

Syntax und Semantik visueller Datenflußsprachen

Josef Hübl

Achtung! Bei der Konvertierung von Word 2.0 nach Word 2002 gab es einige Probleme. Wenn Sie das Originaldokument in Papierformat haben möchten, senden Sie bitte eine Mail an Josef.Huebl@sss.de.

(Stand: 28.06.2006)

Josef.Huebl@sss.de

Danksagung

Ich möchte diese Gelegenheit nutzen, um all jenen Professoren der Technischen Universität München zu danken, von denen ich während meines Studiums in den Jahren 1979-1984 eine fundierte mathematische Ausbildung erhielt. Namentlich seien hier diejenigen hervorgehoben, deren Vorlesungsskripten ich auch für diese Arbeit als Nachschlagewerk zu Rate gezogen habe. Dies sind: Prof. Dr. F. Kröger, Prof. Dr. W. Liebert, Prof. Dr. K. Sörensen, Prof. Dr. G. Tinhofer und Prof. Dr. H. Wähling.

Namentlich möchte ich mich auch bei Prof. Dr. H. Kopp (Fachhochschule Regensburg) bedanken, der mir als mein Dienstvorgesetzter in den Jahren 1991-1993 ermöglichte, wesentliche Teile dieses Werkes im Rahmen eines größeren Projektes zu erarbeiten. Er machte mich auch auf die Theorie von Prof. Dr. G. Hotz aufmerksam.

Bedanken möchte ich mich auch bei all jenen die mich durch Rat und Tat motivierten diese Arbeit zu vollenden. Dabei besonders erwähnen möchte ich meine Ehefrau Bettina Hübl und meinen langjährigen Freund Herbert Öpp.

Regensburg, den 13.05.1995

Josef Hübl

In Teilen wurde diese Arbeit, im Rahmen des an der Fachhochschule Regensburg stattgefundenen Modellversuchs zur "Intergation studenteneigener Rechner in das Studium an Fachhochschulen" (1991-1993), gefördert durch das Bayerische Staatsministerium für Unterricht, Kultus, Wissenschaft und Kunst, sowie das Bundesministerium für Bildung und Wissenschaft.

Vorwort

Diese Publikation hatte im Laufe der Zeit mehrere Arbeitstitel. Der erste Titel "Graphische Oberflächen für CBT-Systeme" war noch stark bestimmt von der Motivation, für interaktive Lernsysteme (CBT-Systeme) eine bedienerfreundliche Oberfläche zur Verfügung zu stellen, die es dem CBT-Autor ermöglicht, auf einfache Art und Weise das Kurs- bzw. Programmverhalten festzulegen. Ausgehend von dieser Motivation, wurde die Idee entwickelt, eine graphisch-interaktive Bedienoberfläche zu realisieren, die es dem Anwender erlaubt, sein Programm aus Bausteinen zusammenzusetzen. Als Vorbild zur Definition des Zusammenwirkens der Bausteine diente die Vorstellung, die einzelnen Unterbausteine als "intelligente" Objekte mit Ein-, Ausgängen und einem eigenen Gedächtnis zu betrachten. Dabei sollte das Zusammenwirken der einzelnen Objekte über das Senden und Empfangen von Signalen realisiert werden.

Um ein derartiges System allerdings formal beschreiben zu können, mußte eine neue graphenorientierte Theorie, nämlich die der Subzentren-Netzwerke entwickelt werden. Diese Theorie geriet durch ihre vielseitige Verwendbarkeit so umfangreich, daß sie den ersten Entwurf dieser Arbeit vollkommen dominierte und der Titel kurzerhand in "Subzentren-Netzwerke" abgeändert wurde.

Bei den weiteren Bemühungen, das favorisierte Modell zu realisieren zeigte sich dann, daß es dazu bereits vielfältige Ansätze in Form visueller Datenflusssprachen gab. Dabei eröffnete die Theorie der Subzentren-Netzwerke die Möglichkeit, deren Struktur bzw. Syntax zu beschreiben. Dieser Aspekt wurde in die folgende Version dieser Publikation mit aufgenommen. Der Titel änderte sich zu "Subzentren-Netzwerke und visuelle Datenflusssprachen".

Ist man jedoch in der Lage die Syntax einer Programmiersprache zu beschreiben, so stellt sich sehr schnell die Frage nach der Semantik. Ausgehend von einer Theorie von G. Hotz zur Algebraisierung des Syntheseproblems von elektronischen Schaltkreisen wurde die algebraische Theorie der Monopolyide entwickelt, um das Problem der Beschreibung der Semantik von visuellen Datenflusssprachen in den Griff zu bekommen. Parallel dazu wurden algebraische Operationen auf Isomorphieklassen von indizierten Subzentren-Netzwerken eingeführt und der Arbeitstitel änderte sich in "Grundlagen zur Definition der Syntax und Semantik visueller Datenflusssprachen".

Die nunmehr vorliegende Version gliedert sich in drei mehr oder weniger unabhängige Teile. Der angewandte Teil entspricht dem 1. Kapitel und setzt sich mit visuellen Datenflusssprachen und dabei insbesondere mit deren Syntax und Semantik auseinander. Die daran anschließenden Kapitel bilden den zweiten Teil und befassen sich mit der Theorie der Subzentren-Netzwerke. Dabei werden in einem abschließenden Kapitel auch

solche Anwendungsbeispiele angesprochen, die mit den visuellen Datenflusssprachen nichts gemeinsam haben. Der dritte Teil schließlich umfaßt die algebraische Theorie der Monopolyide. Da dieser Teil sehr umfangreich geraten ist, und auch unabhängig von dieser Publikation von Bedeutung ist, wurde er als eigenständige Theorie ganz ausgegliedert. (Siehe [HÜB95] und Anhang.) Damit ist der nunmehr knapp und prägnant gefaßte Titel "Syntax und Semantik visueller Datenflusssprachen" durchaus zutreffend.

Um sich einen schnellen Überblick über den Inhalt dieser Publikation zu verschaffen, sei der Leser darauf hingewiesen, daß es dazu genügt den folgenden Abschnitt "Ergebnisse", das 1. Kapitel, sowie die, den weiteren Kapiteln vorangestellten Zusammenfassungen zu studieren. Insbesondere im 1. Kapitel werden dabei die wichtigsten Begriffe und Ergebnisse in anschaulicher Form präsentiert. Für einen detaillierteren Überblick sei dem Leser auch das Studium aller weiteren Kapitel empfohlen, wobei auftretende Beweise und Hilfssätze überlesen werden können, da insbesondere die eingestreuten Kommentare, sowie die vielen erklärenden Abbildungen zu einem vertieften Verständnis beitragen.

Regensburg, den 13.05.1995

Josef Hübl

Vorwort 2

Diese Publikation war ursprünglich gedacht als Dissertation im Bereich theoretischer Informatik und ist deshalb stark mit mathematischen Formalismen durchsetzt, die für den Leser die vielseitigen Anwendungsmöglichkeiten von Subzentrennetzwerken eventuell verschleiern könnte.

Tatsächlich wurden Subzentrennetzwerke so konstruiert, dass sie auf einfache Weise hierarchisch strukturiert werden können und mit vorliegende Theorie kann man belegen, dass hierarchisch strukturierte Netzwerke auf „natürliche Art und Weise“ in flache (nicht hierarchischen) Netzwerke umgewandelt werden können und umgekehrt.

Subzentrennetzwerke bieten die Möglichkeit, unterschiedlichste in der Realität auftretende, hierarchisch strukturierte Netzwerke zu modellieren.

Von hoher praktischer Bedeutung ist die hierarchische Strukturierung von Software in Komponenten um Softwaregroßprojekte in den Griff zu bekommen. Die dabei auftretenden Komponenten mit ihren voneinander anhängigen Interfaces bilden nichts anderes als ein hierarchisch strukturiertes Subzentrennetzwerk. Mit UML 2.0 ist die graphische Darstellung solcher Komponentennetzwerke normiert. Ihre automatische Umsetzung in Programmiercode über Subzentrennetzwerke ist mehr als nahe liegend.

Ein weiteres Beispiel aus der Praxis für hierarchisch strukturierte Subzentrennetzwerke findet sich in modernen Navigationssystemen in denen regionale und überregionale Straßenverbindungen derartige Strukturen vorgeben. Effiziente Routenplanungsalgorithmen machen sich diese Struktur zu Nutze.

Die bisher üblichen Graphen zur Beschreibung von Netzwerken sind zwar grundsätzlich einfacher, unterstützen aber keine Hierarchienbildung. Da hierarchisch strukturierte, netzwerkartige Strukturen in der Realität aber sehr verbreitet sind, ist zu erwarten, dass hierarchisch strukturierte Subzentrennetzwerke eine breite Anwendung in der Praxis finden werden.

Regensburg, den 28.06.2006

Josef Hübl

Ergebnisse

Wie bereits aus dem Titel und dem Vorwort hervorgeht, hatte diese Arbeit zum Ziel Wege aufzuzeigen, wie die Syntax und die Semantik visueller Datenflußsprachen definiert werden können. Vor diesem Hintergrund wurde dazu die graphentheoretische Theorie der Subzentren-Netzwerke, sowie die algebraische Theorie der Monopolyide entwickelt. Mit beiden Theorien zusammen wurden, in Bezug auf die Definition von Syntax und Semantik visueller Datenflußsprachen, folgende Ergebnisse erarbeitet:

1. Es wird ein erweitertes Datenflußmodell vorgestellt, in dem jedes Datenflußnetzwerk über ein formatiertes, geordnetes und typenindexkonformes Subzentren-Netzwerk beschrieben werden kann. Von den vielen Vorteilen, die dieses Modell gegenüber dem der Datenflußgraphen hat, sei hier nur erwähnt, daß es zum einen auf natürliche Art und Weise eine hierarchische Strukturierung der Datenflußnetzwerke erlaubt und zum anderen eine mathematisch korrekte Definition ihrer semantischen Bedeutung zuläßt.
2. Wird auf der Menge aller, vom Anwender einer visuellen Datenflußsprache, erzeugbaren Datenflußnetzwerke bzw. ihrer Äquivalenzklassen ein paralleles Produkt " \times " und ein serielles Produkt " \bullet " definiert, so bilden diese ein Monopolyid $\langle N', \times, \bullet \rangle$ und es zeigt sich, daß die Interpretation eines Datenflußnetzwerkes als die Auswertung eines Monopolyiden-Homomorphismus $\phi: \langle N', \times, \bullet \rangle \rightarrow (F_{\phi}, \times, \bullet_{\phi})$ gesehen werden kann, wobei $(F_{\phi}, \times, \bullet_{\phi})$ ein vorgegebenes Monopolyid von Funktionen ist.
3. Mit dem zweiten Hauptsatz wird gezeigt, daß mit der Festlegung der Interpretation "fast leerer Netzwerke", "einfacher Netzwerke mit Subzentrum" und "einfacher Interimknoten" der, die Interpretation anderer Datenflußnetzwerke ohne echte Zyklen beschreibende Monopolyiden-Homomorphismus bereits vollständig definiert ist. Den konkreten Wert dazu erhält man nach Aussage des dritten Hauptsatzes aus der sequentiellen Darstellung eines solchen Datenflußnetzwerkes.
4. Es wird ein Algorithmus vorgestellt, mit dem zu einem gegebenen Datenflußnetzwerke ohne echte Zyklen eine sequentielle Darstellung ermittelt werden kann und der es damit erlaubt, die unmittelbare Interpretation aller Datenflußnetzwerke ohne echte Zyklen durchzuführen.

Im Bezug auf die Definition von Syntax und Semantik visueller Datenflußsprachen bleibt noch zu erwähnen, daß darüber hinaus noch weitergehende Verfahren vorgestellt werden, die auch die Interpretation von Datenflußnetzwerken mit Zyklen gestatten. Um

den Rahmen dieser Arbeit nicht zu sprengen, wurde jedoch von einer konsequenten und vor allem vollständigen Analyse dieser Verfahren abgesehen.

In einem Ausblick wurde auch der Einsatz von Subzentren-Netzwerken in anderen relevanten Gebieten beleuchtet, wobei sich zeigte, daß sich hier verschiedenste vielversprechende Möglichkeiten auftun. Insbesondere konnte mit dem ersten Hauptsatz ein Ergebnis von G. Hotz aus der Schaltkreistheorie von dieser Seite nochmals bestätigt werden.

Im Bezug auf die praktische Bedeutung dieser Arbeit ist zu erwähnen, daß viele der darin vorgestellten Ergebnisse in ein Projekt an der Fachhochschule Regensburg einfließen, dessen Ziel es war, ein Entwicklungssystem für beliebige visuelle Datenflusssprachen zu realisieren. Dies führte nicht nur zu einem vergleichsweise kurzen Entwicklungszeitraum, sondern auch zu einer äußerst effizienten Implementierung. Da zukünftig in den verschiedensten Bereichen der Wissenschaft und Wirtschaft mit einem wachsenden Bedarf an visuellen Datenflusssprachen zu rechnen ist, kann dieser Aspekt nicht hoch genug bewertet werden.

Inhaltsverzeichnis

Danksagung	2
Vorwort	3
Vorwort 2	5
Ergebnisse	6
Inhaltsverzeichnis	8
Verwendete Symbole	13
1. Visuelle Datenflusssprachen	15
1.1 Einleitung	16
1.2 Das Datenflußmodell	26
1.2.1 Das ursprüngliche Datenflußmodell.....	26
1.2.2 Die Schwächen des ursprünglichen Datenflußmodells.....	27
1.2.3 Ein erweitertes Datenflußmodell.....	28
1.3 Allgemeines zur Interpretation eines Datenflußnetzwerks	35
1.3.1 Das serielle und parallele Produkt.....	35
1.3.2 Das Monopolyid der Äquivalenzklassen.....	37
1.3.3 Das Monopolyid der Funktionen.....	40
1.3.4 Intuitive Forderungen.....	41
1.4 Die Interpretation spezieller Datenflußnetzwerke ...	43
1.5 Die Zerlegung zyklereier Datenflußnetzwerke	46
1.5.1 Allgemeines.....	46
1.5.2 Ein Algorithmus zur Zerlegung eines zyklereien Datenflußnetzwerkes.....	47
1.5.3 Sequentielle Darstellungen.....	58
1.6 Die Interpretation zyklereier Datenflußnetzwerke ..	60
1.7 Die Interpretation allgemeiner Datenflußnetzwerke ..	62
2. Mathematische Grundlagen	65

2.1	Einführung in die Graphentheorie	66
2.2	Tri-zyklische Graphen	69
2.3	Geordnete und indizierte Mengen	71
3.	Unbewertete Subzentren-Netzwerke	79
3.1	Allgemeines über Subzentren-Netzwerke	81
3.2	Offene und geschlossene Subzentren-Netzwerke	91
3.3	Gepackte Subzentren-Netzwerke	96
3.4	Isomorphe Subzentren-Netzwerke	100
3.5	Die Konstruktion von Subzentren-Netzwerken	102
4.	Einfach bewertete Subzentren-Netzwerke	107
4.1	Allgemeines	108
4.2	Benannte und indizierte Subzentren-Netzwerke	109
4.3	Formatierte Subzentren-Netzwerke	114
4.4	Die Konstruktion formatierter Subzentren-Netzwerke	116
5.	Zweifach bewertete Subzentren-Netzwerke	120
5.1	Allgemeines	126
5.2	Das parallele und serielle Produkt zweier Subzentren-Netzwerke	129
5.3	Das natürliche Monopolyid der Äquivalenzklassen ...	139
5.4	Besondere Untermonopolyide und einfache Netzwerke .	146
5.5	Bestimmende Abbildungen	158
5.6	Sequentielle Darstellungen und symmetrische Substitutionsmengen	168
5.6.1	Grundlegende Definitionen.....	168
5.6.2	Spezielle symmetrische Substitutionsmengen..	170
5.6.3	Kriterien für Vertauschungen und Überbrückungen.....	175
5.7	Vollkommene Untermonopolyide	179
5.8	Alpha-vollkommene Untermonopolyide	188
5.9	Die Konstruktion eines Monopolyiden-Homomorphismus'	221

6. Andere relevante Theorien	236
6.1 Einleitung	237
6.2 Knoten- und kantenbewertete Graphen	238
6.3 Graph-Grammatiken	240
6.4 Attributierte Grammatiken	242
6.5 Petri-Netze	246
6.6 Logische Schaltkreise	250
6.7 Strukturierte Systemanalyse	254
A1. Partielle Halbgruppen und Polyide	257
A1.1 Partielle Halbgruppen	258
A1.2 Kongruenzen	261
A1.3 Polyide	265
A2. Monopolyide	269
A2.1 Grundlagen	270
A2.2 Sequentielle Darstellungen	273
A2.3 Monopolyiden-Homomorphismen und übertragbare Abbildungen	275
A2.4 Überführbare sequentielle Darstellungen und Substitutionsbasen	278
A2.5 Vollkommene Monopolyide	281
A2.6 Alpha-vollkommene Monopolyide	283
A2.7 Spezielle symmetrische Substitutionsmengen	285
A2.8 Natürliche Monopolyide	289
Index.....	292

Literaturangaben

Verwendete Symbole

Index

Literaturangaben

- [AGE82] T. Agerwalak and Arvind, "Data flow systems: guest editors' introduction", IEEE Computer **15**, (1982), 10-13.
- [AIM94] Firma AimTech, Benutzerhandbuch IconAuthor 5.0, (1994)
- [BER73] C. Berge, "Graphs and Hypergraphs", North-Holland Publ., (1973)
- [DAV82] A.L. Davis and R.M. Keller, "Data flow program graphs", IEEE Computer **15**, (1982) 175-182.
- [DEN75] J.B. Dennis, "First version of a data flow procedure language", Technical report MIT/LCS/TM-61. Laboratory for Computer science, MIT. (1975)
- [FHR93a] H. Kopp und J. Hübl, "Benutzeranleitung zu DIGISIM 1.0", Fachhochschule Regensburg, Fachbereich AW, (1993)
- [FHR93b] H. Kopp und J. Hübl, "Benutzeranleitung zu VPLE 1.0", Fachhochschule Regensburg, Fachbereich AW, (1993)
- [GAJ82] D.D. Gajski, D.A. Padua, D.J. Kuck and R.H. Kuhn, "A Second Opinion on Data Flow Machines and Languages", IEEE Computer **15**, (1982), 58-70
- [GLI92a] Ephraim P. Glinert, "Visual Programming Environments - Applications and Issues", IEEE Computer Society Press, (1992)
- [GLI92b] Ephraim P. Glinert, "Visual Programming Environments - Paradigms and Systems", IEEE Computer Society Press, (1992)
- [HIL92] Daniel D. Hils, "Visual Languages and Computing Survey: Data Flow Visual Programming Languages", Journal of Visual Languages and Computing **3**, (1992), 69-101
- [HOT72] G. Hotz und V. Claus, "Automatentheorie und formale Sprachen", Band III, Wissenschaftsverlag, (1972)
- [HOT74] G. Hotz, "Schaltkreistheorie", Verlag de Gruyter, (1974)
- [HÜB95] J. Hübl, "Partielle Halbgruppen, Polyide und Monopolyide", Manuskript, (1995)
- [LOE86] J. Loeckx, K. Mehlhorn, R. Wilhelm, "Grundlagen der Programmiersprachen", Teubner-Verlag, (1986)

- [MEN88] S. MacMenamin und J.F. Palmer, "Strukturierte Systemanalyse", Hanser-Verlag, (1988)
- [MYE90] Brad A. Myers, "Taxonomies of Visual Programming and Program Visualization", Journal of Visual Languages and Computing **1**, (1990), 97-123
- [NAG79] M. Nagl, "Graph-Grammatiken", Vieweg-Verlag, (1979)
- [NAT93] Firma National Instruments, Demodiskette: Labview (1993)
- [NOL76] H. Noltemeier, "Graphentheorie", Verlag de Gruyter, (1976)
- [ROS82] B. Rosenstengel, "Petri-Netze", Vieweg-Verlag, (1982)
- [TIN82] G. Tinhofer, "Graphentheoretische Algorithmen in der Unternehmensforschung", Vorlesungsskript Technische Universität München, (1982)

Verwendete Symbole

\emptyset	die leere Menge
\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen
\mathbb{N}_0	Menge der natürlichen Zahlen vereinigt mit 0
\mathbf{T}^*	das freie Monoid über T
λ	der leere Vektor
$\mathbf{1}_M$	Menge aller Identitäten eines Monopolyids
\mathbf{M}^{-1}	Menge der invertierbaren Elemente eines Monopolyids
\mathbf{xpy}	Infixnotation für $(x,y) \in \rho$
$\mathbf{SI}(\mathbf{N})$	$SI(\mathbf{N}) := S(\mathbf{N}) \cup I(\mathbf{N})$
$\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{H})$	Typeneingangsvektor von H
$\bar{\mathbf{A}}(\mathbf{H})$	Typenausgangsvektor von H
(\mathbf{H})	Isomorphieklasse von H
\sim	Äquivalenz
$[\mathbf{H}]$	Äquivalenzklasse von H
$\mathbf{N} \times \mathbf{N}'$	das parallele Produkt
$\mathbf{N} \circ \mathbf{N}'$	das serielle Produkt
$\mathbf{1}_l([\mathbf{H}])$	die linksseitige Identität von [H]
$\mathbf{1}_r([\mathbf{H}])$	die rechtsseitige Identität von [H]
N_T / \sim	Menge der Äquivalenzklassen aller Subzentren-Netzwerke mit Typen aus T
N_T^F / \sim	Menge aller Äquivalenzklassen formatierter Subzentren-Netzwerke
N_T^0	Menge aller formatierten, fast leeren Netzwerke
N_T^P	Menge aller Permutationen
N_T^I	Menge aller Identitäten
N_T^{1A}	eine beliebige Menge von Äquivalenzklassen paarweise zueinander typenindexkonformer, einfacher Netzwerke ohne Schleifen in denen jedes Subzentrum mindestens einen Ausgang besitzt
$N_T^{(1)}$	eine beliebige Menge von Äquivalenzklassen einfacher Interimknoten oder paarweise zueinander typenindexkonformer, einfacher Netzwerke mit oder ohne Schleifen

N''	meist $N'' := N_T^I \cup N_T^{1A}$
N'	meist $N' := N_T^0 \cup N_T^{(1)}$
$\langle N' \rangle$	das von N' erzeugte Untermonopolyid
0	das leere Netzwerk oder Nullfunktion
$\ \cdot \ $	$\ \cdot \ : (N_T / \sim, \times, \bullet_D) \rightarrow (\mathbb{N}_0, +, +)$ mit $\ [H] \ := S(N) + I(N) $
$M^{\ \cdot \ }$	$M^{\ \cdot \ } := \{ [H] \in M : \ [H] \ = 0 \}$
F_\emptyset	Menge von Funktionen
ϕ''	$\phi'' : N_T^1 \rightarrow F_\emptyset$ (siehe Interpretation)
ϕ''	$\phi'' : (N_T^0, \times, \bullet_D) \rightarrow (F_\emptyset, \times, \bullet_\emptyset)$ (siehe Interpretation)
ϕ'	$\phi' := \phi'' \cup \phi''$
Δ_W	$\Delta_W : W^* \rightarrow W$; eine Auswahlabbildung auf W
δ_W	$\delta_W := \Delta_W(\lambda)$ Defaultwert
Θ_S	$\Theta_S : T_S \rightarrow F_\emptyset$ liefert zusammen mit $\Theta_{\bar{S}} : T_{\bar{S}} \rightarrow \emptyset$ passende Funktionen
$SEQ(N')$	Menge aller sequentiellen Darstellungen mit $\text{Kern}(S) \subseteq N'$
$\omega(S)$	Wert einer sequentiellen Darstellung
$s(j)$	die j -te Spalte einer sequentiellen Darstellung
$s \rightarrow_\rho s'$	S und S' sind ineinander überföhrbar
$\rho_X(N')$	Menge aller Rechts- und Linkskürzungen bzw. -erweiterungen in $SEQ(N')$
$\rho_V(N')$	Menge aller Vertauschungen in $SEQ(N')$
$\rho_Z(N')$	Menge aller Zerlegungen und Verschmelzungen in $SEQ(N')$
$\rho_B(N')$	Menge aller Überbrückungen in $SEQ(N')$

A2. Visuelle Datenflußsprachen

1.1 Einleitung	16
1.2 Das Datenflußmodell	26
1.3 Allgemeines zur Interpretation eines Datenflußnetzwerks	35
1.4 Die Interpretation spezieller Datenflußnetzwerke ...	43
1.5 Die Zerlegung zyklereier Datenflußnetzwerke	46
1.6 Die Interpretation zyklereier Datenflußnetzwerke ..	60
1.7 Die Interpretation allgemeiner Datenflußnetzwerke ..	62

Dieses Kapitel müßte eigentlich am Ende dieser Publikation stehen, da zu seinem vollen Verständnis viele Definitionen und Sätze aus den nachfolgenden Kapiteln notwendig sind. Da sein Inhalt andererseits aber eine, in gewisser Weise, allgemein verständliche Zusammenfassung fast aller Ergebnisse darstellt, wurde es an vorderster Stelle plazierte. Wo nötig, werden deshalb neue Begriffe in anschaulicher Form nochmals definiert.

