimes(h\circ e)=(f\otimes h)\circ(g\otimes e)$

(4) $(f,g),(h,e)\in D$ und $(f,h),(g,e)\in\underline{D} \Rightarrow$
$(f\otimes h,g\otimes e)\in D$ und $(f\circ g,h\circ e)\in\underline{D}$

Mit der hier angegebenen Definition soll aufgezeigt werden, daß Monopolyide eine spezielle Klasse von Bipolyiden darstellen, was leicht durch Vergleich der Bedingungen (1)-(4) verifiziert werden kann, wenn man berücksichtigt, daß gilt:

Zu (2a) bzw. (2b) ist äquivalent:

(2a') $f,g\in 1_B \Rightarrow (f,g),(g,f)\in\underline{D}$ und $f\otimes g,g\otimes f\in 1_B$
(2b') $f,g\in\underline{1}_B \Rightarrow (f,g),(g,f)\in D$ und $f\circ g,g\circ f\in\underline{1}_B$

Aus (1) und (2a') bzw. (2b') $\Rightarrow (1,0),(0,1)\in\underline{D}\ \forall\ 1\in 1_B$ bzw. $(\underline{1},0),(0,\underline{1})\in D\ \forall\ \underline{1}\in\underline{1}_B$.

(Angaben zur Anwendung und Definition von Bikategorien findet man zum Beispiel bei P. Molitor [MOL88] oder M. Hasse und L. Michler [HAS66].)

Literaturangaben

[EHR65] Ch. Ehresmann, "Categories et structures", Dumond, Paris (1965)

[FRE66] P. Freyd, "Abelian Categories", Harper & Row, (1966)

[HAS66] M. Hasse und L. Michler, "Theorie der Kategorien", Wissenschaftsverlag, Berlin (1966)

[HEB93] U. Hebisch und H.J. Weinert, "Halbringe", Verlag Teubner, Stuttgart (1993)

[HOE75] H.J. Hoehnke, "Allgemeine Algebra der Automaten" in L. Budach und H.J. Hoehnke, "Automaten und Funktoren", Akademie-Verlag, Berlin (1975), 22-276

[HOT72] G. Hotz und V. Claus, "Automatentheorie und formale Sprachen", Band III, Wissenschaftsverlag, (1972)

[HOT74] G. Hotz, "Schaltkreistheorie", Verlag de Gruyter, (1974)

[HÜB95] J. Hübl, "Syntax und Semantik visueller Datenflußsprachen", Technische Universität München, (1995)

[KAR73] H. Karzel, "Lineare Algebra I und II", Vorlesungsskript, Technische Universität München, (1973)

[KRÖ81] F. Kröger, "Verbandstheorie", Vorlesungsskript, Technische Universität München, (1981)

[LIB81] W. Liebert, "Algebra I und II", Vorlesungsskript, Technische Universität München, (1981)

[MOL88] P. Molitor, "Free Net Algebras in VLSI-Theory", Fundamenta Informatica XI, North-Holland (1988), 117-142

[SÖR79] K. Sörensen, "Lineare Algebra I und II", Vorlesungsskript, Technische Universität München, (1979)

[WÄH81] H. Wähling, "Maß- und Integrationstheorie", Vorlesungsskript, Technische Universität München, (1981)

Verwendete Symbole

$f \circ g$	Operation einer partiellen Halbgruppe
1_P	Menge aller Identitäten aus P
$1_l(u)$	die linksseitige Identität von u
$1_r(u)$	die rechtsseitige Identität von u
$\langle P' \rangle_P$	die von P' erzeugte partielle Unterhalbgruppe
$\langle M' \rangle_M$	das von M' erzeugte Untermonopolyid
$\langle M' \rangle_X$	die von M' erzeugte Unter-X-Kategorie
$u \rho v$	Relation ρ
$[u]$	Äquivalenzklasse von u
$u \rightarrow_\rho v$	u ist bzgl. ρ überführbar in v
$\phi(\rho)$	$\phi(\rho):=\{(\phi(u),\phi(v)): (u,v)\in\rho\}$
M^{-1}	Menge der invertierbaren Elemente aus M
$\overline{M'}$	der neutrale Abschluß von M'
Kern(S)	der Kern der sequentiellen Darstellung S
$\omega_M(S)$	der Wert der sequentiellen Darstellung S
$S^{(j)}$	j-te Spalte der sequentiellen Darstellung S
$S(M,M')$	Menge aller sequentiellen Darstellungen mit $Kern(S)\subseteq M'$
$\overline{\phi'}(S)$	Bild von S unter der übertragbaren Abbildung ϕ'
$\rho_X(M')$	die Menge aller Rechts- und Linkskürzungen bzw. -erweiterungen
$\rho_V(M')$	die Menge aller Vertauschungen
$\rho_Z(M')$	die Menge aller Zerlegungen und Verschmelzungen
$\rho_B(M')$	die Menge aller Überbrückungen
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0$	Menge der natürlichen Zahlen vereinigt mit 0
$\Vert\ \Vert$	ein Monopolyiden Homomorphismus $\Vert\ \Vert:(M,\times,\circ_D)\rightarrow(\mathbb{N}_0,+,+)$
$M^{\Vert 0 \Vert}$	$M^{\Vert 0 \Vert}:=\{f\in M: \Vert f \Vert=0\}$
$\vert S \vert$	$\vert\ \vert:(S(M,M'),\circ_{\mathcal{D}})\rightarrow(\mathbb{N}_0,+)$ mit $\vert S\vert:=\Vert\omega_M(S)\Vert$

Index

Das Ganze ist mehr als die Summe seiner Teile!

Sokrates 470 - 399 v. Chr.