In einem einleitenden Abschnitt werden, anhand einiger Beispiele, die wesentlichen Eigenheiten einer visuellen Datenflußsprache diskutiert. Daraus resultierend, wird ein erweitertes Datenflußmodell vorgestellt, das auf Datenflußnetzwerken bzw. der Theorie der Subzentren-Netzwerke basiert. Um die Semantik solcher Netzwerke festlegen zu können, ist es notwendig für die zugehörigen Äquivalenzklassen algebraische Operationen zu definieren, die es gestatten, die Interpretation eines Datenflußnetzwerkes als die Auswertung eines Monopolyiden-Homomorphismus aufzufassen. Dazu wird unter anderem ein Algorithmus vorgestellt, der zu einem Datenflußnetzwerk ohne echte Zykel eine sequentielle Darstellung ermittelt und damit unmittelbar die Interpretation dieses Netzwerkes erlaubt. Abschließend wird diskutiert, wie dieses Verfahren auch auf Datenflußnetzwerke mit Zykel erweiterbar ist.

A2.1 Einleitung

Die Idee, Datenflußgraphen zur Beschreibung von Programmen zu verwenden, existiert schon seit den 60-iger Jahren [DEN75]. Die wirklich weitverbreitete Anwendung des Datenflußmodells im Zusammenhang mit visuellen Programmiersprachen ist jedoch erst wesentlich später erkennbar [AGE82]. Insbesondere konnten sich erst Mitte der 80-iger Jahre visuelle Datenflußsprachen am Markt etablieren und behaupten. In einigen Bereichen sind sie heute nicht mehr wegzudenken. Zu erwähnen ist hier insbesondere der Bereich Meßtechnik, der von Programmiersystemen, die eine visuelle Datenflußsprache beinhalten, vollkommen dominiert wird.

Das zentrale Konzept des Datenflußmodells ist es, ein Programm als speziellen, antisymmetrischen, gerichteten Graphen darzustellen, wobei Kanten bzw. Pfeile den Fluß der Datenpakete (Token) zwischen den datenverarbeitenden Knoten repräsentieren [DAV82]. Werden Pfeile verwendet, so stehen eingehende Pfeile für Inputdaten und ausgehende Pfeile für Outputdaten. Bei ungerichteten Kanten dagegen stehen in der Regel (linke) Kantenanfänge für Inputdaten und (rechte) Kantenenden für Outputdaten. (Siehe Bild A2.4 bis Bild A2.6.)

Da die datenverarbeitenden Knoten im Datenflußgraphen als Symbole dargestellt werden, die die verarbeitende Funktion der Knoten repräsentieren, sind derartige Datenflußgraphen zumindest für den Kenner selbsterklärend und nicht zuletzt deshalb ist der Gebrauch einer visuellen Datenflußsprache binnen weniger Stunden erlernbar. Die wirkliche Komplexität und auch das Wesen einer visuellen Datenflußsprache ergibt sich jedoch aus der Menge, der dem Anwender zur Verfügung stehenden, verschiedenen Symbole bzw. Grundbausteine. Sie bestimmen in welchem Bereich eine visuelle Datenflußsprache eingesetzt werden kann und welche Arten von Problemen sich damit lösen lassen. Um diesen Aspekt intensiver herauszuarbeiten, soll nun kurz auf zwei verschiedene Systeme eingegangen werden, die sich am Markt besonders gut durchsetzen konnten. (Beschreibungen zu anderen Systemen, zahllose Literaturhinweise und sehr gute Übersichten findet man bei B.A. Myers [MYE90], D.D. Hils [HIL92] oder E.P. Glinert [GLI90a], [GLI90b].)

LabView [NAT93] ist eine visuelle Datenflußsprache zur Meßdatenerfassung und deren Auswertung. Als Grundbausteine werden dem Anwender überwiegend mathematische Funktionen zur Verfügung gestellt, wie sie im ingenieur-wissenschaftlichen Bereich häufig auftreten. Seinen besonderen Charakter erhält LabView allerdings dadurch, daß elementare Bausteine vorhanden sind, die geeignet sind Meßwerte von der Hardware (in der Regel PC-Einsteckkarten) entgegenzunehmen und andere wiederum in der Lage sind, sowohl Daten für den Anwender geeignet

darzustellen und auch von diesem solche entgegenzunehmen. Zum Beispiel gibt es einen Baustein der eine Meßreihe als Graph darstellen kann und einen anderen, der die Eingabe eines numerischen Wertes erlaubt. (Siehe Bild A2.2.) Durch eine Vielzahl solcher Grundbausteine bietet LabView insbesondere auch die Möglichkeit, über ein Datenflußnetzwerk, ein eigenes Userinterface zu definieren. Dabei werden die Objekte des Userinterfaces in einem anderen Fenster dargestellt als das Datenflußnetzwerk, wobei jedoch jedes Objekt der Benutzeroberfläche genau einem Symbol im Datenflußnetzwerk entspricht. D.h., erzeugt der Anwender ein neues Objekt, so wird dem Datenflußnetzwerk ein entsprechendes Symbol hinzugefügt. Die Umkehrung gilt allerdings nur, wenn das hinzugefügte Symbol ein Objekt der Benutzeroberfläche repräsentiert. Der Datenfluß zwischen dem neuen Objekt und den bereits vorhandenen Objekten der Benutzeroberfläche wird anschließend im Datenflußnetzwerk festgelegt, in dem die passenden Verbindungen hergestellt werden. Die Trennung von Datenflußnetzwerk und Userinterface bietet hier nicht nur den Vorteil der Übersichtlichkeit, vielmehr ist es so, daß ein fertiges Programm, das für den Einsatz vor Ort ausgeliefert wird, sich dem Endanwender nur noch in Form der Benutzeroberfläche darstellt. Der interne Aufbau des Programms bzw. das zugehörige Datenflußnetzwerk interessiert dann nicht mehr.

Bei IconAuthor [AIM94] handelt es sich ebenfalls um ein erfolgreiches System mit visueller Datenflußsprache, das ausschließlich dazu dient, eine Benutzeroberfläche zu definieren. Jedoch ist dieses System für den "Programmierer" in einer Hinsicht nicht so komfortabel wie LabView. Zwar werden auch hier das Datenflußnetzwerk und das Userinterface in zwei verschiedenen Fenstern dargestellt, jedoch ist letzteres nur sichtbar, wenn das erstellte Programm ausgeführt wird. Neben anderen Nachteilen hat dies zur Folge, daß der Autor bzw. Anwender von IconAuthor bei größeren Programmen, (als in Bild A2.4 dargestellt,) nur mit Mühe herausfinden kann, welches Objekt der Benutzeroberfläche durch welches Symbol im Datenflußnetzwerk repräsentiert wird.

Da IconAuthor ein Autorensystem ist, das in den verschiedensten Fachgebieten zur Erstellung interaktiver Lernprogramme eingesetzt werden soll, wurde bei seiner Konzeption besonderer Wert auf eine einfache Bedienung gelegt. Aus diesem Grund wird der Datenfluß zwischen den Symbolen nur in eingeschränkter Form unterstützt. Fast alle Daten, die ein Knoten verarbeitet, werden über Dialogboxen dem entsprechenden Symbol zugeordnet. Dies hat zur Folge, daß fast alle Grundbausteine (bis auf die Programmverzweigung) nur einen Ein- und einen Ausgang besitzen. Damit wird erreicht, daß das Datenflußnetzwerk eine besonders übersichtliche Struktur erhält. Insbesondere ermöglicht dies aber auch, daß die Verbindungen zwischen den Knoten vom Editor automatisch erstellt werden können, in dem der Anwender ein Symbol

zwischen zwei anderen oder unter einem anderen Symbol plaziert.

Als Abschluß der Diskussion um IconAuthor soll noch kurz auf die Menge der Grundbausteine eingegangen werden, die den Charakter dieses Systems prägen. Da bei IconAuthor im Normalfall zwischen den Symbolen fast keine Daten ausgetauscht werden, ist es nicht verwunderlich, daß es so gut wie keine

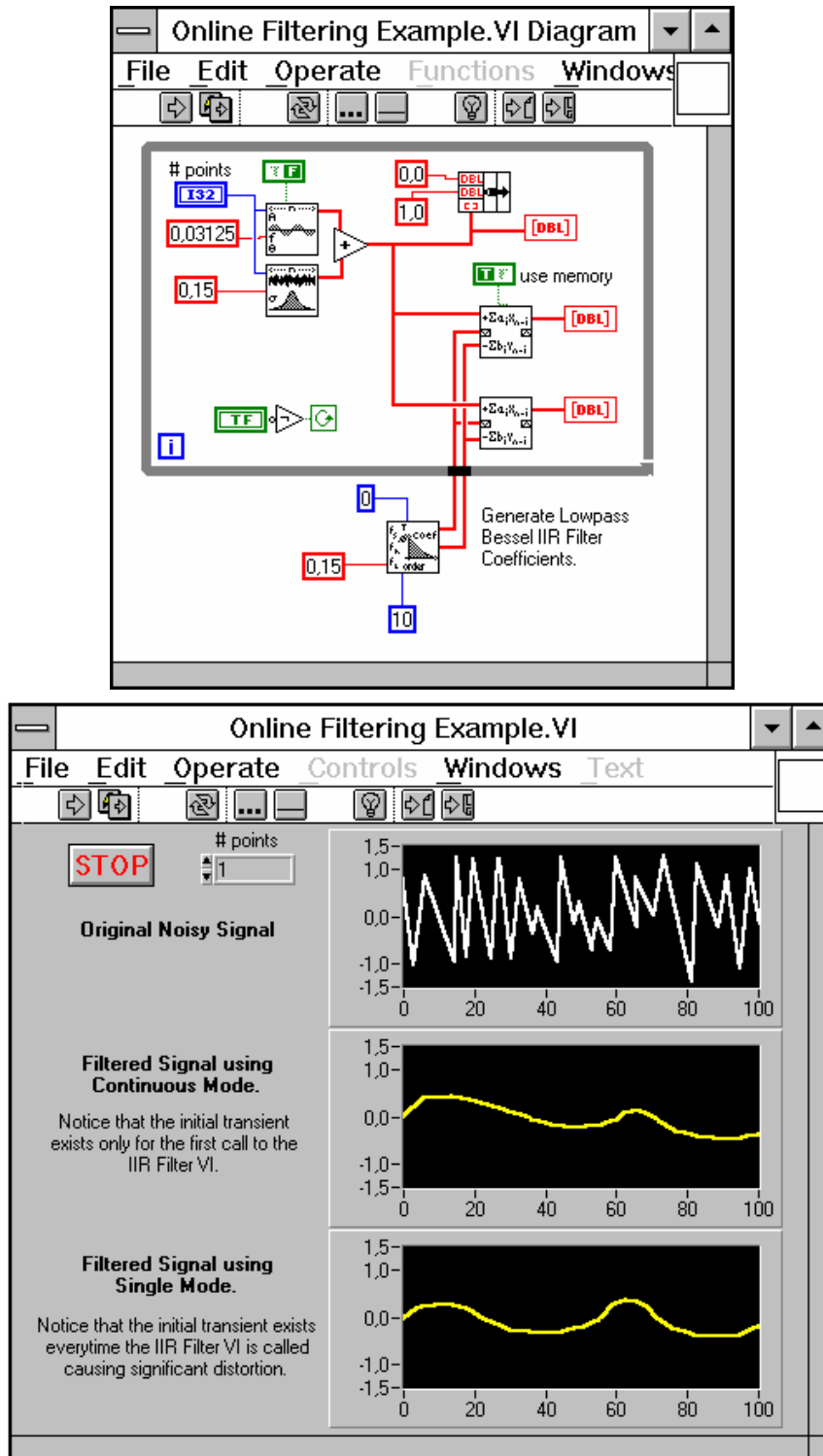


Bild A2.2: Das Editierfenster (oben) und das Anwendungsfenster (unten) des Meßdatenauswertungssystems LabView. Durch das Anklicken eines Objekts auf dem Anwendungsfenster kann das zugehörige Symbol im Datenflußplan ermittelt werden.

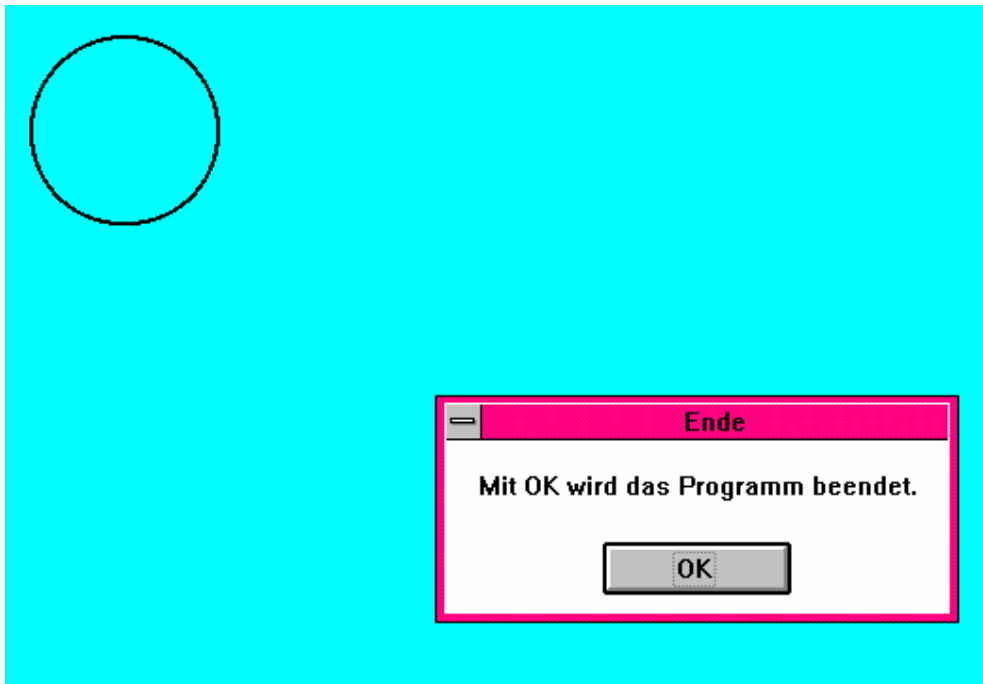
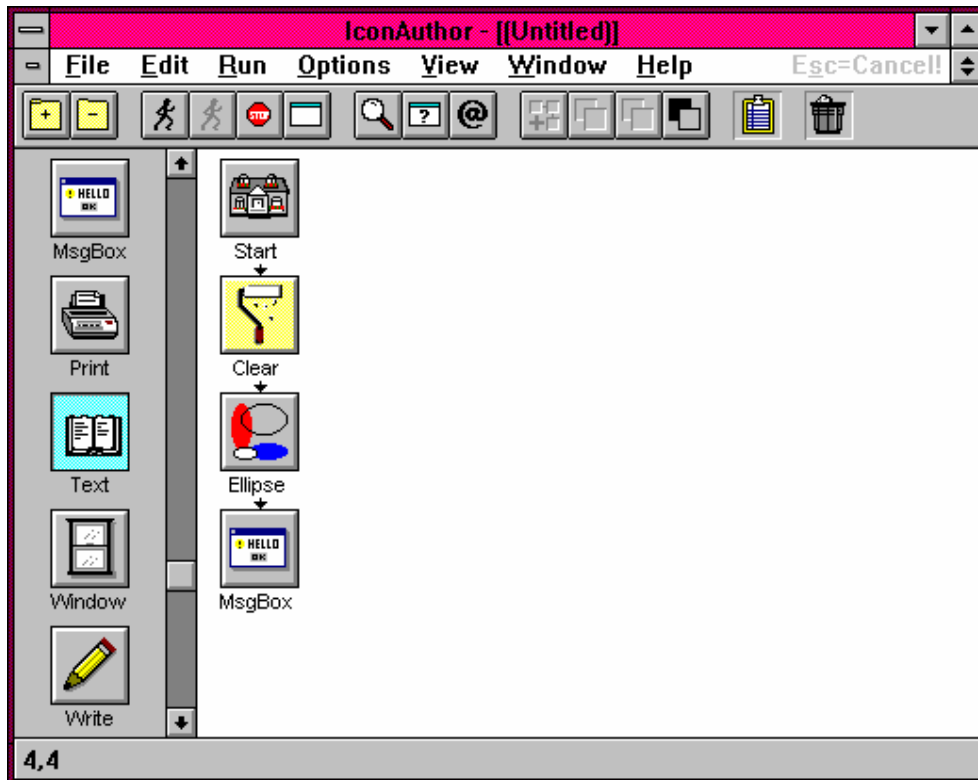


Bild A2.4: Das Editierfenster (oben) und das Anwendungsfenster (unten) des Autorensystems IconAuthor. Das dargestellte Programm löscht den Bildschirm, zeichnet einen Kreis und wartet nach der Ausgabe einer Nachricht auf die Eingabe des Anwenders. Danach beendet es sich automatisch.

Grundbausteine mit arithmetischen oder mathematischen Funktionen gibt. Man findet dort jedoch alle Grundbausteine, die notwendig sind, vom Anwender interaktive Eingaben über Maus und Tastatur entgegenzunehmen, Graphik wie z.B. Linien, gefüllte Flächen, Text, usw. oder multimediale Ausgaben wie z.B. Animationssequenzen und Videoclips am Bildschirm darzustellen. Letzteres beinhaltet natürlich auch die Ausgabe des Tons über Kopfhörer oder Lautsprecher. Es gibt aber auch Grundbausteine, die unabhängig von der Darbietung von Videoclips den Einsatz von Musik und Sprache zur Untermalung des Lehrstoffes erlauben.

Da sowohl LabView als auch IconAuthor von ihrer Komplexität und ihrem Aufbau her nicht geeignet sind, den Gebrauch bzw. die Anwendung des Editors einer visuellen Datenflusssprache kurz und prägnant darzustellen, soll dieser Aspekt nachfolgend anhand des Systems VPLE [FHR93b] bzw. der visuellen Datenflusssprache DIGISIM [FHR93a] erörtert werden.

VPLE (Visual Programming Language Environment) ist ein Programmiersystem, mit dem es möglich ist, je nach Art der Grundbausteine, visuelle Datenflusssprachen unterschiedlichsten Charakters zu erstellen. Es wurde zeitgleich zu dieser Arbeit, an der Fachhochschule Regensburg entwickelt, wobei viele Ergebnisse dieser Arbeit in das Projekt einfließen. Dies führte nicht nur zu einem vergleichsweise kurzen Entwicklungszeitraum, sondern auch zu einer äußerst effizienten Implementierung. Das heißt, Programme die mit VPLE bzw. DIGISIM erstellt wurden, zeigten ein wesentlich besseres Laufzeitverhalten und benötigen weniger Speicherplatz als solche die mit LabView oder IconAuthor erstellt wurden. (Wobei hier angemerkt werden muß, daß sich eine derartige Wertung, aufgrund der verschiedenen Anwendungsbereiche, natürlich nur auf Auffälligkeiten beziehen kann, wie sie ein subjektiver Betrachter wahrnimmt.)

Als exemplarisches Beispiel wurde mit VPLE die visuelle Datenflusssprache DIGISIM entwickelt, die zur Erstellung und Simulation von elektronischen Logikschaltungen verwendet werden kann. Als Grundbausteine stehen dabei nicht nur alle elementaren, elektronischen Operatoren wie UND-Gatter, ODER-Gatter, usw. zur Verfügung. Es sind auch einige Anzeigeelemente wie z.B. Dioden oder Hexadezimalanzeige vorhanden. Auch gibt es interaktive Bauelemente wie z.B. verschiedene Schalter. (Vgl. Bild A2.6 (1), das Menü rechts.) Im graphischen Editor werden alle Bausteine so dargestellt, daß sich die Eingänge links und die Ausgänge rechts des zugehörigen Symbols (Icons) befinden. (In Bild A2.6 (2) besitzt der UND-Baustein links/oben zwei Eingänge und einen Ausgang.) Dabei sind die Ein- bzw. Ausgänge Stellvertreter der Ein- bzw. Ausgabeparameter der Funktion, die durch das Symbol repräsentiert wird.

Möchte der Anwender nun zum Zwecke der Simulation eine eigene Logikschaltung aufbauen, so erzeugt er durch das Öffnen eines

Fensters einen neuen und zunächst noch leeren, zusammengesetzten Baustein, in den er eine geeignete Kombination von elementaren Bausteinen (mit Ein- und Ausgängen) kopiert und deren Ausgänge über Leitungen mit den Eingängen anderer Bausteine verbindet. (Vgl. Bild A2.6 (4).) Dabei kann der Anwender nicht beliebige Aus- und Eingänge miteinander verbinden. Vielmehr zeigt ihm die Farbe eines Aus- oder Eingangs an, von welchem Typ dieser ist. (Dies wird in Bild A2.6 nicht gezeigt.) Während des Erstellens von Leitungen wacht der Editor darüber, daß der Anwender nur Aus- und Eingänge vom selben Typ verbindet.

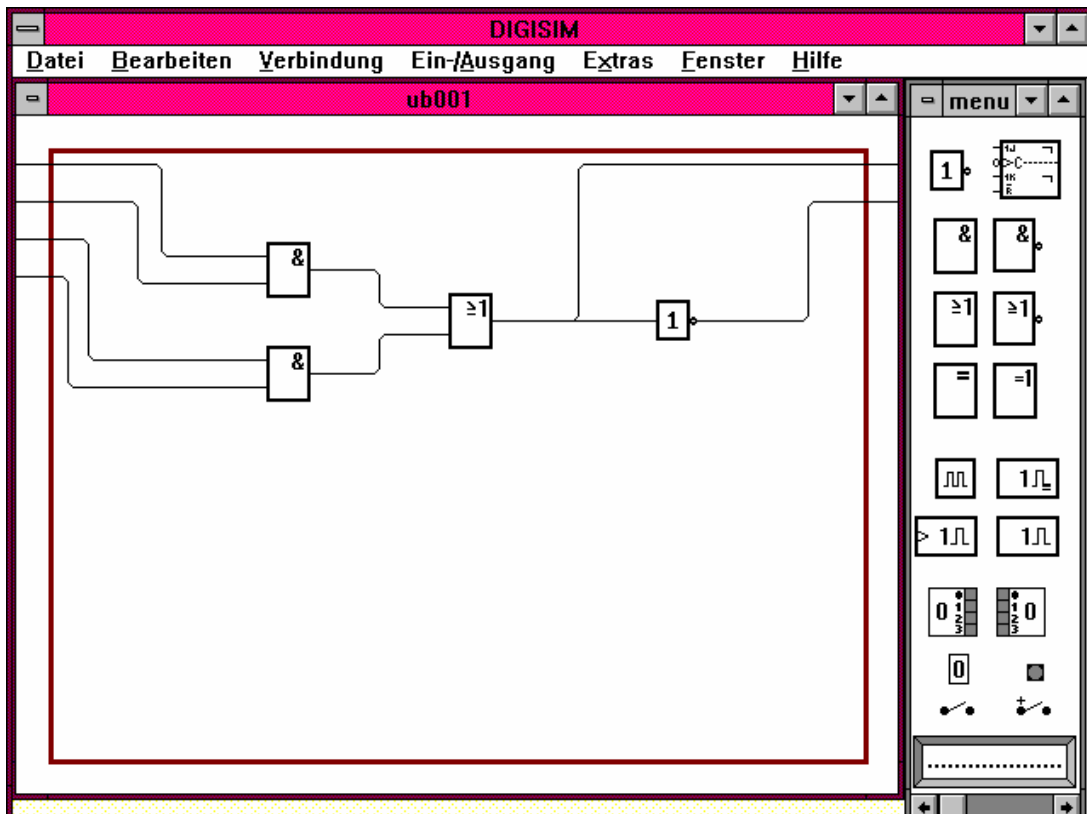
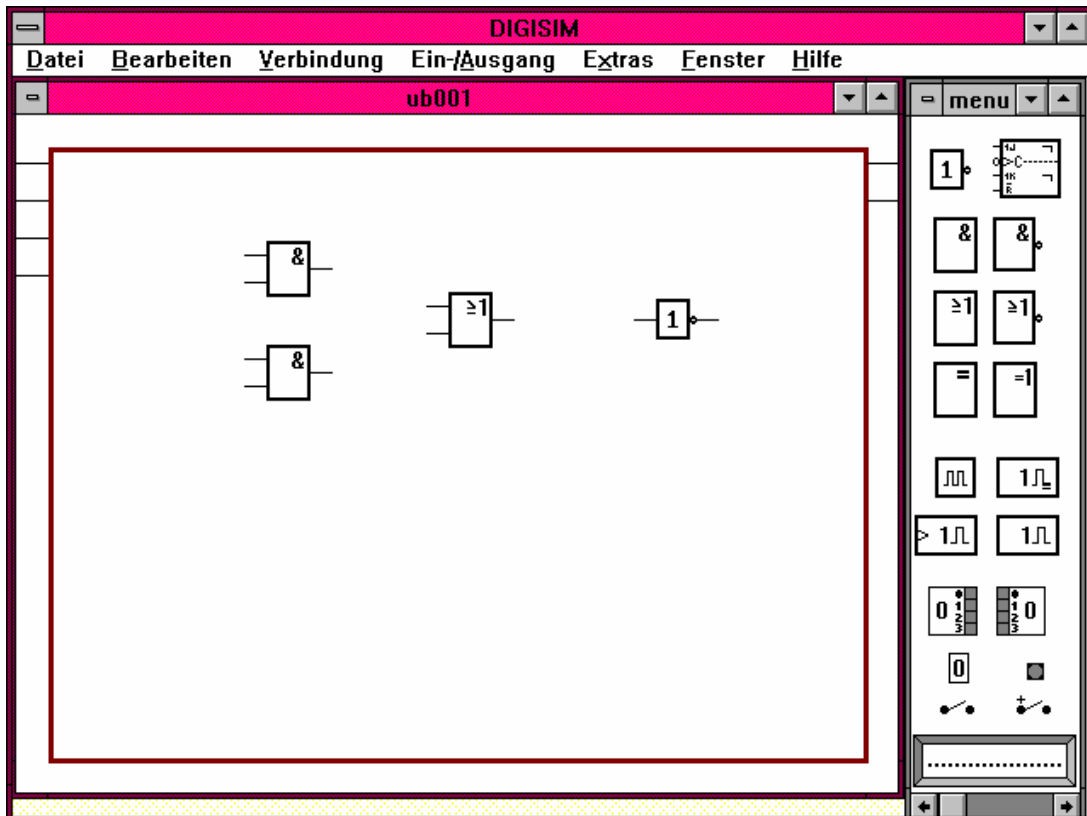
Möchte der Anwender die Funktionalität eines selbst kreierte Bausteins in einem anderen zusammengesetzten Baustein wiederverwenden, so kann er diesen als Unterbaustein dort einfügen. Natürlich macht dies nur dann einen Sinn, wenn der einzufügende zusammengesetzte Baustein selbst wieder Ein- und Ausgänge besitzt. Diese werden bei einem geöffneten Baustein als äußere Ein- bzw. Ausgänge bezeichnet und links bzw. rechts außerhalb des rechteckigen Rahmens dargestellt. Dabei kann der Anwender für einen zusammengesetzten Baustein beliebig viele äußere Ein- und Ausgänge festlegen. (Vgl. Bild A2.6 (3).)

Will der Anwender seine neu konzipierte Logikschaltung testen, so kann er durch einfache Anwahl eines Menüpunktes den Simulator bzw. Interpreter starten. Da DIGISIM auch Elementarbausteine zur Verfügung stellt, die Ein- und Ausgabe von Testwerten ermöglichen, kann der Anwender eine Folge von Testwerten eingeben und, solange der Simulator läuft, ihre Verarbeitung durch die Logikschaltung beobachten. Zeigt sie nicht das gewünschte Verhalten, so kann der Anwender in einem nächsten Arbeitszyklus seine neu entwickelte Schaltung editieren und danach weiteren Testläufen unterwerfen. Er verfährt nach diesem Modus bis er mit seinem erreichten Ergebnis zufrieden ist.

Ausgehend von den oben dargestellten Beispielen von visuellen Datenflusssprachen soll innerhalb dieser Publikation nun folgenden zwei Fragen nachgegangen werden:

- (1) Wie kann die Struktur eines zusammengesetzten Bausteins bzw. eines Datenflußnetzwerkes beschrieben werden?
- (2) Wie kann einem zusammengesetzten Baustein bzw. einem Datenflußnetzwerk durch den Simulator oder Interpreter eine Funktionalität zugeordnet werden?

Mit der Beantwortung dieser Fragen eng verbunden ist die Definition der Syntax und Semantik einer visuellen Datenflusssprache. Dazu wird nun als nächstes das Datenflußmodell von seiner theoretischen Seite vorgestellt. Visuelle oder ergonomische Aspekte spielen dabei keine Rolle mehr.



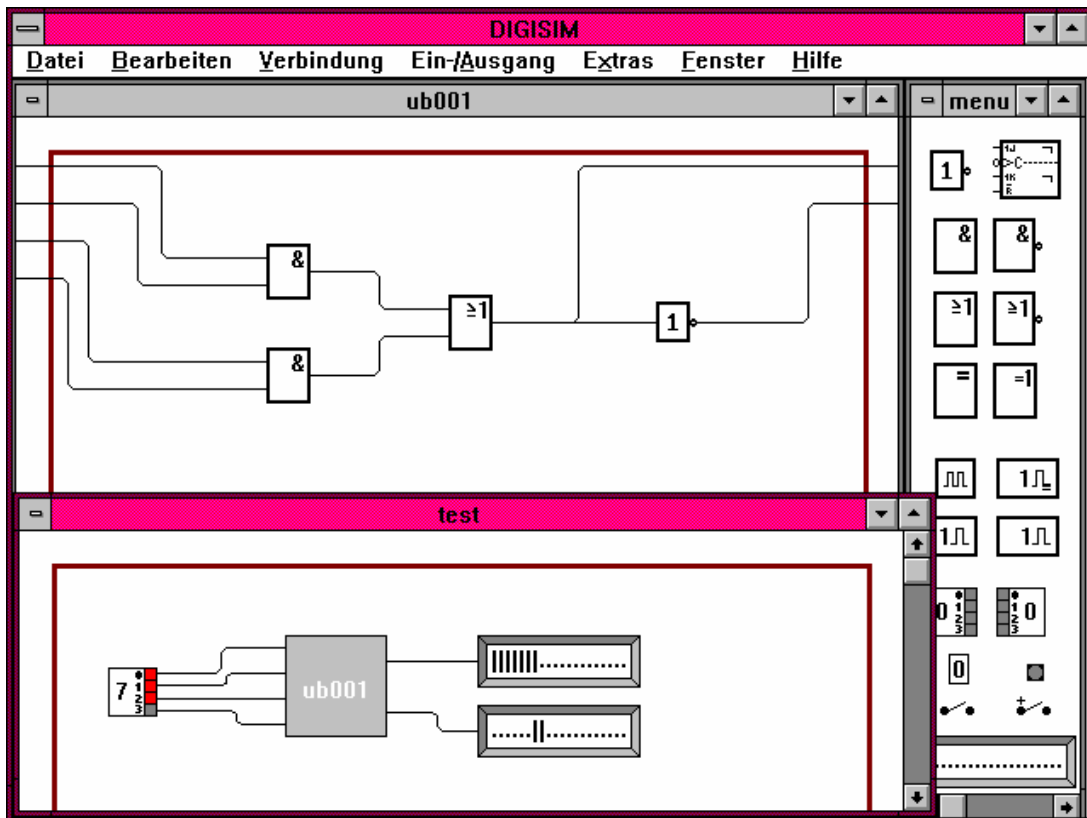


Bild A2.6: Ein Beispiel für die Erzeugung eines zusammengesetzten Bausteins in DIGISIM.

Gezeigt werden die Arbeitsschritte: 1. "Erzeugen eines neuen Bausteins ub001", 2. "Einfügen von elementaren Unterbausteinen", 3. "Hinzufügen von äußeren Ein- und Ausgängen", 4. "Herstellen von Verbindungen" und 5. "Einfügen des neuen Bausteins ub001 in einen anderen Baustein namens test".

Anmerkung:

Eine visuelle Datenflusssprache ist für den Anwender um so intuitiver erfaßbar, je mehr die Darstellung des Datenflußgraphen mit dem Erscheinungsbild der real zu manipulierenden Objekte übereinstimmt. Unter diesem Aspekt ist es oft angebracht, die aus technischen Gründen notwendigen, zusätzlichen Ein- oder Ausgänge mit ihren Verbindungen vor dem Anwender zu verbergen. In DIGISIM, zum Beispiel, besitzt jeder Baustein zwei zusätzliche Eingänge. Die zugehörigen Verbindungen werden dabei (für den Anwender nicht sichtbar,) unmittelbar nach dem Einfügen eines Unterbausteins durch den Editor erstellt.

A2.2 Das Datenflußmodell

A2.2.1 Das ursprüngliche Datenflußmodell

Das **ursprüngliche Datenflußmodell** wurde in Bezug auf sogenannte Datenflußmaschinen entworfen [GAJ82]. Dabei handelt es sich bei den, den Knoten zugeordneten Funktionen, um Funktionen im eigentlichen Sinne, d.h. im Unterschied zu Prozeduren, die mehrere Output-Parameter haben können, besitzen sie genau einen Rückgabewert bzw. Output-Parameter. Da von diesen Funktionen desweiteren gefordert wird, daß sie keinen inneren Zustand kennen und der Wert eines Inputparameters von genau einem Outputparameter einer anderen Funktion gesetzt wird, wird das ursprüngliche Datenflußmodell unter diesem Aspekt auch als **reines Datenflußmodell** bezeichnet.

Im Graphen des ursprünglichen Datenflußmodells kann der Rückgabewert einer Funktion über beliebig viele Kanten an nachfolgende Funktionen zur Weiterverarbeitung abgegeben werden. Dagegen zeigen zu einem Knoten genau so viele Kanten, wie die zugehörige Funktion Inputparameter besitzt. Die Reihenfolge der eingehenden Kanten korrespondiert dabei mit der Reihenfolge der Inputparameter einer Funktion.

Ein Programm kann, ebenso wie eine Funktion, mehrere Inputparameter, aber nur genau einen Outputparameter besitzen. Die Input- und Outputparameter eines Programms werden im Datenflußgraphen als speziell gekennzeichnete Pseudoknoten bzw. Pseudofunktionen dargestellt. (Siehe Bild A2.8.)

Eine Funktion wird genau dann ausgeführt, (man sagt in diesem Fall auch "sie feuert",) wenn all ihre Inputparameter mit einem Wert belegt sind. Wie bereits erwähnt, arbeitet sie nur mit den Werten, die ihr als Inputparameter zur Verfügung stehen; kennt also keine inneren Zustände. Dadurch ist gewährleistet, daß eine Funktion unabhängig von einem Systemzustand bei gleichen Inputwerten stets dasselbe Ergebnis liefert.

Da zu einem Knoten genau so viele Kanten zeigen, wie die zugehörige Funktion Inputparameter besitzt, kann ein Inputparameter nur von genau einer Vorgängerfunktion gesetzt werden. Damit ist garantiert, daß ein Programm determiniert abläuft, also unabhängig von Zeitpunkt und unabhängig von der Reihenfolge, in der die Funktionen ausgeführt werden, stets dasselbe Ergebnis liefert [GAJ82].

Im ursprünglichen Datenflußmodell gibt es keine Datentypen, d.h. alle fließenden Token sind vom selben Typ. (Dies ist allgemein genug, wenn zum Beispiel nur numerische Funktionen verwendet werden und nur mit Gleitkommazahlen gerechnet wird.)

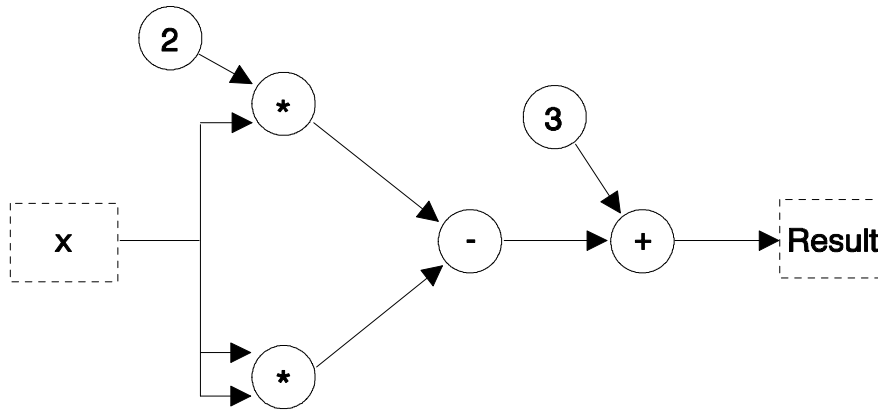


Bild A2.8: Ein Beispiel für einen Graphen des ursprünglichen Datenflußmodells aus [GAJ82]. Beschrieben wird dabei die Funktion $x^2 - 2*x + 3$.

A2.2.2 Die Schwächen des ursprünglichen Datenflußmodells

Im Vergleich mit einer modernen Hochsprache sind zwei Nachteile dieses Datenflußmodells sofort offensichtlich:

- (a) Funktionen bzw. Prozeduren mit nur einem Rückgabewert sind in der Praxis eher selten. In der Regel werden mehrere Outputparameter gleichzeitig berechnet oder es wird zumindest noch ein Fehlercode zurückgegeben. Im ursprünglichen Datenflußmodell ist dafür kein Platz.
- (b) Nicht ohne Grund läßt jede textuelle Programmiersprache den Gebrauch von verschiedenen Datentypen zu. Einerseits erleichtert dies dem Programmierer die Übersicht zu behalten und reduziert damit die Fehleranfälligkeit seines Programms und zum anderen erhöht es die Verarbeitungsgeschwindigkeit durch den Prozessor. Im Vergleich dazu bietet das ursprüngliche Datenflußmodell in dieser Richtung keine Unterstützung an.

Abgesehen von diesen beiden gravierenden Nachteilen gibt es noch einige Ungereimtheiten im ursprünglichen Datenflußmodell. So müssen zum Beispiel Knoten, die Programmein- oder ausgabewerte repräsentieren, gesondert gekennzeichnet sein. Bei den Knoten müssen also zwei Arten unterschieden werden. Außerdem ist im ursprünglichen Datenflußmodell die prozedurale Abstraktion, d.h. die Wiederverwendung von Code nicht vorgesehen.

Aus eben diesen Gründen wurden in der Weiterentwicklung der Datenflußsprachen nach und nach alle Beschränkungen des ursprünglichen Datenflußmodells außer Kraft gesetzt. Mit dem Aufheben der Beschränkungen nahm natürlich auch die Komplexität des Datenflußmodells erheblich zu. Zudem wurden diese Erweiterungen des Modells in der Regel auch nicht einheitlich dokumentiert. Im Bezug auf das ursprüngliche

Datenflußmodell ist den heute existierenden Datenflußsprachen eigentlich nur noch das Beschreiben eines Programms durch den Datenfluß gemeinsam.

A2.2.3 Ein erweitertes Datenflußmodell

Um die Struktur einer visuellen Datenflußsprache wie DIGISIM beschreiben zu können, ist ein erweitertes Datenflußmodell notwendig. Die Grundstruktur ist dabei ebenfalls über einen antisymmetrischen, gerichteten Graphen gegeben. Jedoch werden die Knoten je nach Aufgabe in verschiedene Gruppen eingeteilt. Als erstes gibt es die Gruppe der Knoten, die als (Funktions-) Symbole dargestellt werden. Diese werden im folgenden als **Subzentren** bezeichnet. Den Subzentren sind andere Knoten, (die die Input- und Outputparameter repräsentieren) als Ein- bzw. Ausgänge zugeordnet. Dabei ist von besonderer Bedeutung, daß ein Eingang (bzw. Ausgang) nur genau einem Subzentrum zugeordnet sein kann und Verbindungen zwischen den Subzentren nur über die zugeordneten Aus- bzw. Eingänge hergestellt werden können. Alle Knoten die einen Subzentrum als Ein- bzw. Ausgang zugeordnet sind werden als **innere Ein-** bzw. **innere Ausgänge** bezeichnet. Dem gegenüber steht die Gruppe der **äußeren Eingänge** und die der **äußeren Ausgänge**, die die Programmein- und ausgabeparameter repräsentieren. Im allgemeinen Fall kann es noch eine Gruppe von weiteren Knoten geben, die dem Verzweigen von Verbindungen dienen. Diese werden als **Interimknoten** bezeichnet. (In elektronischen Schaltungen würden diesen die Kontaktstellen auf Verbindungsleitungen entsprechen.)

Ein derartig strukturierter Graph wird im A2. Kapitel dieser Arbeit als **Subzentren-Netzwerk** definiert und in Form eines Tupels $N=(G,E,S,A)$ notiert. Dabei ist $G=(V,K)$ ein (spezieller) gerichteter Graph mit der Knotenmenge V und der Kantenmenge K . Die Teilmengen E, S, A von V legen der Reihe nach die Menge der äußeren Eingänge E , der Subzentren S und der äußeren Ausgänge A fest. Die Menge der inneren Eingänge $E(N,S)$ bzw. inneren Ausgänge $A(N,S)$ wird dann gerade durch alle Knoten festgelegt, die Vorgänger bzw. Nachfolger eines Subzentrums sind. Bei den verbleibenden, noch nicht qualifizierten Knoten handelt es sich um Interimknoten. Gibt es in einem Subzentren-Netzwerk keine Interimknoten, (welches häufig der Fall ist,) so wird dieses als **gepacktes Subzentren-Netzwerk** bezeichnet.

Der angedeutete, spezielle Charakter der beteiligten, gerichteten Graphen bezieht sich darauf, daß in ihnen Kanten bzw. Pfeile nur zwischen bestimmten Knoten erlaubt sind (um den Datenfluß festzulegen). Dies sind Kanten von äußeren Eingängen zu inneren Eingängen, Interimknoten oder äußeren Ausgängen, von Interimknoten zu äußeren Ausgängen oder inneren Eingängen, von inneren Eingängen zu dem zugehörigen Subzentren, von Subzentren zu ihren inneren Ausgängen und von inneren Ausgängen zu Interimknoten oder äußeren Ausgängen. (Vgl. Bild A2.1.)

Zur graphischen Darstellung eines Subzentren-Netzwerkes gibt es natürlich verschiedene Möglichkeiten (wie diverse visuelle Datenflusssprachen zeigen). Um eine gewisse Vereinheitlichung innerhalb dieser Arbeit zu erreichen, soll hier vereinbart werden, daß im Graphen eines Subzentren-Netzwerkes alle Knoten, die Subzentren repräsentieren, in Form kleiner Rechtecke dargestellt werden, andere dagegen als Pfeilspitzen. Da innere Ein- bzw. Ausgänge genau einem Subzentrum zugeordnet sind, sollen diese unmittelbar links bzw. rechts neben dem zugehörigen Subzentrum platziert werden. (Die zu einem Subzentrum führenden oder davon ausgehenden Kanten werden also nicht explizit dargestellt.) Analog wird mit den äußeren Ein- bzw. Ausgängen verfahren, die an der linken bzw. rechten Seite eines rechteckigen Rahmens angetragen werden, der alle beteiligten Subzentren mit deren Ein- und Ausgängen umfaßt. (Siehe Bild A2.12.)

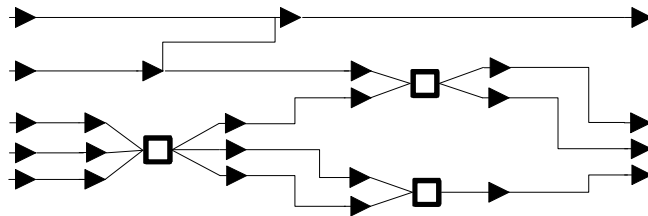


Bild A2.10: Der Graph eines Subzentren-Netzwerkes mit expliziter Darstellung der Kanten, die von inneren Eingängen zu den zugehörigen Subzentren (kleine Rechtecke) oder von diesen zu ihren inneren Ausgängen führen. Andere Pfeilspitzen repräsentieren äußere Eingänge (links), äußere Ausgänge (rechts) oder Interimknoten (oben/Mitte).

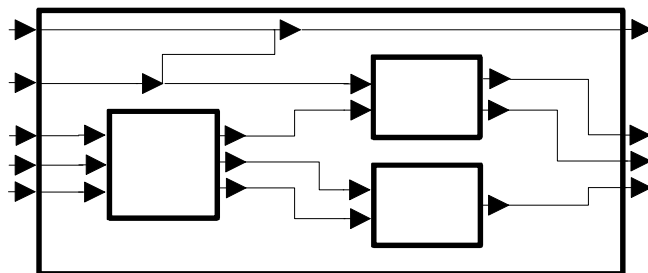


Bild A2.12: Die normale graphische Darstellung eines Subzentren-Netzwerkes mit (äußeren) Eingängen, Ausgängen und Interimknoten.

Ein derartiges Subzentren-Netzwerk beschreibt die Basisstruktur des erweiterten Datenflußmodells jedoch noch nicht ganz. Zusätzlich dazu ist es notwendig, den Knoten eines Subzentren-Netzwerkes verschiedene Bewertungen oder Marken zuzuordnen. Zum einen wird jedem Knoten ein Typ zugeordnet.

Für ein Subzentrum kennzeichnet dieser, welche Funktionalität diesem zugeordnet ist. Für andere Knoten legt dieser den Datentyp der Token fest, die auf den Kanten dazwischen fließen sollen. Letztere Typen können nicht an den Kanten, sondern nur an den Ein- und Ausgängen "festgemacht" werden, da - wie man am Beispiel von DIGISIM sieht - zu Beginn der Designphase noch keine Kanten zu den Ein- oder Ausgängen führen.

Da in der Interpretationsphase ein Outputparameter einer Funktion nur dann als Inputparameter einer anderen Funktion verarbeitet werden kann, wenn beide vom selben Typ sind, muß desweiteren gefordert werden, daß die beiden Endknoten einer Kante zwischen einem Aus- und einem Eingang vom selben Typ sind. Derartige Subzentren-Netzwerke werden als **formatiert** bezeichnet. In der graphischen Darstellung können die Typen eines formatierten Subzentren-Netzwerks durch eine entsprechende farbige Kennzeichnung bzw. durch verschiedene Symbole zum Ausdruck gebracht werden. (Siehe Bild A2.14.)

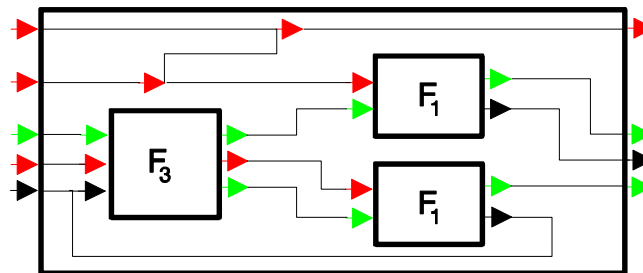


Bild A2.14: Ein formatiertes Subzentren-Netzwerk. Dabei ist der Typ eines Subzentrums über den kennzeichnenden, indizierten Buchstaben und der anderer Knoten über seine Farbe (Graustufe) gegeben.

Schließlich fehlen noch zwei weitere Attribute, um die Grundstruktur des erweiterten Datenflußmodells beschreiben zu können. Während der Interpretationsphase muß es zwischen den Ein- bzw. Ausgängen eines Subzentrums und den Input- bzw. Outputparametern der zugehörigen Funktion eine eindeutige Zuordnung geben. Da die Parameter einer Funktion stets in einer gewissen Reihenfolge definiert werden, ist es dazu nur notwendig, auch für die Ein- und Ausgänge eines Subzentrums eine entsprechende Reihenfolge festzulegen. Es korrespondiert dann der i -te Eingang (Ausgang) eines Subzentrums mit dem i -ten Inputparameter (Outputparameter) der zugeordneten Funktion. Aus Gründen der Möglichkeit zur computergerechten Darstellung solcher Subzentren-Netzwerke, wird auch für die Menge der Subzentren bzw. Interimknoten eine solche Reihenfolge festgelegt. (Auf die zu beschreibende Funktionalität haben diese allerdings keinen Einfluß.) Da den Knoten dazu entsprechende Indizes zugeordnet werden, heißen derartige Subzentren-Netzwerk **fortlaufend indiziert** oder **geordnet**.

Werden bei der graphischen Darstellung eines solchen Subzentren-Netzwerks die Ein- und Ausgänge nicht (wie in Bild A2.14) implizit als von oben nach unten geordnet angenommen, so müssen sie die zugeordneten Indizes explizit neben den Knoten dargestellt werden. (Siehe Bild A2.16.)

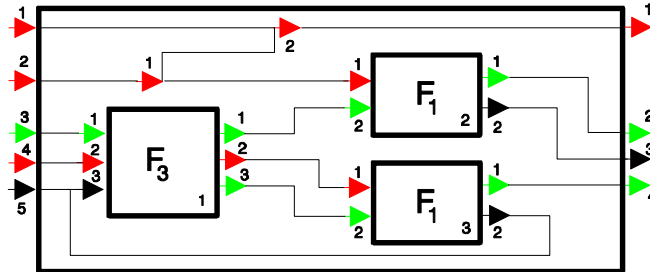


Bild A2.16: Das geordnete Subzentren-Netzwerk von Bild A2.14 mit explizit angegebenen Indizes.

Bei den nachfolgenden graphischen Darstellungen werden die Ein- und Ausgänge stets als von oben nach unten geordnet angenommen und die entsprechenden Indizes weggelassen. Ebenfalls nicht dargestellt werden die Indizes der Subzentren und Interimknoten, da sie wie bereits erwähnt, auf die zu beschreibende Funktionalität keinen Einfluß haben.

Damit die oben beschriebene Zuordnung (Subzentrum - Funktion) auch korrekt ist, sind allerdings noch weitere Bedingungen zu erfüllen. So muß die Anzahl der Ein bzw. Ausgänge eines Subzentrums gerade mit der Anzahl der Input- bzw. Outputparameter der zugehörigen Funktion übereinstimmen. Außerdem muß der Typ des i -ten Ein- bzw. Ausgangs eines Subzentrums gerade dem Datentyp des i -ten Input- bzw. Outputparameters der zugehörigen Funktion entsprechen. Für das beschreibende Subzentren-Netzwerk bedeutet dies: Ist zwei Subzentren derselbe Typ zugeordnet, so besitzen sie dieselbe Anzahl von Ein- und Ausgängen. Außerdem muß darüber hinaus der Typ des i -ten Ein- bzw. Ausgangs des einen Subzentrums identisch zum Typ des i -ten Ein- bzw. Ausgangs des anderen Subzentrums sein. Derartige, geordnete Subzentren-Netzwerke bezeichnet man als **typenindexkonform**. (Das Subzentren-Netzwerk von Bild A2.14 bzw. Bild A2.16 ist typenindexkonform.) Entsprechend heißen zwei Subzentren-Netzwerke **paarweise zueinander typenindexkonform**, wenn diese Bedingung für die Vereinigung beider Mengen von Subzentren gilt.

Da in dem beschreibenden Subzentren-Netzwerk Datentypen und Funktionalität nicht direkt angetragen werden, ist desweiteren eine Zuordnung notwendig, die jedem Subzentrentyp eine Funktionalität und jedem anderen Typen einen Datentyp mit Wertemenge W eine sogenannte Auswahlabbildung Δ_W zuordnet. Letztere findet dann Verwendung, wenn bei der Interpretation zu einem inneren Eingang oder äußeren Ausgang mehr als eine

Kante führt. Wird dem Typen eines Subzentrums eine Funktion bzw. Prozedur zugeordnet, so ist dabei darauf zu achten, daß nur eine solche Funktion bzw. Prozedur zugeordnet werden darf, deren Input- bzw. Outputparameter zu den Ein- bzw. Ausgängen des Subzentrums passend sind.

Typ	Wertebereich bzw. Datentyp und Auswahlabbildung
▶	A Δ_A
▶	B Δ_B
▶	C Δ_C

Typ	Funktion bzw. Prozedur
F ₁	$f_1: B \times C \rightarrow C \times A$
F ₂	$f_2: C \times A \rightarrow A$
F ₃	$f_3: C \times B \times A \rightarrow C \times B \times C$
F ₄	$f_4: C \times B \times C \rightarrow B$

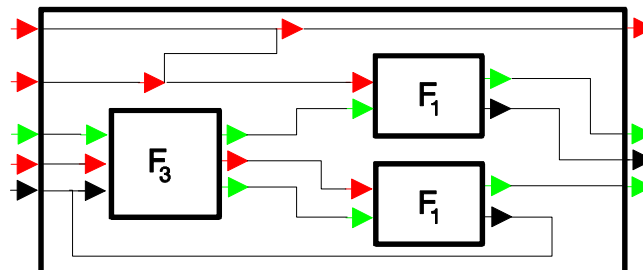


Bild A2.18: Beispiel für ein Datenflußnetzwerk mit Typzuordnungstabelle.

Zusammenfassend kann also festgehalten werden, daß die Struktur des erweiterten Datenflußmodells beschrieben werden kann, über ein formatiertes, geordnetes und typenindexkonformes Subzentren-Netzwerk (nachfolgend als Datenflußnetzwerk bezeichnet) und eine Abbildung, die jedem Subzentrentypen eine geeignete Funktionalität und jedem anderen Typen einen bestimmten Datentyp mit Auswahlabbildung zuordnet.

Obwohl die Bedingung der Typenindexkonformität sehr restriktiv ist, ergeben sich für den Anwender einer visuellen Datenflusssprache damit keine Probleme. Wie man am Beispiel von DIGISIM sieht, werden Unterbausteine (d.h. ein Subzentrum mit seinen Ein- und Ausgängen) stets als Ganzes kopiert, wobei dem Anwender am Anfang eine beschränkte Grundmenge solcher Unterbausteine in Form eines Menüs zur Verfügung steht. Diese Vorgehensweise garantiert implizit, daß das entstehende Subzentren-Netzwerk automatisch zu jedem Zeitpunkt in sich und zu den im Menü angebotenen Unterbausteinen typenindexkonform ist. Um sicherzustellen, daß es auch formatiert ist, läßt es der graphische Editor nicht zu, Aus- und Eingänge mit unterschiedlichem Typ zu verbinden.

Das erweiterte Datenflußmodell hebt nicht nur die beiden oben genannten Nachteile des ursprünglichen Datenflußmodells auf, sondern erlaubt überdies auch auf natürliche Art und Weise die hierarchische Strukturierung bzw. prozedurale Abstraktion, d. h., dem Typen eines Subzentrums kann auch die durch ein anderes Subzentren-Netzwerk definierte Funktionalität zugeordnet werden. Dabei ist allerdings wieder (wie oben beschrieben) darauf zu achten, daß dieser Typ nur einem Subzentrum zugeordnet werden kann, dessen Ein- und Ausgänge in Anzahl, Typ und Reihenfolge mit den äußeren Ein- und Ausgängen des die Funktionalität beschreibenden Subzentren-Netzwerkes übereinstimmen. Da sowohl die Eingänge jedes Subzentrums, als auch die äußeren Eingänge jedes Subzentren-Netzwerkes geordnet sind, ist damit auf natürliche Art und Weise eine Zuordnung zwischen dem i-ten Eingang des Subzentrums und dem i-ten äußeren Eingang des zugeordneten Subzentren-Netzwerkes festgelegt. Gleiches gilt für die Ausgänge des Subzentrums und die äußeren Ausgänge des zugeordneten Subzentren-Netzwerkes. (Vgl. Bild A2.6 (5) und Bild A2.44.) Für die In- und Outputparameter der zugeordneten Funktionalitäten bedeutet dies, daß der i-te Input- bzw. Outputparameter der dem Subzentrum zugeordneten Funktionalität dem i-ten Input- bzw. Outputparameter der dem Subzentren-Netzwerk zugeordneten Funktionalität entspricht.

Vor diesem Hintergrund kann nun auch der Umstand des möglichen Vorhandenseins von Interimknoten in einem Subzentren-Netzwerk abschließend diskutiert werden. Wie weiter oben bereits angemerkt, gibt es in der Natur Systeme, die sich als Subzentren-Netzwerke mit Interimknoten beschreiben lassen. (Im konkreten Fall kann dies zum Beispiel eine elektronische Schaltung mit Lötstellen auf den Verbindungsleitungen sein. Jede solche Lötstelle entspricht dann einem Interimknoten.) Da visuelle Datenflusssprachen unter anderem dazu dienen, solche Systeme zu beschreiben, treten prinzipiell auch dort Interimknoten auf. Von der theoretischen Seite betrachtet, ist leicht einzusehen, daß ein Subzentren-Netzwerk mit Interimknoten in ein gepacktes Subzentren-Netzwerk überführt werden kann, in dem man jeden Interimknoten durch ein Subzentrum mit genau einem Ein- und einem Ausgang ersetzt, wobei die neuen Knoten geeignet bewertet werden müssen. Für

manche Aspekte der Theorie und der Praxis ist dies eine ideale Vorgehensweise. Im Detail kann dies jedoch zu einem zusätzlichen Aufwand führen, der die gewonnene Vereinfachung an anderer Stelle wieder zunichte macht, da die Definition geeigneter Bewertungen für die neuen Knoten nicht leicht zu beantwortende Fragen aufwirft. Zum Beispiel ist zu klären, welcher Funktionstyp bzw. welche Funktion dem Subzentrum des ersetzten Interimknoten zuzuordnen ist. Einem Subzentrum kann ein passendes offenes Subzentren-Netzwerk als Typ zugewiesen werden. Welche Folgen hat dies? Usw. Um derartigen Problemen vorzubeugen, wird nachfolgend stets der allgemeine Fall "Subzentren-Netzwerke mit Interimknoten" betrachtet, wenn gleich auch an verschiedenen Stellen auf die besonders günstigen Eigenschaften von gepackten Subzentren-Netzwerken hingewiesen wird.

Um im folgenden zu einer Interpretation eines Datenflußnetzwerks des erweiterten Datenflußmodells gelangen zu können, ist es zunächst notwendig, sich auf solche Datenflußnetzwerke zu beschränken, die zyklfrei sind und deren Subzentrentypen auf Funktionen bzw. Prozeduren ohne inneren Zustand verweisen. Für das erweiterte Datenflußmodell seien diese nachfolgend als **reine Datenflußnetzwerke** definiert. Ausgehend von der Interpretation solcher reiner Datenflußnetzwerke werden in einem Ausblick verschiedene Ansätze vorgestellt, wie unter Verwendung des Aspekts der Hierarchie, auch eine Interpretation von Datenflußnetzwerken mit Zykel durchgeführt werden kann. Eine detaillierte Spezifikation dieses Vorgangs ist im Rahmen dieser Publikation allerdings nicht mehr möglich.

A2.3 Allgemeines zur Interpretation eines Datenflußnetzwerks

Unter der Interpretation eines Datenflußnetzwerks des erweiterten Datenflußmodells ist der Vorgang zu verstehen, bei dem einem bestimmten Datenflußnetzwerk eine eigene Funktionalität zugeordnet wird. Die Interpretation des Datenflußmodells festzuschreiben gestaltet sich weitaus schwieriger als dessen Beschreibung festzulegen. Allein das Herauskrystallisieren einiger intuitiver Ansprüche an eine derartige Interpretation bedarf der zusätzlichen Definition von Isomorphie- und Äquivalenzklassen von Subzentren-Netzwerken und einiger algebraischer Operationen darauf. Ausführlich wird dies im A2. Kapitel dargestellt. Nachfolgend sollen die zugehörigen Definitionen und Sätze vereinfacht und im Detail ungenau, aber dafür möglichst anschaulich wiedergegeben werden.

A2.3.1 Das serielle und parallele Produkt

Bei genauerer Betrachtung der bisher gezeigten graphischen Darstellungen von Subzentren-Netzwerken offenbart sich, daß eigentlich nicht einzelne Exemplare sondern Isomorphieklassen von Subzentren-Netzwerken dargestellt wurden. Das heißt, die entsprechenden Abbildungen zeigen eigentlich nur die Struktur der darzustellenden Netzwerke. Analog ist es bei der Interpretation eines Datenflußnetzwerks nicht notwendig, das einzelne Netzwerk, sondern nur dessen Struktur bzw. Zugehörigkeit zu einer bestimmten Äquivalenzklasse zu analysieren. Dies entspricht auch unserer intuitiven Anschauung, wonach zwei verschiedene Datenflußnetzwerke genau dann dieselbe Funktionalität beschreiben, wenn sie gleich strukturiert sind. Im A2. Kapitel werden zwei geordnete, formatierte Subzentren-Netzwerke bzw. Datenflußnetzwerke als **äquivalent** definiert, wenn es zwischen beiden einen Isomorphismus gibt, der die Typen aller Knoten und die Indizes aller inneren und äußeren Aus- und Eingänge erhält. (Soweit auch die Subzentren und Interimknoten geordnet sind spielt dies für die nachfolgend beschriebene Interpretation keine Rolle.) Auf diesen Äquivalenzklassen lassen sich nun algebraische Operationen definieren, die sich anschaulich sehr gut darstellen lassen und die stark an das parallele und serielle Verschalten elektronischer Bausteine erinnern.

Bild A2.20 zeigt das **parallele Produkt** zweier Datenflußnetzwerke mit genau einem Subzentrum. Dabei werden die beiden Graphen übereinander gestellt und zu einem Subzentren-Netzwerk zusammengefaßt. Die Zugehörigkeit der einzelnen Knoten zu den Gruppen "äußere Eingänge", "äußere Ausgänge", "Subzentren", usw. sowie deren Typen ändern sich

dabei nicht. Die, die Ordnung auf den Knoten definierenden Indizes ändern sich nur für die äußeren Ein- und Ausgänge des zweiten Operators. (Die Indizes der Subzentren und Interimknoten ändern sich zwar auch, dies ist für die Interpretation jedoch ohne Bedeutung.)

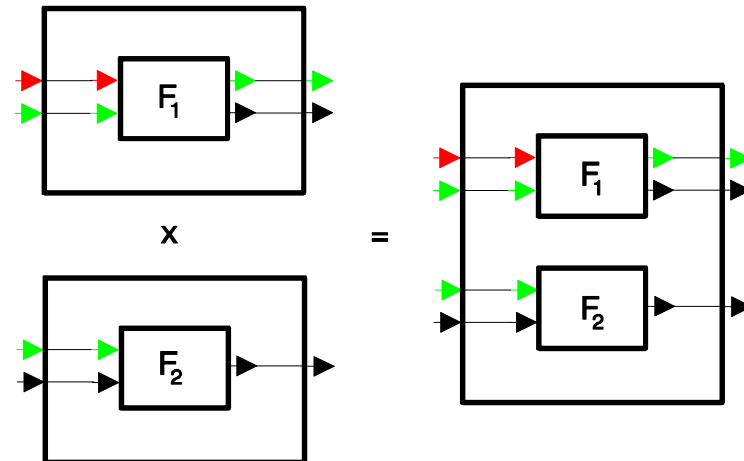


Bild A2.20: Das parallele Produkt zweier Datenflußnetzwerke des erweiterten Datenflußmodells.

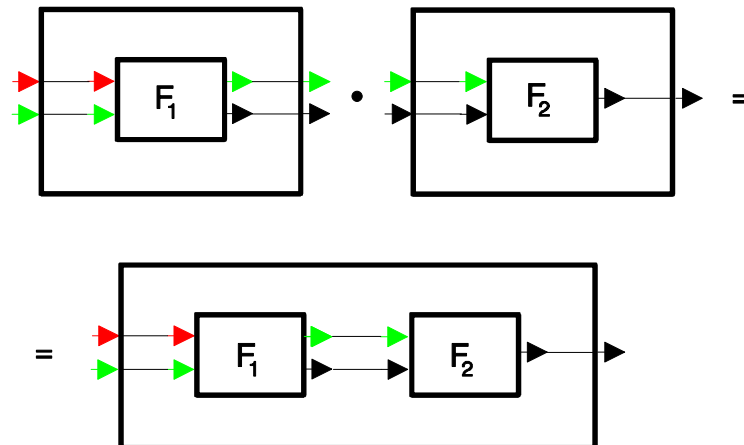


Bild A2.22: Das serielle Produkt zweier Datenflußnetzwerke des erweiterten Datenflußmodells.

Bild A2.22 zeigt das **serielle Produkt** zweier Datenflußnetzwerke mit genau einem Subzentrum. Dabei werden die beiden Graphen nebeneinandergestellt und zu einem Subzentren-Netzwerk zusammengefaßt. Dazu ist allerdings zu bemerken, daß das serielle Produkt zweier Datenflußnetzwerke nur dann definiert ist, wenn die äußeren Ausgänge des ersten Operanden und die äußeren Eingänge des zweiten Operanden in Anzahl und Typen genau übereinstimmen. Das heißt, der i -te

äußere Ausgang des ersten Netzwerks ist vom selben Typ wie der i -te äußere Eingang des zweiten Netzwerks. Die Zugehörigkeit der einzelnen Knoten zu den Gruppen "äußere Eingänge", "äußere Ausgänge", "Subzentren" usw., sowie deren Typen ändern sich bei der seriellen Operation nicht. Allerdings werden die äußeren Ausgänge des ersten Operanden und die äußeren Eingänge des zweiten Operanden entfernt und die daran anschließenden Kanten überbrückt.

A2.3.2 Das Monopolyid der Äquivalenzklassen

Das parallele und serielle Produkt können nun über Repräsentanten direkt auf die Menge der Äquivalenzklassen von geordneten Subzentren-Netzwerken übertragen werden. Setzt man dann eine bestimmte Menge T von Typen voraus, so kann man zeigen, daß die Menge aller Äquivalenzklassen von formatierten und geordneten Subzentren-Netzwerken, die mit diesen Typen belegt sind, ein Monopolyid $(N_T^F / \sim, \times, \bullet_D)$ bilden. (Eine genaue Definition dazu wird im A2. Kapitel gegeben.) Vereinfacht ausgedrückt bedeutet dies, daß einerseits die Operation des parallelen Produkts assoziativ ist und bezüglich dieser Operation ein Neutralelement existiert und andererseits das serielle Produkt partiell assoziativ ist und zu jedem Element eine links- und eine rechtsseitige Identität existiert. Schließlich und endlich muß auch noch das Distributivgesetz für Monopolyide erfüllt werden, d.h.: Sind $[H_1]$, $[H_2]$, $[H_3]$ und $[H_4]$ vier Äquivalenzklassen von Datenflußnetzwerken und ist $[H_1] \bullet [H_2]$, bzw. $[H_3] \bullet [H_4]$ definiert, so ist $([H_1] \bullet [H_2]) \times ([H_3] \bullet [H_4]) = ([H_1] \times [H_3]) \bullet ([H_2] \times [H_4])$. (In Bild A2.24 wird dies durch die Vierteilung verdeutlicht).

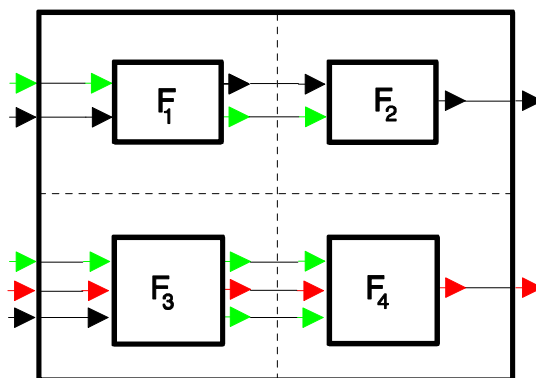


Bild A2.24: Eine Verdeutlichung des Distributivgesetzes $([H_1] \bullet [H_2]) \times ([H_3] \bullet [H_4]) = ([H_1] \times [H_3]) \bullet ([H_2] \times [H_4])$ für Monopolyide. Das Netzwerk H_i ist dabei durch das Subzentrum von Typ F_i bestimmt.

Wenn gleich auch die Gültigkeit der Assoziativgesetze und des Distributivgesetzes für Monopolyide theoretisch nur sehr

aufwendig nachzuweisen sind, so können diese Gesetze dennoch anschaulich leicht verifiziert werden. Ebenso einfach läßt sich feststellen, daß die Identität bezüglich des parallelen Produkts **das leere Netzwerk** (d.h. das Netzwerk mit der leeren Menge als Knotenmenge) ist. Die links- bzw. rechtsseitigen **Identitäten** bezüglich des seriellen Produktes sind gerade jene Subzentren-Netzwerke bzw. deren Äquivalenzklassen, die außer den äußeren Ein- und Ausgängen keine weiteren Knoten besitzen und bei denen es vom i -ten äußeren Eingang genau eine Kante, nämlich zum i -ten äußeren Ausgang gibt und umgekehrt. (Siehe Bild A2.26.)

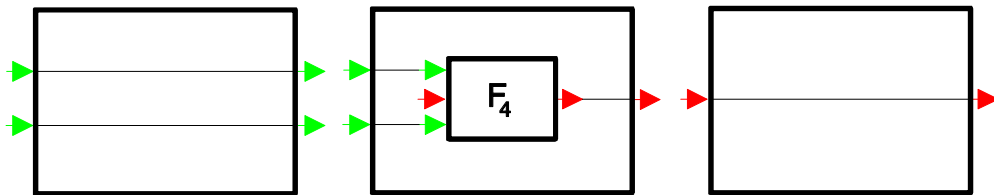


Bild A2.26: Ein formatiertes und geordnetes Subzentren-Netzwerk (Mitte) und seine links- bzw. rechtsseitige Identität bezüglich des seriellen Produkts.

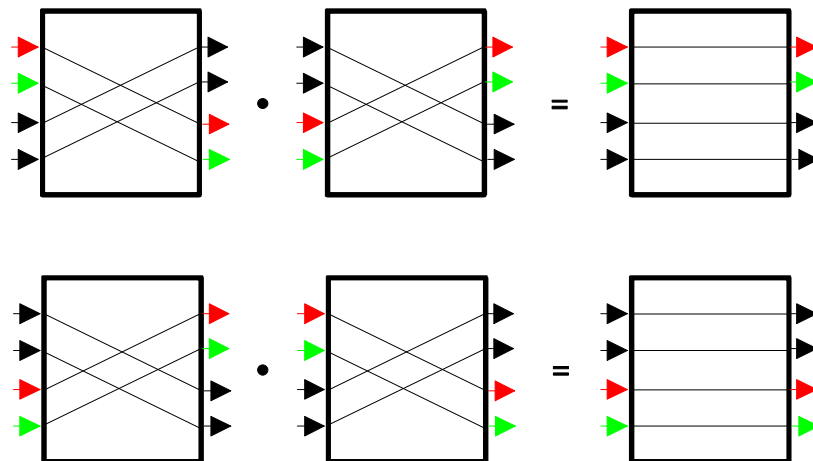


Bild A2.28: Zwei zueinander inverse Permutationen.

Ähnlich wie es bei anderen algebraischen Strukturen Unterstrukturen gibt, sind für Monopolyide Untermonopolyide definiert. Es handelt sich dabei im wesentlichen um Teilmengen, die bezüglich des parallelen und seriellen Produkts abgeschlossen sind. Da bei der Bildung der Produkte keine zusätzlichen Subzentren oder Interimknoten hinzukommen, ist es offensichtlich, daß die Äquivalenzklassen der **fast leeren Netzwerke**, also solcher Subzentren-Netzwerke, die keine Subzentren und keine Interimknoten beinhalten, ebenfalls ein

Untermonopolyid nämlich $(N_T^0, \times, \bullet_D)$ bilden. An dieser Stelle sei auch auf die Menge N_T^P aller **Permutationen** hingewiesen. Diese stellen gerade die invertierbaren Elemente von N_T^F/\sim dar und sind dadurch gekennzeichnet, daß ihre Repräsentanten weder Subzentren noch Interimknoten beinhalten und von jedem äußeren Eingang genau eine Kante zu einem äußeren Ausgang führt und umgekehrt.

(Vgl. Bild A2.28.) Sie bilden damit ein Untermonopolyid von $(N_T^0, \times, \bullet_D)$. Die Menge N_T^I der Identitäten ist nach dieser Definition natürlich eine Teilmenge von N_T^P und definiert wiederum ein Untermonopolyid von $(N_T^P, \times, \bullet_D)$.

Eine besonders wichtige Kategorie von Untermonopolyiden sind hier die aus einer Teilmenge von N_T^F/\sim erzeugten Monopolyide. In [HÜB95] wird gezeigt, daß für jede Teilmenge N' von N_T^F/\sim mit $N_T^I \subseteq N'$ die Menge $\langle N', \times, \bullet_D \rangle$ aller endlichen Produkte wieder ein Untermonopolyid von $(N_T^F/\sim, \times, \bullet_D)$ ist. Diese Monopolyide sind hier deshalb von besonderer Bedeutung, da (nachfolgend) gezeigt werden kann, daß die Äquivalenzklasse jedes Datenflußnetzwerks ohne (echte) Zykel, das der Anwender einer visuellen Datenflußsprache erzeugt hat, Element eines solchen Untermonopolyids ist. Eine besondere Rolle spielen dabei die einfachen Netzwerke mit Subzentren und die einfachen Interimknoten. Dabei heißt ein formatiertes, geordnetes Subzentren-Netzwerk ein **einfaches Netzwerk mit Subzentrum**, wenn es genau ein Subzentrum, keinen Interimknoten und genau gleich viele äußere wie innere Ein- bzw. Ausgänge besitzt und von jedem äußeren Eingang zu jedem inneren Eingang, so wie von jedem inneren Ausgang zu jedem äußeren Ausgang genau eine Kante führt, wobei die Endknoten denselben Index besitzen. Je nachdem, ob ein einfaches Netzwerk mit Subzentrum noch zusätzliche, schlaufenbildende Kanten von einem inneren Ausgang zu einem inneren Eingang enthält, heißt es ein **einfaches Netzwerk mit oder ohne Schlaufen**. (Vgl. Bild A2.30.)

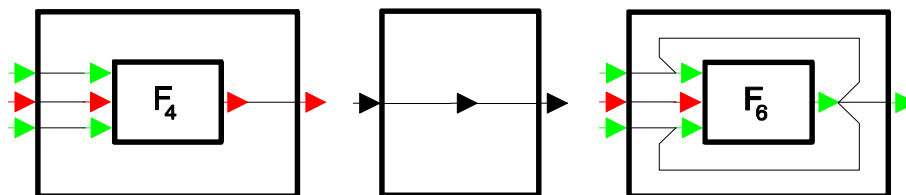


Bild A2.30: Ein einfaches Netzwerk ohne Schlaufen (links), ein einfacher Interimknoten (Mitte) und ein einfaches Netzwerk mit Schlaufen (rechts).

Bei einem **einfachen Interimknoten** dagegen handelt es sich um ein formatiertes, geordnetes Subzentren-Netzwerk ohne Subzentrum, mit genau einem Interimknoten, einem äußeren Eingang und einem äußeren Ausgang, wobei ersterer über eine Kante mit dem Interimknoten und dieser mit dem äußeren Ausgang verbunden ist. (Vgl. Bild A2.30.)

Es ist offensichtlich, daß jedes Subzentrum mit seinen Ein- und Ausgängen bzw. jeder Grundbaustein, der dem Anwender einer visuellen Programmiersprache im Menü angeboten wird, eineindeutig ein einfaches Netzwerk ohne Schleifen definiert. Ebenso definiert jeder auftretende (Daten-)Typ eineindeutig einen einfachen Interimknoten. Die Menge der Äquivalenzklassen all dieser Netzwerke sei als N_T^1 definiert. Es zeigt sich nun, daß jedes zyklfreie Datenflußnetzwerk, das der Anwender aus den Grundbausteinen erzeugen kann, gerade in das parallele und serielle Produkt der zugehörigen einfachen Netzwerke mit Subzentrum und einfachen Interimknoten zerlegt werden kann, wobei in einer derartigen Zerlegung allerdings auch noch beliebige fast leere Netzwerke (ohne Subzentren und ohne Interimknoten) auftreten können. Wählt man nun $N' := N_T^0 \cup N_T^1$, so besteht das von N' erzeugte Monopolyid $\langle N', \times, \bullet \rangle$ gerade aus den Äquivalenzklassen aller Datenflußnetzwerke, die der Anwender einer visuellen Datenflußsprache aus den Grundbausteinen erzeugen kann. Doch bevor hier weiter ins Detail gegangen wird, sollen zuvor noch andere Aspekte der Interpretation eines Datenflußnetzwerks angesprochen werden.

A2.3.3 Das Monopolyid der Funktionen

Soll im Fall der Interpretation einem Datenflußnetzwerk bzw. seiner Äquivalenzklasse eine Funktion zugeordnet werden, so stehen dabei nicht alle möglichen Funktionen zur Verfügung. Vielmehr sind nur solche erlaubt, die passend zu den Wertemengen der Datentypen sind. Vorausgesetzt wird also eine Menge \mathcal{Q} , die all diese Wertemengen, sowie die leere Menge (\emptyset) als Elemente enthält und die bezüglich des cartesischen Produkts abgeschlossen ist. Von Bedeutung ist dann die Menge $F_{\mathcal{Q}}$ aller Funktionen bzw. Abbildungen zwischen diesen Mengen, denn es zeigt sich, daß auch auf der Menge $F_{\mathcal{Q}}$ ein paralleles und serielles Produkt definiert werden kann, so daß $(F_{\mathcal{Q}}, \times, \bullet)$ ein Monopolyid ist. Auf diese Konstruktion soll kurz genauer eingegangen werden.

Sind $f_1: A_1 \rightarrow B_1$ und $f_2: A_2 \rightarrow B_2$ zwei Funktionen aus $F_{\mathcal{Q}}$, so ist $f_1 \times f_2: A_1 \times A_2 \rightarrow B_1 \times B_2$ durch $(f_1 \times f_2)((x_1, x_2)) := (f_1(x_1), f_2(x_2))$ definiert. Ist andererseits $B_1 = A_2$, so wird $f_1 \bullet f_2: A_1 \rightarrow B_2$ durch $(f_1 \bullet f_2)(x_1) := f_2(f_1(x_1))$ festgelegt. (Die übliche Operation " \circ " mit $(f_2 \circ f_1)(x_1) := f_2(f_1(x_1))$ ist für die nachfolgenden Darstellungen nicht geeignet, da die Reihenfolge der Operanden nicht mit den Operationen auf Subzentren-Netzwerken

harmoniert.) Für beide Operationen ist das Assoziativgesetz bzw. das partielle Assoziativgesetz, sowie das Distributivgesetz für Monopolyide extrem leicht nachweisbar.

Die Voraussetzung, daß \emptyset ein Element von F_\emptyset ist, liefert die Möglichkeit, die leere Menge als das Neutralelement bezüglich des cartesischen Produkts "x" festlegen zu können. Die idealisierte **Nullfunktion** $0: \emptyset \rightarrow \emptyset$ kann dann als Identität bezüglich des parallelen Produkts herangezogen werden. (Mit idealisierten Funktionen, die \emptyset als Ursprungs- oder Bildmenge besitzen, ist leichter umgehen, wenn man sie sich als algorithmische Prozeduren vorstellt, die keine Input- oder keine Outputparameter besitzen.) Für $f: A \rightarrow B$ ist die links- bzw. rechtsseitige Identität bezüglich des seriellen Produkts über die identische Abbildung auf der Menge A bzw. B gegeben.

Allein die Ähnlichkeit zwischen der Struktur der eben beschriebenen Menge von Funktionen bzw. Prozeduren und der Menge der Äquivalenzklassen der erzeugten Datenflußnetzwerke läßt vermuten, daß es möglich sein könnte, jedem reinen Datenflußnetzwerk bzw. seiner Äquivalenzklasse genau eine Funktion zuzuordnen. Um jedoch eine sinnvolle Zuordnung zu erhalten, ist es notwendig, die Auswahl aus der Vielfalt möglicher Zuordnungen einzuschränken, indem an eine derartige Zuordnung weitere Bedingungen geknüpft werden.

A2.3.4 Intuitive Forderungen

Nach der Definition des erweiterten, reinen Datenflußmodells ist also zum einen das von einer Teilmenge $N' \subseteq N_T^F$ erzeugte Untermonopolyid $\langle N', \times, \bullet_D \rangle$ aller endlichen Produkte und zum anderen das Monopolyid $(F_\emptyset, \times, \bullet_\emptyset)$ der Funktionen gegeben. Jedem Typ eines Ein- oder Ausgangs ist eine Wertemenge zugeordnet und die Typen der Subzentren verweisen auf Funktionen deren Input- und Outputparameter in Typ (Wertemenge) und Anzahl mit den Ein- und Ausgängen des Subzentrums korrespondieren.

Daraus ergeben sich nun für die Interpretation einige intuitive Forderungen:

- (1) Das leere Netzwerk soll der Nullfunktion 0 zugeordnet werden.
- (2) Den Subzentren-Netzwerken, die Identitäten darstellen, sollen als die entsprechenden identischen Abbildungen interpretiert werden. (Die Typen der äußeren Eingänge bzw. die entsprechenden Wertemengen legen diese eindeutig fest.)
- (3) Dem parallelen Produkt zweier Subzentren-Netzwerke soll als Funktion gerade das parallele Produkt der Funktionen der einzelnen Operanden zugeordnet werden.

- (4) Ist das serielle Produkt zweier Subzentren-Netzwerke definiert, so soll diesem als Funktion gerade das serielle Produkt der Funktionen der einzelnen Operanden zugeordnet werden. Dabei wird vorausgesetzt, daß dieses Produkt dann auch definiert ist.

Diese Forderungen kennzeichnen gerade strukturerhaltende Abbildungen von einem Monopolyiden in einen anderen. In [HÜB95] werden diese als Monopolyiden-Homomorphismen definiert. Daraus kann gefolgert werden, daß das Problem der Interpretation eines Datenflußnetzwerks identisch dazu ist, einen Monopolyiden-Homomorphismus von $\langle N', \times, \bullet_D \rangle$ nach $(F_0, \times, \bullet_\emptyset)$ angeben zu können.

Es stellt sich nun allerdings die Frage, wie ein derartiger, die Interpretation beschreibender Monopolyiden-Homomorphismus so festgelegt werden kann, daß die Interpretation zu sinnvollen Ergebnissen führt. Zur Beantwortung dieser Frage wird in mehreren Stufen vorgegangen. Zunächst werden einige spezielle Klassen von Datenflußnetzwerken betrachtet, die eine bestimmte Art und Weise der Interpretation nahelegen. Hier sind insbesondere einfache Netzwerke ohne Schleifen, Identitäten und Permutationen zu nennen. Danach wird ein Monopolyiden-Homomorphismus vorgestellt, der die Interpretation aller fast leeren Datenflußnetzwerke beschreibt. Unter Anwendung einiger Sätze aus der Theorie kann dieser anschließend so erweitert werden, daß damit die Interpretation aller Datenflußnetzwerke ohne echte Zyklen beschrieben wird. Zum Abschluß werden noch einige Verfahren vorgestellt, die die Interpretation beliebiger Datenflußnetzwerke, also auch solcher mit echten Zyklen, zulassen.

A2.4 Die Interpretation spezieller Datenflußnetzwerke

Wie weiter unten gezeigt wird, kann die Interpretation eines beliebigen zykliefreien Datenflußnetzwerkes auf die Interpretation von Netzwerken zurückgeführt werden, deren Äquivalenzklassen aus N_T^1 und N_T^0 sind. Zwar hat man bei der Interpretation von einfachen Netzwerken ohne Schleifen und einfachen Interimknoten fast jede erdenkliche Freiheit, trotzdem drängt es sich als sinnvoll auf, bei der Interpretation eines einfachen Netzwerkes ohne Schleifen (Vgl. Bild A2.30) diesem gerade die Funktion des (einzig vorhandenen) Subzentrums zuzuweisen. Ebenso sinnvoll ist es, einem einfachen Interimknoten die identische Abbildung zuzuordnen, die durch den Datentyp des Interimknoten bzw. der zugeordneten Wertemenge eindeutig festgelegt ist. (Für den späteren Gebrauch sei an dieser Stelle die Abbildung $\phi'' : N_T^1 \rightarrow F_\emptyset$ gerade so definiert, daß sie die eben beschriebene Interpretation realisiert.)

Etwas komplizierter wird die Sache, wenn ein fast leeres Netzwerk H (d.h. $[H] \in N_T^0$) interpretiert werden soll. Da es sich bei $(N_T^0, \times, \bullet_D)$ um ein Untermonopolyid von $(N_T^F / \sim, \times, \bullet_D)$ handelt, muß es sich, nach obigen Ausführungen, bei der, die Interpretation beschreibenden Abbildung $\phi'' : (N_T^0, \times, \bullet_D) \rightarrow (F_\emptyset, \times, \bullet_\emptyset)$ einerseits um einen Monopolyiden-Homomorphismus handeln. Andererseits aber sollen die äußeren Ein- bzw. Ausgänge eines Datenflußnetzwerkes gerade die Input- bzw. Outputvariablen (x_i bzw. y_j) der zuzuordnenden Funktion symbolisieren. Das heißt, es sollte $y_j = x_i$ sein, falls vom i -ten äußeren Eingang genau eine Kante zum j -ten äußeren Ausgang führt. Allgemein sollte der Wert der Variablen y_j von den Kanten, die zum j -ten äußeren Ausgang führen und nur von diesen bestimmt sein. Um nun beiden Ansprüchen gerecht zu werden, ist es notwendig, daß zu jeder, im Datenflußmodell auftretenden Wertemenge W eine sogenannte **Auswahlabbildung** Δ_W existiert. Dabei gilt nach dem A2. Kapitel folgende Definition:

Definiert \cdot die Konkatenation zweier Vektoren und ist $W \neq \emptyset$ eine Wertemenge, sowie (W^*, \cdot) das freie Monoid der Vektoren mit Komponenten aus W mit λ als Neutralelement bzw. leeren Vektor, dann heißt eine Abbildung $\Delta_W : W^* \rightarrow W$ eine **Auswahlabbildung auf W** , wenn gilt:

- (1) $u, v \in W^* \Rightarrow \Delta_W(u \cdot v) = \Delta_W(v \cdot u)$
- (2) $u, v \in W^* \Rightarrow \Delta_W(u \cdot v) = \Delta_W((\Delta_W(u), \Delta_W(v)))$

$$(3) u=(u_1,\dots,u_n)\in W^* \text{ mit } u_1=\dots=u_n \Rightarrow \Delta_W(u)=u_1$$

Ist Δ_W eine Auswahlabbildung auf W , so ist leicht einzusehen, daß in einem Vektor $u\in W^*$ wegen (1) und (2) die Komponenten beliebig vertauscht und wegen (2) und (3) mehrfach vorhandene Werte (bis auf einen) gestrichen werden können, ohne den Wert von $\Delta_W(u)$ zu verändern. Ebenso gestrichen werden können Komponenten mit dem **Defaultwert** $\delta_W:=\Delta_W(\lambda)$.

Ein typisches Beispiel für eine Auswahlabbildung auf einer Menge von numerischen Werten, wie z.B. \mathbb{N}_0 , ist $\max(u)$ mit der maximalen Komponente von u als Ergebniswert und $\delta_W:=\min(\mathbb{N}_0)=0$. Da im Computer bekanntermaßen alle Werte als numerische Werte dargestellt werden, kann also davon ausgegangen werden, daß zu jeder Wertemenge auch eine Auswahlabbildung Δ_W definiert werden kann.

Setzt man nun für die Interpretation eines fast leeren Netzwerkes H mit $[H]\in N_T^0$ voraus, daß im Datenflußmodell für jede Wertemenge W genau eine Auswahlabbildung Δ_W festgelegt ist, so kann die, die Interpretation beschreibende Abbildung $\phi'':(N_T^0, \times, \bullet_D)\rightarrow(F_\emptyset, \times, \bullet_\beta)$ wie folgt definiert werden:

Ist $[H]\in N_T^0$ mit $H=(N, \nu, \tau)$, n bzw. m die Anzahl der äußeren Ein- bzw. Ausgänge von H , e_j bzw. a_j der j -te äußere Ein- bzw. Ausgang von H und X_j bzw. Y_j die dem Datentypen $\tau(e_j)$ bzw. $\tau(a_j)$ zugeordnete Wertemenge, dann sei $\phi'':(N_T^0, \times, \bullet_D)\rightarrow(F_\emptyset, \times, \bullet_\beta)$ definiert durch $\phi''([H]):=f$, wobei f folgende Abbildung ist:

$f:\emptyset\rightarrow\emptyset$, falls $n=m=0$,

$f:X_1\times\dots\times X_n\rightarrow\emptyset$, falls $n\neq 0$ und $m=0$,

$f:\emptyset\rightarrow Y_1\times\dots\times Y_m$ mit $(y_1,\dots,y_m):=(\delta_{Y_1},\dots,\delta_{Y_m})$ falls $n=0$ und $m\neq 0$,

$f:X_1\times\dots\times X_n\rightarrow Y_1\times\dots\times Y_m$ mit $(y_1,\dots,y_m):=(\Delta_{Y_1}(\bar{x}_1),\dots,\Delta_{Y_m}(\bar{x}_m))$ falls $n\neq 0$ und $m\neq 0$, wobei der Vektor $\bar{x}_j:=(x_{j_1},\dots,x_{j_m})$ mit $j_1<\dots<j_m$ durch die Menge aller Kanten (e_{j_i}, a_j) aus $K(N)$ definiert ist.

Mit etwas Aufwand läßt sich nun einerseits beweisen, daß es sich bei ϕ'' um einen Monopolyiden-Homomorphismus handelt. (Vgl. Satz A2.9.11.) Betrachtet man andererseits die Funktion f genauer, so zeigt sich, daß $y_j=x_i$ ist, falls zum j -ten äußeren Ausgang genau eine Kante führt. (Nämlich die vom i -ten äußeren Eingang.) Führt zum j -ten äußeren Ausgang keine Kante, so wird y_j gleich dem Defaultwert δ_{Y_j} gesetzt. Allgemein wird der Wert der Variablen y_j von allen Kanten festgelegt, die zum j -ten äußeren Ausgang führen. Damit definiert ϕ'' also nach obigen Forderungen insbesondere eine sinnvolle Interpretation der Identitäten und Permutationen.

Werden die bis hierher definierten Abbildungen ϕ'' und ϕ'' zu einer Abbildung $\phi': N_T^0 \cup N_T^1 \rightarrow F_0$ mit $\phi' := \phi'' \cup \phi''$ zusammengefaßt, so beschreibt diese bereits die Interpretation aller Datenflußnetzwerke H mit $[H] \in N_T^0 \cup N_T^1$. Damit ist jedoch bereits die Interpretation aller zykelfreien Datenflußnetzwerke aus dem von $N' := N_T^0 \cup N_T^1$ erzeugten Monopolyid $\langle N', \times, \bullet_D \rangle$ festgelegt, da nach dem dritten Hauptsatz (Satz A2.9.19) ϕ' zu (nur) genau einem Monopolyiden-Homomorphismus ϕ von $\langle N', \times, \bullet_D \rangle$ nach (F_0, \times, \bullet_D) fortgesetzt werden kann. Für die Praxis genügt es allerdings nicht zu wissen, daß der die Interpretation beschreibende Monopolyiden-Homomorphismus ϕ damit eindeutig festgelegt ist. Vielmehr ist es notwendig ein genaues Verfahren angeben zu können, das einem Datenflußnetzwerk explizit genau eine Funktion zuordnet. Die Grundlage dazu liefert wieder der dritte Hauptsatz, jedoch muß dazu zunächst genauer auf die Zerlegung von Datenflußnetzwerken eingegangen werden.

Abschließend noch eine kurze, aber wichtige Randbemerkung zur etwas mühevollen Definition von ϕ'' : Leider ist es nicht möglich ϕ'' zuerst nur auf einer Teilmenge von N_T^0 zu definieren und dann unter Anwendung eines, dem dritten Hauptsatz, vergleichbaren Satzes auf ganz N_T^0 fortzusetzen, da es sich bei N_T^0 im Gegensatz zu $\langle N', \times, \bullet_D \rangle$ um kein natürliches Monopolyid handelt, d.h. jeder Monopolyiden-Homomorphismus von N_T^0 nach $(\mathbb{N}_0, +, +)$ bildet alle Elemente auf die 0 ab.

A2.5 Die Zerlegung zyklischer Datenflußnetzwerke

Wie bereits mehrmals erwähnt, ist die Äquivalenzklasse jedes Datenflußnetzwerks Element eines, von einer Teilmenge $N' \subseteq N_T^F / \sim$ erzeugten Untermonopolyids $\langle N', \times, \bullet \rangle$. Um diese Behauptung nun für den Fall von zyklischen Datenflußnetzwerken zu beweisen, wird nachfolgend daraufhin gearbeitet zu einer solchen Äquivalenzklasse eine erzeugende Menge N' angeben zu können. Da das von N' erzeugte Untermonopolyid gerade aus der Menge der endlichen Produkte bzgl. " \times " und " \bullet " besteht, ist es naheliegend, zur Verifizierung von N' in umgekehrter Richtung vorzugehen und ein Datenflußnetzwerk sozusagen in seine Bestandteile zu zerlegen.

A2.5.1 Allgemeines

Für Subzentren-Netzwerke gibt es sehr einfache Kriterien anhand derer entschieden werden kann, ob ein Netzwerk bzgl. des parallelen oder seriellen Produkts zerlegbar ist.

Betrachtet man zunächst das parallele Produkt. Ein Subzentren-Netzwerk ist genau dann das parallele Produkt zweier anderer Netzwerke, wenn die Menge seiner Knoten in (mindestens) zwei disjunkte Gruppen aufgeteilt werden kann, so daß es keinen Pfad von den Knoten der einen Gruppe zu einem Knoten der anderen Gruppe gibt und jede Gruppe mit äußeren Ein- bzw. Ausgängen auch alle äußeren Ein- bzw. Ausgänge mit einem dazwischen liegenden Index enthält. In diesem Fall definiert gerade jede dieser Teilmengen einen Operanden für das parallele Produkt. (Vgl. Bild A2.20.)

Analog kann ein Subzentren-Netzwerk genau dann als das serielle Produkt zweier anderer Netzwerke beschrieben werden, wenn die Menge seiner Knoten so in zwei disjunkte Gruppen aufgeteilt werden kann, daß eine Gruppe alle äußeren Eingänge und die andere alle äußeren Ausgänge beinhaltet und es keine Kanten von der Menge mit den äußeren Ausgängen in die Menge mit den äußeren Eingängen gibt. Die Operanden des seriellen Produkts sind dann gegeben über die jeweilige Teilmenge und die Verwendung der verbindenden Halbkanten als äußere Ausgänge bzw. äußere Eingänge. (Vgl. Bild A2.22.)

Damit eine Zerlegung in ein paralleles oder serielles Produkt möglich ist, darf es also zwischen den beiden Teilmengen entweder keine oder nur Kanten in eine Richtung geben. Daraus folgt unmittelbar, daß ein Subzentren-Netzwerk dessen

Subzentren alle über Zykel verbunden sind, nie über das parallele oder serielle Produkt weiter zerlegt werden kann.

Ausgehend von obig gewonnenen Erkenntnissen wird als nächstes ein Algorithmus vorgestellt, mit dem es möglich ist, ein Subzentren-Netzwerk ohne (echte) Zykel bezüglich des parallelen und seriellen Produkts in seine "Bestandteile" zu zerlegen. Im Gegensatz zu den zyklfreien Subzentren-Netzwerken handelt es sich bei den **Subzentren-Netzwerk ohne echte Zykel** um solche, in denen schlaufenbildende Kanten vom Ausgang eines Subzentrum zu einem Eingang desselben erlaubt sind.

A2.5.2 Ein Algorithmus zur Zerlegung eines zyklfreien Datenflußnetzwerkes

Obwohl nachfolgend die Zerlegung von zyklfreien Datenflußnetzwerken im Vordergrund steht, wird der zugehörige Algorithmus für spätere Zwecke so allgemein formuliert, daß er auch die Zerlegung von Subzentren-Netzwerken ohne echte Zykel, aber mit Schlaufen erlaubt. Als wesentliches Ergebnis zeigt sich dabei, daß zyklfreie Subzentren-Netzwerke in Netzwerke zerlegt werden können, deren Äquivalenzklassen Elemente aus $N_T^0 \cup N_T^1$ sind.

Des einfachen Verständnisses wegen, ist der Algorithmus in mehrere Teilschritte bzw. Unteralgorithmen gegliedert. Ein erster, wesentlicher Schritt besteht darin, ein gegebenes Netzwerk in eine Folge von seriellen Faktoren zu zerlegen, die entweder genau ein Subzentrum und keinen Interimknoten, genau einen Interimknoten und kein Subzentrum oder keines von beiden enthalten. Dazu folgender Algorithmus:

Algorithmus: ZERLEGUNG_IN_FAKTOREN

/* Zerlegung in Faktoren die höchstens ein Subzentrum oder höchstens einen Interimknoten enthalten. */

- (0) Angenommen das gegebene Netzwerk H enthält kein Subzentrum und keinen Interimknoten, dann: Stop.
- (1) Suche ein Subzentrum s^* oder einen Interimknoten i^* der bzw. das kein anderes Subzentrum und keinen anderen Interimknoten als Vorgänger besitzt. Wähle dazu ein beliebiges Subzentrum oder einen beliebigen Interimknoten und gehe solange zu einem Nachfolger (Subzentrum oder Interimknoten), solange ein solcher existiert.
- (2) Ist der unter (1) gefundene Knoten ein Subzentrum, so zerlege H mit dem Algorithmus **ABSPALT_SUBZ** in zwei serielle Faktoren H_1 und H_r , wobei H_r genau ein Subzentrum und keinen Interimknoten enthält. Ist der gefundene Knoten

ein Interimknoten, so benutze den Algorithmus **ABSPALT_INTERIM**.

(3) Merke H_r und fahre mit H_l mit Schritt (0) fort.

Angenommen der von Algorithmus **ABSPALT_SUBZ** bzw. **ABSPALT_INTERIM** abgespaltete Faktor H_r enthält genau ein Subzentrum und keinen Interimknoten bzw. umgekehrt, so zerlegt dieser Algorithmus ein Subzentren-Netzwerk ohne (echte) Zykel von rechts nach links in serielle Faktoren, die höchstens ein Subzentrum oder höchstens einen Interimknoten enthalten. Die einzig kritische Stelle ist mit Schritt (1) gegeben, da die Suche nach einem geeigneten Nachfolger in einer Endlosschleife enden könnte. Dies ist jedoch nicht der Fall, da vorausgesetzt wird, daß H keinen (echten) Zykel besitzt.

Algorithmus: ABSPALT_SUBZ

/* Abspalten eines Subzentrums s^* , das kein anderes Subzentrum und keinen Interimknoten als Nachfolger besitzt. */

- (1) Durchlaufe alle äußeren Ausgänge und ermittle die Menge K aller Kanten die zu diesen führen und nicht von einem Ausgang von s^* ausgehen.
Füge diesen alle Kanten hinzu, die zu einem Eingang von s^* führen (und nicht von einem Ausgang von s^* ausgehen).
- (2) Bestimme zwei disjunkte Knotenmengen A und E mit einer eindeutigen Zuordnung zu den Kanten aus K und ordne jedem Element aus A bzw. E den Index und Typ der entsprechenden Kante zu.
- (3) Erzeuge zwei disjunkte Kopien H_l und H_r von H .
- (4) Lösche aus H_r alle äußeren Ausgänge, alle Interimknoten und alle Subzentren, mit ihren Ein- und Ausgängen, die verschieden von s^* sind.
Nehme die Knotenmenge A als äußere Eingänge hinzu und verbinde jeden von diesen durch eine Kante mit dem Knoten, zu dem die eindeutig zugeordnete Kante aus K führte.
- (5) Lösche aus H_l alle äußeren Eingänge und s^* mit all seinen Ein- und Ausgängen.
Nehme die Knotenmenge E als äußere Ausgänge hinzu und verbinde jeden von diesen durch eine Kante mit dem Knoten, von dem die eindeutig zugeordnete Kante aus K ausging.
- (6) Stop! $H_l \bullet H_r = H$.

Von der Gültigkeit der Aussage $H_l \bullet H_r = H$ kann man sich leicht überzeugen, wenn man beachtet, daß in Schritt (4) und (5) die Knotenmenge von H in zwei disjunkte Teilmengen zerlegt wird, wobei gerade die Menge der Kanten K identisch zur Menge aller Kanten zwischen diesen Teilmengen ist. (Kanten in die Gegenrichtung kann es nicht geben, da H keine (echten) Zykel besitzt.) Anschaulich gedeutet wird also in den Schritten (4)

und (5) ein Schnitt durch H gelegt, der die Kanten aus K in je zwei Halbkanten zerteilt. (Vgl. Bild A2.32.) Diese werden dann mit End- bzw. Anfangsknoten vervollständigt, die für die jeweilige Hälfte von H als äußere Aus- bzw. äußere Eingänge definiert werden. Da in Schritt (2) für die neuen Knoten die Typen der zugehörigen (Halb-)Kanten verwendet werden, ist sowohl H_1 als auch H_r ein formatiertes Subzentren-Netzwerk. Außerdem ist leicht zu sehen, daß jede Reihenfolge der Kanten aus K zwar zu anderen Indizes auf den äußeren Ausgängen von H_1 bzw. den äußeren Eingängen von H_r führt, aber stets $H_1 \cdot H_r = H$ gilt. Da s^* kein anderes Subzentrum und keinen Interimknoten als Nachfolger besitzt, enthält H_r genau ein Subzentrum und keinen Interimknoten.

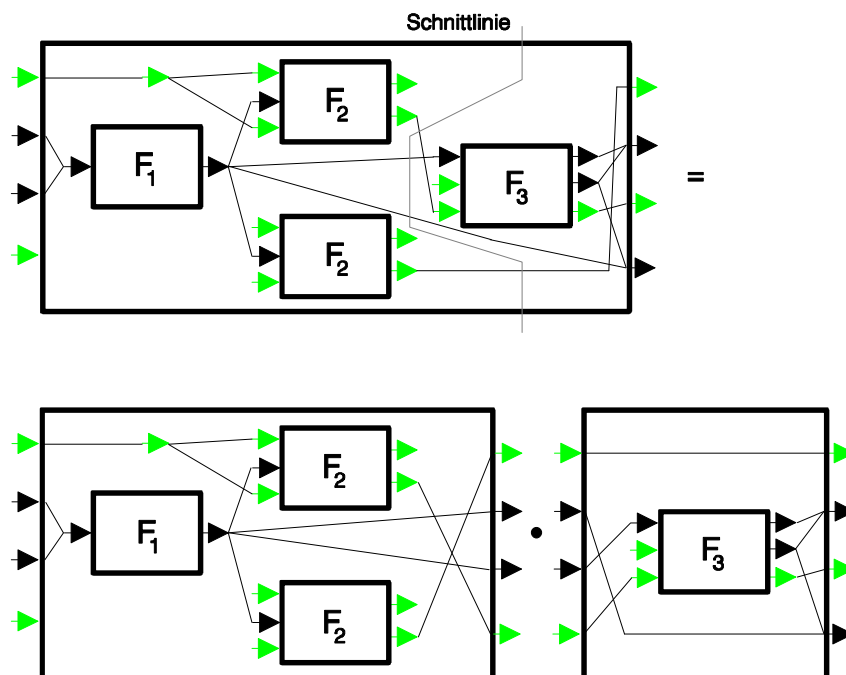


Bild A2.32: Das Abspalten eines seriellen Faktors mit genau einem Subzentrum unter Verwendung von Algorithmus ABSPALT_SUBZ.

Algorithmus: ABSPALT_INTERIM

/* Abspalten eines Interimknoten i^* , der keinen Interimknoten und kein Subzentrum als Nachfolger besitzt. */

- (1) Durchlaufe alle äußeren Ausgänge und ermittle die Menge K aller Kanten, die zu diesen führen und nicht von i^* ausgehen.
Füge diesen alle Kanten hinzu, die zu i^* führen.
- (2) Bestimme zwei disjunkte Knotenmengen A und E mit einer eindeutigen Zuordnung zu den Kanten aus K und ordne

jedem Element aus A bzw. E den Index und Typ der entsprechenden Kante zu.

- (3) Erzeuge zwei disjunkte Kopien H_l und H_r von H .
- (4) Lösche aus H_r alle äußeren Ausgänge, alle Subzentren mit ihren Ein- und Ausgängen und alle Interimknoten die verschieden von i^* sind.
Nehme die Knotenmenge A als äußere Eingänge hinzu und verbinde jeden von diesen durch eine Kante mit dem Knoten, zu dem die eindeutig zugeordnete Kante aus K führte.
- (5) Lösche aus H_l alle äußeren Eingänge und i^* .
Nehme die Knotenmenge E als äußere Ausgänge hinzu und verbinde jeden von diesen durch eine Kante mit dem Knoten, von dem die eindeutig zugeordnete Kante aus K ausging.
- (6) Stop! $H_l \bullet H_r = H$.

Von der Korrektheit dieses Algorithmus' kann man sich in vollkommener Analogie zu obigem Algorithmus `ABSPALT_SUBZ` überzeugen.

Die nachfolgenden Algorithmen dienen nun dazu, die vom Algorithmus `ZERLEGUNG_IN_FAKTOREN` erzeugten seriellen Faktoren in einfachere Bestandteile weiter zu zerlegen. Das Ziel dabei ist es, zu einfachen Netzwerken mit Subzentrum und einfachen Interimknoten zu gelangen.

Ist ein Subzentren-Netzwerk mit entweder genau einem Subzentrum und keinem Interimknoten oder genau einem Interimknoten und keinem Subzentrum gegeben, so sollen als nächstes äußere Ein- und Ausgänge abgespalten werden, von denen mehrere Kanten ausgehen bzw. zu denen mehrere Kanten führen.

Algorithmus: `ABSPALT_MULT_AE`

`/* Abspalten von äußeren Eingängen, von denen mehr als eine Kante ausgeht. */`

- (1) Durchlaufe alle äußeren Eingänge und ermittle die Menge K aller Kanten, die von diesen ausgehen.
- (2) Bestimme zwei disjunkte Knotenmengen A und E mit einer eineindeutigen Zuordnung zu den Kanten aus K und ordne jedem Element aus A bzw. E den Index und Typ der entsprechenden Kante zu.
- (3) Erzeuge zwei disjunkte Kopien H_l und H_r von H .
- (4) Lösche aus H_l alle Knoten außer den äußeren Eingängen.
Nehme die Knotenmenge A als äußere Ausgänge hinzu und verbinde jeden von diesen durch eine Kante mit dem Knoten, von dem die eindeutig zugeordnete Kante aus K ausging.
- (5) Lösche aus H_r alle äußeren Eingänge.
Nehme die Knotenmenge E als äußere Eingänge hinzu und

verbinde jeden von diesen durch eine Kante mit dem Knoten, zu dem die eindeutig zugeordnete Kante aus K führte.

(6) Stop! $H_1 \bullet H_r = H$.

Da die Menge der Kanten K wieder einen Schnitt definiert, ist leicht einzusehen, daß $H_1 \bullet H_r = H$ ist. (Vgl. Bild A2.34 oben.) Dabei enthält H_1 keine Subzentren oder Interimknoten und besitzt nur solche äußere Ausgänge zu denen genau eine Kante führt. H_r dagegen besitzt nur solche äußere Eingänge von denen genau eine Kante ausgeht. (Vgl. Bild A2.34 Mitte.)

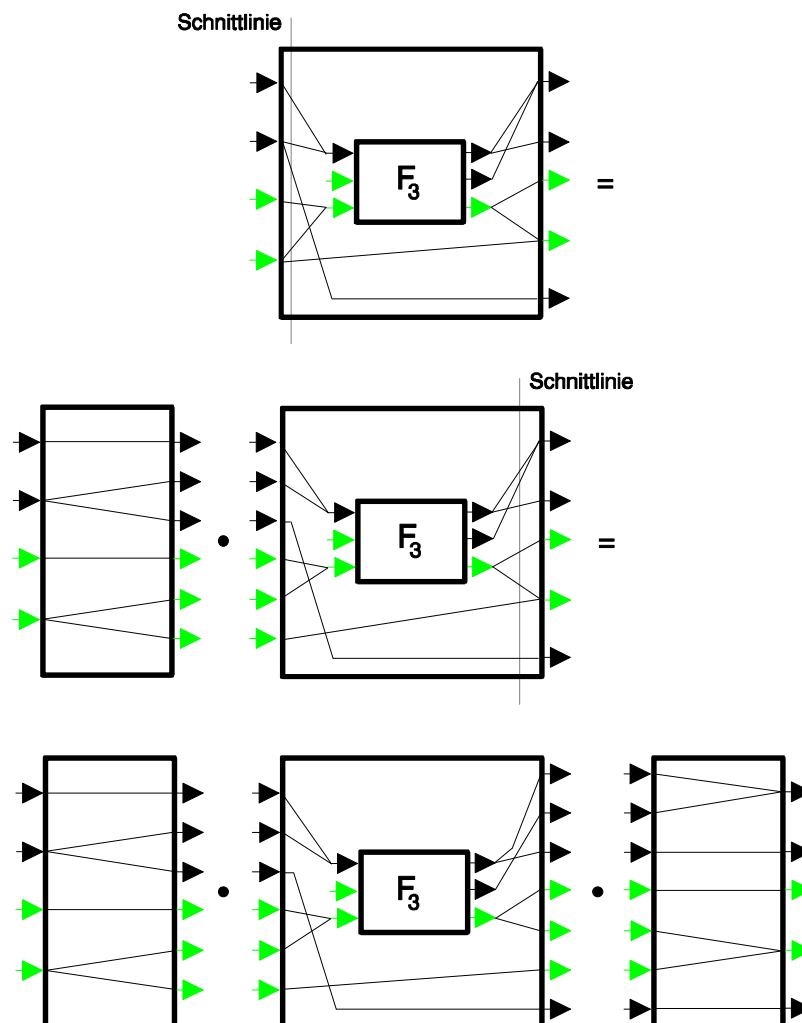


Bild A2.34: Das Abspalten von äußeren Eingängen bzw. äußeren Ausgängen, von denen mehr als eine Kante ausgeht bzw. zu denen mehr als eine Kante führt, als serielle Faktoren unter Verwendung des Algorithmus ABSPALT_MULT_AE bzw. ABSPALT_MULT_AA.

Algorithmus: ABSPALT_MULT_AA

/* Abspalten von äußeren Ausgängen, zu denen mehr als eine Kante führt. */

- (1) Durchlaufe alle äußeren Ausgänge und ermittle die Menge K aller Kanten, die zu diesen führen.
- (2) Bestimme zwei disjunkte Knotenmengen A und E mit einer eindeutigen Zuordnung zu den Kanten aus K und ordne jedem Element aus A bzw. E den Index und Typ der entsprechenden Kante zu.
- (3) Erzeuge zwei disjunkte Kopien H_1 und H_r von H .
- (4) Lösche aus H_1 alle äußeren Ausgänge.
Nehme die Knotenmenge A als äußere Ausgänge hinzu und verbinde jeden von diesen durch eine Kante mit dem Knoten, von dem die eindeutig zugeordnete Kante aus K ausging.
- (5) Lösche aus H_r alle Knoten außer den äußeren Ausgängen.
Nehme die Knotenmenge E als äußere Eingänge hinzu und verbinde jeden von diesen durch eine Kante mit dem Knoten, zu dem die eindeutig zugeordnete Kante aus K führte.
- (6) Stop! $H_1 \bullet H_r = H$.

Analog zum Algorithmus ABSPALT_MULT_AE ist leicht einzusehen, daß $H_1 \bullet H_r = H$ ist. Dabei besitzt H_1 nur solche äußere Ausgänge, zu denen genau eine Kante führt. H_r dagegen besitzt nur solche äußere Eingänge, von denen genau eine Kante ausgeht. Außerdem enthält H_r keine Subzentren oder Interimknoten. (Vgl. Bild A2.34 unten.)

Unter Anwendung der Algorithmen ABSPALT_MULT_AE und ABSPALT_MULT_AA läßt sich also jedes Netzwerk H mit entweder genau einem Subzentrum und keinem Interimknoten, genau einem Interimknoten und keinem Subzentrum oder ohne beides, in drei serielle Faktoren H_1 , H_m und H_r mit $H_1 \bullet H_m \bullet H_r = H$ zerlegen, wobei H_1 und H_r Netzwerke sind, die keine Subzentren oder Interimknoten beinhalten. H_1 besitzt nur solche äußere Ausgänge, zu denen genau eine Kante führt und H_r besitzt nur solche äußere Eingänge, von denen genau eine Kante ausgeht. Da für H_m beides gilt, handelt es sich bei H_m genau dann um eine Permutation, wenn H_m weder Subzentren noch Interimknoten beinhaltet.

Mit den nächsten beiden Algorithmen sollen von einem Netzwerk, das genau ein Subzentrum und keine Interimknoten besitzt und von dessen äußeren Eingängen genau eine Kante ausgeht und zu dessen äußeren Ausgängen genau eine Kante führt, innere Ein- bzw. Ausgänge abgespalten werden, zu denen ausgehend von den äußeren Eingängen nicht genau eine Kante führt bzw. von denen nicht genau eine Kante zu den äußeren Ausgängen führt.

Algorithmus: ABSPALT_MULT_IE

/* Abspalten von inneren Eingängen, zu denen ausgehend von den äußeren Eingängen mehr als eine oder keine Kante führt. */

- (1) Bestimme die Menge M aller äußeren Eingänge deren Kante (direkt) zu einem äußeren Ausgang führt und füge dieser alle inneren Eingänge hinzu. Vergebe fortlaufende Indizes so, daß die Reihenfolge der Knoten beibehalten wird.
- (2) Erzeuge zwei disjunkte Kopien H_1 und H_r von H .
- (3) Lösche aus H_1 alle Knoten außer den äußeren Eingängen und füge eine Kopie der Knoten aus M als äußere Ausgänge hinzu.
Verbinde jeden äußeren Eingang mit jedem neuen Knoten, wenn entweder dessen Original identisch zu diesem ist oder eine Kante zu dessen Original führte.
- (4) Lösche aus H_r alle äußeren Eingänge und füge eine Kopie der Knoten aus M als äußere Eingänge hinzu.
Verbinde jeden äußeren Ausgang mit dem neuen Knoten, wenn dessen Original mit diesem verbunden war und verbinde jeden neuen Knoten mit dem inneren Eingang, wenn dessen Original identisch zu diesem ist.
- (5) Stop! $H_1 \bullet H_r = H$.

Bei Anwendung dieses Algorithmus werden nicht nur die, durch Kanten (ausgehend von äußeren Eingängen) mehrfach oder nicht belegten inneren Eingänge abgespalten, sondern auch die äußeren Eingänge so sortiert, daß zuerst die äußeren Eingänge kommen von denen eine Kante (direkt) zu einem äußeren Ausgang führt und anschließend die äußeren Eingänge kommen, von denen eine Kante zu einem inneren Eingang führt. Überdies sind letztere so sortiert, daß sie in der Reihenfolge mit den inneren Eingängen harmonieren. (Vgl. Bild A2.36 Mitte.)

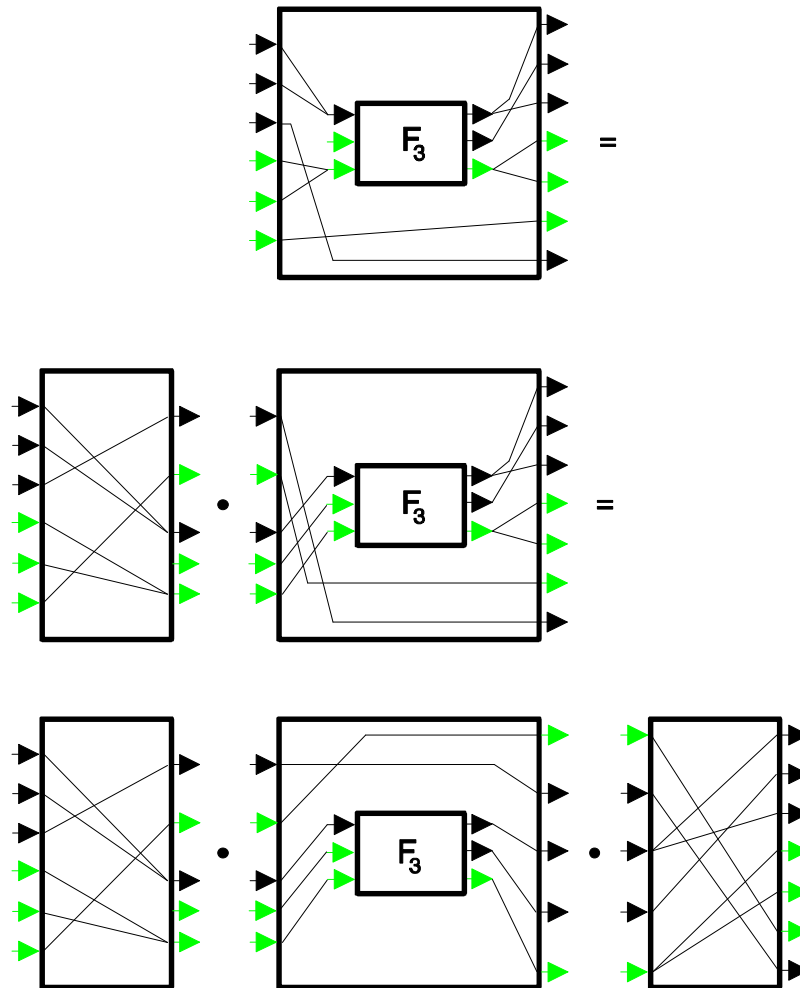


Bild A2.36: Abspalten von mehrfach oder nicht belegten inneren Ein- bzw. Ausgängen mit dem Algorithmus ABSPALT_MULT_IE bzw. ABSPALT_MULT_IA.

Algorithmus: ABSPALT_MULT_IA

/* Abspalten von inneren Ausgängen, von denen mehr als eine oder keine Kante zu den äußeren Ausgängen führt. */

- (1) Bestimme die Menge M aller äußeren Ausgänge, zu denen eine Kante von einem äußeren Eingang führt und füge dieser alle inneren Ausgänge hinzu. Vergebe fortlaufende Indizes so, daß die Reihenfolge der Knoten beibehalten wird.
- (2) Erzeuge zwei disjunkte Kopien H_1 und H_r von H .
- (3) Lösche aus H_r alle Knoten außer den äußeren Ausgängen und füge eine Kopie der Knoten aus M als äußere Eingänge hinzu.
Verbinde jeden äußeren Ausgang mit jedem neuen Knoten, wenn entweder dessen Original identisch zu diesem ist oder eine Kante zu dessen Original führte.
- (4) Lösche aus H_1 alle äußeren Ausgänge und füge eine Kopie der Knoten aus M als äußere Ausgänge hinzu.

Verbinde jeden äußeren Eingang mit dem neuen Knoten, wenn dieser mit dessen Original verbunden war und verbinde jeden inneren Ausgang mit dem neuen Knoten, wenn dessen Original identisch zu diesem ist.

(5) Stop! $H_1 \bullet H_r = H$.

Analog zum Algorithmus ABSPALT_MULT_IA werden auch hier die äußeren Ausgänge sortiert. (Vgl. Bild A2.36 unten.)

Da die äußeren Ein- bzw. Ausgänge eines seriellen Faktors mit genau einem Subzentrum bzw. Interimknoten nun in spezieller Weise geordnet sind, kann ein derartiges Netzwerk unter Berücksichtigung der Formel $H_1 \times H_2 = (H_1 \times I_{21}) \bullet (I_{1r} \times H_2)$ weiter zerlegt werden.

Algorithmus: ZERLEG_PARA_PROD

/* Zerlegung eines parallelen Produkts in zwei serielle Faktoren */

- (1) Bestimme die Menge E aller äußeren Eingänge (mit Typ und Index) von denen keine Kante zu einem äußeren Ausgang führt und bestimme die Menge A aller äußeren Ausgänge (mit Typ und Index) zu denen eine Kante von einem äußeren Eingang führt
- (2) Erzeuge zwei disjunkte Kopien H_1 und H_r von H .
- (3) Lösche aus H_1 das Subzentrum (bzw. den Interimknoten). Ersetze in H_1 alle äußeren Ausgänge, die nicht zu A gehören durch eine Kopie der Knoten aus E und verbinde Original und Kopie durch eine Kante.
- (4) Ersetze in H_r alle äußeren Eingänge, die nicht zu E gehören, durch eine Kopie der äußeren Ausgänge aus A und verbinde Original und Kopie mit einer Kante.
- (5) Stop! $H_1 \bullet H_r = H$.

Da das gegebene Netzwerk H das parallele Produkt $H_1 \times H_2$ ist und nach den Monopolyid-Axiomen gilt: $H_1 \times H_2 = (H_1 \times I_{21}) \bullet (I_{1r} \times H_2)$, wobei I_{21} die linksseitige Identität von H_2 und I_{1r} die rechtsseitige Identität von H_1 ist, ist leicht einzusehen, daß $H_1 \bullet H_r = H$ ist, da in Schritt (3) gerade $H_1 = H_1 \times I_{21}$ und in Schritt (4) gerade $H_r = I_{1r} \times H_2$ konstruiert wird. (Siehe auch Bild A2.38.)

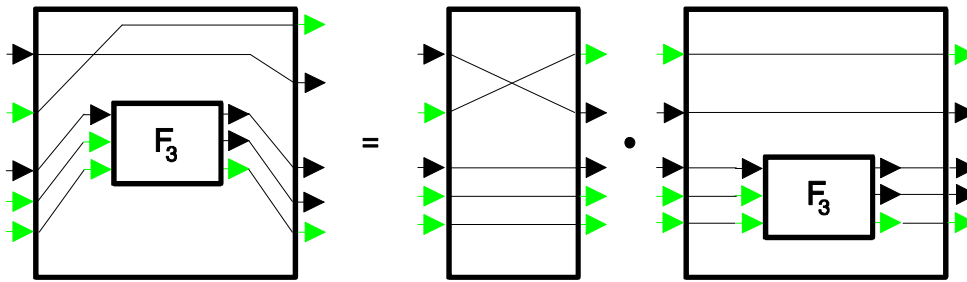


Bild A2.38: Zerlegung nach Algorithmus ZERLEG_PARA_PROD.

In analoger Weise wie bisher Subzentren-Netzwerke mit genau einem Subzentrum und keinem Interimknoten in serielle Faktoren zerlegt wurden, soll dies nun auch für Subzentren-Netzwerke mit genau einem Interimknoten und keinem Subzentrum beschrieben werden. Dabei kann vorausgesetzt werden, daß mit den Algorithmen ABSPALT_MULT_AE bzw. ABSPALT_MULT_AA bereits alle äußeren Eingänge bzw. äußeren Ausgänge als Faktoren abgespalten wurden, von denen nicht genau eine Kante ausging bzw. zu denen nicht genau eine Kante führte. Es soll nun daraus mit den Algorithmen ABSPALT_MULT_IE_I und ABSPALT_MULT_IA_I ein Netzwerk extrahiert werden, in dem der Interimknoten genau eine eingehende und genau eine ausgehende Kante besitzt.

Algorithmus: ABSPALT_MULT_IE_I

/* Erzeugen eines Interimknotens, zu dem genau eine Kante führt. */

- (0) Führt zum Interimknoten i^* genau eine Kante, dann: Fertig!
- (1) Bestimme die Menge M aller äußeren Eingänge, deren Kante (direkt) zu einem äußeren Ausgang führt und füge dieser eine Kopie des Interimknotens i^* hinzu. Vergebe fortlaufende Indizes so, daß der Extraknoten den höchsten Index erhält.
- (2) Erzeuge zwei disjunkte Kopien H_l und H_r von H .
- (3) Lösche aus H_l alle Knoten außer den äußeren Eingängen und füge eine Kopie der Knoten aus M als äußere Ausgänge hinzu.
Verbinde jeden äußeren Eingang mit jedem neuen Knoten, wenn entweder dessen Original identisch zu diesem ist oder eine Kante zu dessen Original führte.
- (4) Lösche aus H_r alle äußeren Eingänge und füge eine Kopie der Knoten aus M als äußere Eingänge hinzu.
Verbinde jeden äußeren Ausgang mit dem neuen Knoten, wenn dessen Original mit diesem verbunden war. (Der Extraknoten wird mit dem Interimknoten verbunden.)
- (5) Stop!

Bei Anwendung dieses Algorithmus werden nicht nur die Menge der Kanten, die zum Interimknoten führen, auf genau eine Kante reduziert bzw. erweitert, sondern es werden auch die äußeren Eingänge so sortiert, daß zuerst die äußeren Eingänge kommen von denen eine Kante (direkt) zu einem äußeren Ausgang führt. Der letzte äußere Eingang ist derjenige, von dem eine Kante zum Interimknoten führt. (Vgl. Bild A2.40 Mitte.)

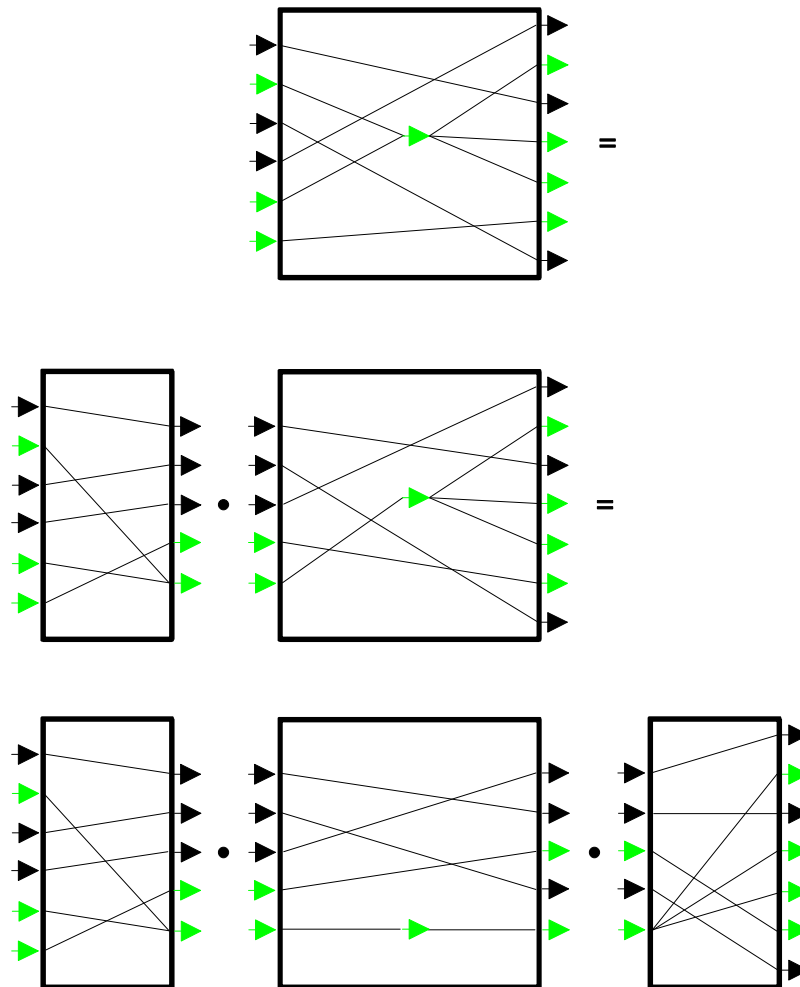


Bild A2.40: Erzeugen eines einfachen Interimknoten mit den Algorithmen ABSPALT_MULT_IE_I und ABSPALT_MULT_IA_I.

Algorithmus: ABSPALT_MULT_IA_I

/* Erzeugen eines Interimknotens, von dem genau eine Kante ausgeht. */

- (0) Geht vom Interimknoten i^* genau eine Kante aus, dann: Fertig!
- (1) Bestimme die Menge M aller äußeren Ausgänge, zu denen eine Kante von einem äußeren Eingang führt und füge dieser eine

Kopie des Interimknoten i^* hinzu. Vergebe fortlaufende Indizes so, daß der Extraknoten den höchsten Index erhält.

- (2) Erzeuge zwei disjunkte Kopien H_l und H_r von H .
- (3) Lösche aus H_r alle Knoten, außer den äußeren Ausgängen, und füge eine Kopie der Knoten aus M als äußere Eingänge hinzu.
Verbinde jeden äußeren Ausgang mit jedem neuen Knoten, wenn entweder dessen Original identisch zu diesem ist oder eine Kante zu dessen Original führte.
- (4) Lösche aus H_l alle äußeren Ausgänge und füge eine Kopie der Knoten aus M als äußere Ausgänge hinzu.
Verbinde jeden äußeren Eingang mit dem neuen Knoten, wenn dessen Original mit diesem verbunden war. (Der Extraknoten wird mit dem Interimknoten verbunden.)
- (5) Stop!

Als Nebeneffekt der Algorithmen ABSPALT_MULT_IE_I und ABSPALT_MULT_IA_I werden die äußeren Ein- und Ausgänge so sortiert, daß das Netzwerk, das den Interimknoten beinhaltet, wieder das parallele Produkt zweier Netzwerke ist und mit dem Algorithmus ZERLEG_PARA_PROD in zwei serielle Faktoren zerlegt werden kann. (Vergleiche dazu Bild A2.40 unten und Bild A2.38.)

A2.5.3 Sequentielle Darstellungen

An dieser Stelle sollen die bisher gewonnenen Erkenntnisse zu einem Zwischenergebnis zusammengefaßt werden. Beginnend mit dem Algorithmus ZERLEGUNG_IN_FAKTOREN kann jedes Subzentren-Netzwerk in ein serielles Produkt von Faktoren zerlegt werden, die entweder genau ein Subzentrum und keinen Interimknoten, oder genau einen Interimknoten und kein Subzentrum oder keines von beiden beinhalten. Mit den weiteren Algorithmen können die Faktoren, die genau ein Subzentrum beinhalten in ein Produkt der Form $H_l \cdot H_l' \cdot (I \times H) \cdot H_r \cdot H_r'$ weiter zerlegt werden, wobei H ein einfaches Netzwerk mit Subzentrum, I eine Identität und H_l, H_l', H_r, H_r' fast leere Netzwerke sind. Analog können solche Faktoren, die genau einen Interimknoten beinhalten in ein Produkt der Form $H_l \cdot H_l' \cdot (I \times H) \cdot H_r \cdot H_r'$ weiter zerlegt werden, so daß H ein einfacher Interimknoten ist. Bezeichnet 0 das leere Netzwerk bzw. das Neutralelement bzgl. des parallelen Produkts, so steht damit ein Algorithmus zur Verfügung mit dem es möglich ist, jedes Subzentren-Netzwerk H ohne (echte) Zykel in ein Produkt der Form $H = (I_{t_1} \times H_1 \times I_{b_1}) \cdot \dots \cdot (I_{t_n} \times H_n \times I_{b_n})$ zu zerlegen, wobei I_{t_i}, I_{b_i} (meist zu 0 identische) Identitäten sind und es sich bei den H_i um einfache Netzwerke mit Subzentren, einfache Interimknoten oder um fast leere Netzwerke handelt. Jede Zerlegung eines Subzentren-Netzwerkes H dieser Form nennt man eine **sequentielle Darstellung** von H . Da es sich bei Datenflußnetzwerken um Subzentren-Netzwerke handelt, bietet nun jede sequentielle Darstellung eines

Datenflußnetzwerks die Möglichkeit, diesem eine Funktionalität zuzuordnen bzw. dieses als Funktion zu interpretieren.

Nur am Rande sei noch angemerkt, daß fast leere Netzwerke mit ähnlichen Algorithmen wie oben angegeben in ihre elementaren Bestandteile zerlegt werden könnten. (Vgl. Bild A2.19.) Für die nachfolgend beschriebene Interpretation von Datenflußnetzwerken ist dies jedoch bedeutungslos.

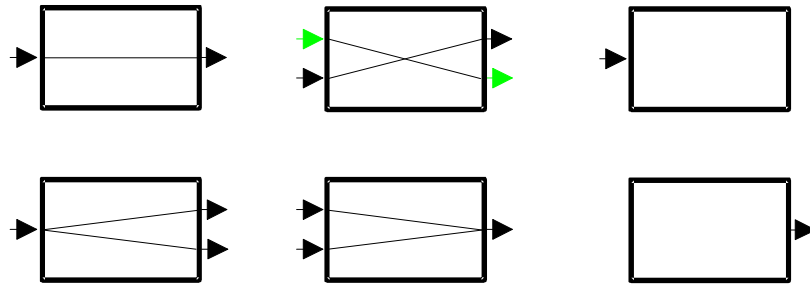


Bild A2.42: Beispiele für unzerlegbare, fast leere Netzwerke.

A2.6 Die Interpretation zyklfreier Datenflußnetzwerke

Den Schlüssel zur Interpretation eines zyklfreien Datenflußnetzwerks bieten seine sequentiellen Darstellungen. Dazu folgender Ansatz:

Im vorhergehenden Abschnitt wurde ein Algorithmus vorgestellt, der zu jedem zyklfreien Datenflußnetzwerk H eine sequentielle Darstellung der Form $H=(I_{t1} \times H_1 \times I_{b1}) \cdot \dots \cdot (I_{tn} \times H_n \times I_{bn})$ ermittelt, wobei es sich bei den Netzwerken I_{ti} bzw. I_{bi} um Identitäten und bei den H_i um einfache Netzwerke ohne Schleifen, einfache Interimknoten oder um fast leere Netzwerke handelt, d.h. $[H_i] \in N_T^0 \cup N_T^1$. Damit kennt man auch für die Äquivalenzklasse $[H]$ eine sequentielle Darstellung, nämlich $[H]=([I_{t1}] \times [H_1] \times [I_{b1}]) \cdot \dots \cdot ([I_{tn}] \times [H_n] \times [I_{bn}])$, wobei die zu den Identitäten gehörenden Äquivalenzklassen $[I_{ti}]$ bzw. $[I_{bi}]$ ebenfalls Elemente aus N_T^0 sind. Da jedoch mit $\phi': N_T^0 \cup N_T^1 \rightarrow F_\emptyset$ bereits jeder Äquivalenzklasse aus $N_T^0 \cup N_T^1$ eine Funktion zugeordnet wird, ist es naheliegend $[H]$ die Funktion $\phi([H]) := (\phi'([I_{t1}]) \times \phi'([H_1]) \times \phi'([I_{b1}])) \cdot \dots \cdot (\phi'([I_{tn}]) \times \phi'([H_n]) \times \phi'([I_{bn}]))$ zuzuordnen.

Da $[H]=([I_{t1}] \times [H_1] \times [I_{b1}]) \cdot \dots \cdot ([I_{tn}] \times [H_n] \times [I_{bn}])$ ist und $[I_{ti}]$, $[I_{bi}]$, $[H_i] \in N_T^0 \cup N_T^1$ sind, ist leicht einzusehen, daß $[H]$ ein Element des von $N' := N_T^0 \cup N_T^1$ erzeugten Untermonopolyids der endlichen Produkte $\langle N', \times, \bullet_D \rangle$ ist. Auf der anderen Seite kann ebenso einfach gefolgert werden, daß $\phi([H]) \in (F_\emptyset, \times, \bullet_\emptyset)$ ist, da $(F_\emptyset, \times, \bullet_\emptyset)$ als Monopolyid bzgl. des parallelen und seriellen Produkts abgeschlossen ist. Aus diesen beiden Aussagen nun vorschnell zu folgern, daß mit obigem Ansatz eine Abbildung $\phi: \langle N', \times, \bullet_D \rangle \rightarrow (F_\emptyset, \times, \bullet_\emptyset)$ definiert werden könnte, wäre im allgemeinen ein verhängnisvoller Irrtum, da zwei verschiedene sequentielle Darstellungen einer Äquivalenzklasse $[H]$ zu verschiedenen Werten von $\phi([H])$ führen könnten und damit ϕ nicht mehr wohldefiniert wäre.

An dieser Stelle muß nun auf einige wichtige und nicht einfach zu beweisende Sätze aus dem A2. Kapitel verwiesen werden. Die wichtigste Voraussetzung, um diese Sätze anwenden zu können ist, daß es sich bei $\langle N', \times, \bullet_D \rangle$ um ein **natürliches Monopolyid** handelt, d.h. es existiert ein Monopolyiden-Homomorphismus von $\langle N', \times, \bullet_D \rangle$ nach $(\mathbb{N}_0, +, +)$ der mindestens ein Netzwerk (bzw. eine Äquivalenzklasse) nicht auf die 0 abbildet. Unter dieser Voraussetzung kann mit dem zweiten Hauptsatz gezeigt werden, daß N' ein **α -vollkommenes Erzeugendensystem** von $\langle N', \times, \bullet_D \rangle$ ist,

d.h. jede α -übertragbare Abbildung von N' nach F_\emptyset kann zu genau einem Monopolyiden-Homomorphismus fortgesetzt werden. Wird schließlich in Definition A2.9.13 $N'' := N_T^1$ gesetzt, so ist ϕ' nach Satz A2.9.17 eine **α -übertragbare Abbildung** und kann nach dem dritten Hauptsatz (Satz A2.9.19) zu genau einem Monopolyiden-Homomorphismus $\phi: \langle N', \times, \bullet_D \rangle \rightarrow (F_\emptyset, \times, \bullet_\emptyset)$ fortgesetzt werden, wobei explizit festgestellt wird, daß $\phi([H])$ nach obigem Ansatz berechnet werden kann. Insbesondere bedeutet dies, daß jede sequentielle Darstellung von $[H]$, unabhängig vom Algorithmus mit dem sie ermittelt wurde, zum selben Wert von $\phi([H])$ führt.

Da für eine sinnvolle Interpretation eines zykliefreien Datenflußnetzwerkes gefordert wird, daß diese über einen Monopolyiden-Homomorphismus ϕ beschreibbar sein muß, folgt damit für die Praxis, daß mit Festlegung der Interpretation von einfachen Netzwerken mit Subzentrum, einfachen Interimknoten und fast leeren Netzwerken (durch ϕ'), auch bereits die Interpretation aller anderen zykliefreien Datenflußnetzwerke festgelegt ist. Da es jedoch auch bei der Festlegung von ϕ' nur eine mögliche, sinnvolle Alternative gab, kann also mit gutem Grund behauptet werden, daß es sich bei oben beschriebener Art und Weise wahrscheinlich um die einzige Möglichkeit handelt die Interpretation eines zykliefreien Datenflußnetzwerkes sinnvoll zu definieren.

Es sei an dieser Stelle auch kurz auf die Interpretation hierarchisch strukturierter, zykliefreier Datenflußnetzwerke eingegangen, da sich diese Thematik mit wenigen Sätzen abschließend behandeln läßt. Wie eingangs erwähnt, erlaubt das erweiterte Datenflußmodell die prozedurale Abstraktion, d.h. zu einem vom Anwender erzeugten, zusammengesetzten Datenflußnetzwerk kann ein neuer Grundbaustein generiert werden. Dieser ist in seiner Struktur von der Anzahl der äußeren Ein- und Ausgänge des zusammengesetzten Bausteins und deren Typen und Indizes eindeutig bestimmt. Da dem zusammengesetzten Baustein durch die Interpretation eindeutig eine Funktion zugeordnet werden kann, ist es legitim, dem Typen des Subzentrums des neuen Grundbausteins statt dieser Funktion einen Verweis auf das entsprechende Netzwerk zuzuordnen. Bei dem ganzen Vorgang wird also lediglich ein neuer (Subzentren-) Typ definiert und die Menge der erzeugenden Elemente um eins erweitert. Damit ist die Interpretation hierarchisch strukturierter, zykliefreier Datenflußnetzwerke zu der Interpretation normaler zykliefreier Datenflußnetzwerke identisch, wenn die Verweise auf die Unternetzwerke zuvor durch die entsprechenden Funktionen ersetzt werden.

A2.7 Die Interpretation allgemeiner Datenflußnetzwerke

Der erste Schritt in Richtung einer Verallgemeinerung obiger Ausführungen wird getan, wenn statt zykelfreier Datenflußnetzwerke solche ohne echte Zykel untersucht werden. In Voraussicht auf die damit verbundene Problematik wurden die angegebenen Algorithmen bereits so formuliert, daß sie auch die Zerlegung von Datenflußnetzwerken ohne echte Zykel gewährleisten. Da in diesen Netzwerken auch Schleifen um Subzentren erlaubt sind, können sie in einfache Netzwerke mit oder ohne Schleifen, einfache Interimknoten und fast leere Netzwerke zerlegt werden. (Während des Zerlegungsvorgangs sind dabei die schlaufenbildenden Kanten zwar stets mit zu kopieren, ansonsten können sie jedoch einfach ignoriert werden.) Wird $N_T^{(1)}$ als die Obermenge von N_T^1 definiert, die zu jedem einfachen Netzwerk ohne Schleifen aus N_T^1 auch alle typenindexkonformen einfachen Netzwerke mit Schleifen enthält, so liefert der beschriebene Algorithmus zu jedem Datenflußnetzwerk ohne echte Zykel eine sequentielle Darstellung der Form $[H] = ([I_{t_1}] \times [H_1] \times [I_{b_1}]) \cdot \dots \cdot ([I_{t_n}] \times [H_n] \times [I_{b_n}])$, wobei für die einzelnen Faktoren $[I_{t_i}], [I_{b_i}], [H_i] \in N_T^0 \cup N_T^{(1)}$ gilt. Es ist nun nichts naheliegender, als die Abbildung ϕ'' auf eine Abbildung von $N_T^{(1)}$ nach $(F_{\emptyset, \times, \bullet})$ zu erweitern und die Interpretation eines Datenflußnetzwerkes ohne echte Zykel in vollkommener Analogie zu obig beschriebener Methode zu definieren. Seitens der Theorie ergeben sich dabei keine Probleme, denn in Definition A2.9.13 muß dazu lediglich $N'' := N_T^{(1)}$ gesetzt werden. Jedoch ist es eine offene Frage, wie einfache Netzwerke mit Schleifen sinnvoll interpretiert werden können. Zwar sind dazu verschiedene Ansätze naheliegend; zur vollständigen Beantwortung dieser Frage muß allerdings auf zukünftige, praktische Erfahrungen verwiesen werden.

Ebenso unvollständig beantwortet muß die Frage bleiben, wie die Interpretation beliebiger Datenflußnetzwerke (auch echte Zykel sind erlaubt) sinnvoll zu definieren ist, da derartige Netzwerke wegen der echten Zykel nicht vollständig in solche Faktoren zerlegt werden können, die entweder genau ein Subzentrum, genau einen Interimknoten oder keines von beiden enthalten. Ein Lösungsansatz dieses Problem zu umgehen, besteht nun darin, in einem Datenflußnetzwerk mit echten Zykel diese durch Substitution in Subzentren mit Schleifen zu überführen. Sehr vereinfacht ausgedrückt muß dazu wie folgt vorgegangen werden:

Jedes, an einem echten Zykel beteiligte Subzentrum definiert genau ein einfaches Netzwerk ohne Schleifen. Damit definieren alle am Zykel beteiligten Subzentren ein Netzwerk, das aus dem parallelen Produkt der zugehörigen einfachen Netzwerke ohne Schleifen besteht. (Vgl. Bild A2.44.) Der Zykel wird nun durch ein Subzentrum (mit Ein- und Ausgängen) substituiert, das zu dem, durch das parallele Produkt dieser Faktoren definierte Netzwerk ähnlich ist, wobei die Kanten zwischen den am Zykel beteiligten Subzentren als schlaufenbildende Kanten außen um den neuen Baustein gelegt werden. Damit ist sichergestellt, daß in Umkehrung der Reihenfolge das Substituieren des neuen Unterbausteins durch das neue Netzwerk wieder zum Originalnetzwerk führen würde. (Vgl. Bild A2.44.) Unter wiederholter Anwendung dieses Verfahrens können damit in einem allgemeinen Datenflußnetzwerk alle echten Zykel zu Unterbausteinen mit Schleifen reduziert werden.

Das so entstandene, hierarchisch strukturierte Datenflußnetzwerk ohne echte Zykel kann dann nach obigem Ansatz interpretiert werden.

Eine andere Methode, Schleifen oder echte Zykel aufzulösen, kann darin bestehen, Unterbausteine durch Netzwerke zu substituieren, die gerade die Funktion des Unterbausteins definieren. Im Fall, daß diese Funktion als das parallele Produkt verschiedener anderer Funktionen beschreibbar ist, kann diese Methode zur Auflösung des Zyklus führen. (Vgl. Bild A2.46.)

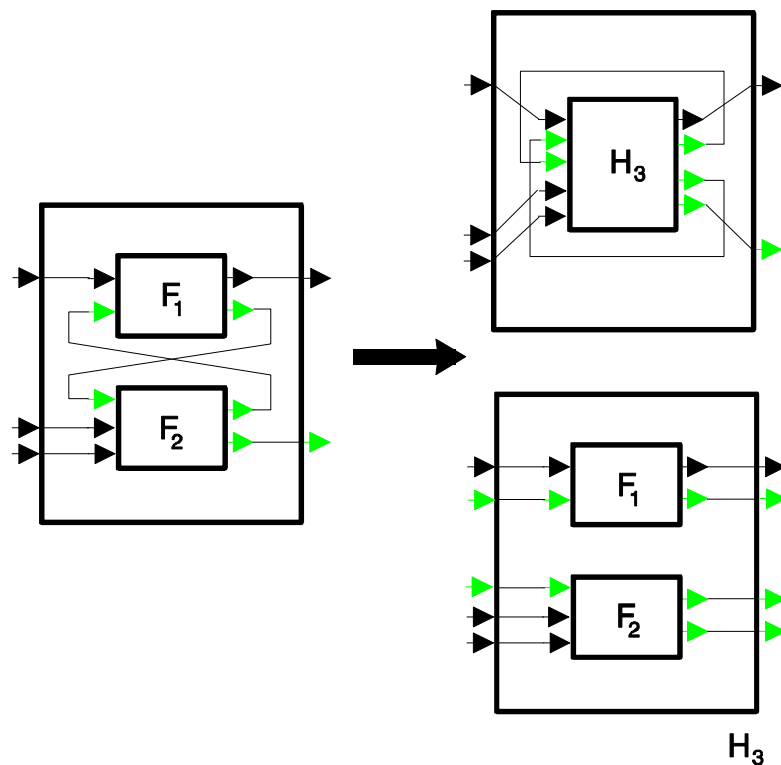


Bild A2.44: Die Substitution eines Zyklus unter Bildung eines hierarchischen Netzwerkes.

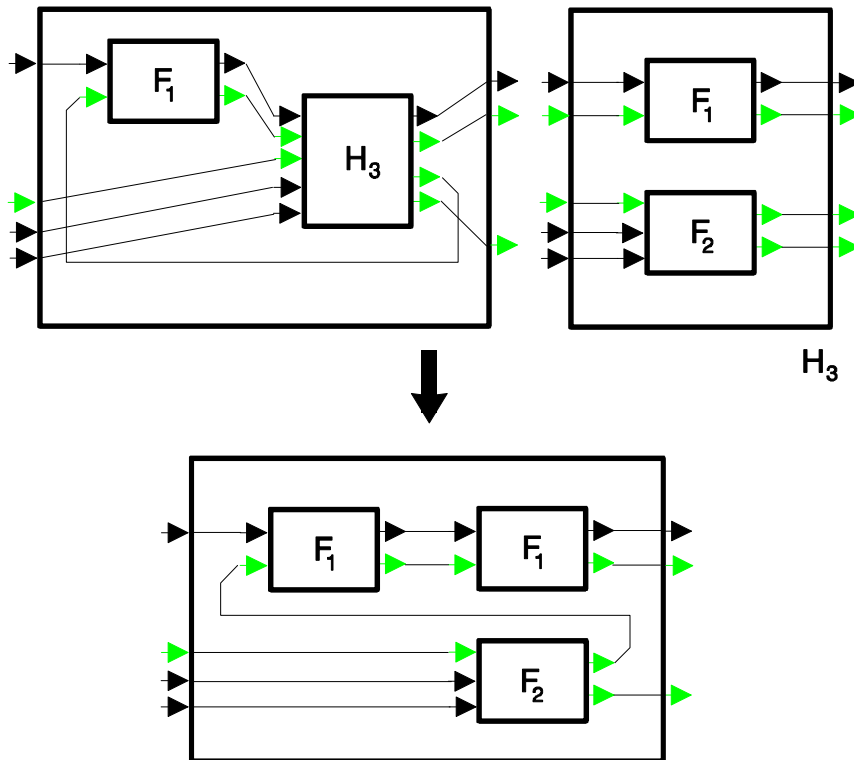


Bild A2.46: Auflösen eines echten Zyklus über die Substitution eines zusammengesetzten Unterbausteins durch sein Netzwerk.

Obwohl beide hier vorgestellten Verfahren zur Auflösung echter Zykel sehr vielversprechende Ansätze darstellen, muß eine detailliertere Analyse dazu versagt bleiben, da dies den Rahmen dieser Arbeit vollkommen sprengen würde.

A2. Mathematische Grundlagen

2.1 Einführung in die Graphentheorie	66
2.2 Tri-zyklische Graphen	69
2.3 Geordnete und indizierte Mengen	71

In diesem Kapitel werden zunächst kurz die wichtigsten Begriffe aus der Graphentheorie, wie z.B. gerichteter Graph, Knoten, Kanten, Pfad und Zykel eingeführt, um später darauf aufbauend, Subzentren-Netzwerke definieren und analysieren zu können.

Im Abschnitt "Tri-zyklische Graphen" wird eine bestimmte Klasse von Graphen definiert. Es handelt sich dabei um tri-partite, antisymmetrische Graphen, deren Knoten auf bestimmte Art und Weise in drei Teilmengen bzw. Arten aufgeteilt sind. Sie sind deshalb von Bedeutung, da man zum einen bei einer "Wanderung" durch einen tri-zyklischen Graphen stets die Art eines Knoten kennt und zum anderen jedes gepackte Subzentren-Netzwerk, also ein solches ohne Interimknoten, durch einen tri-zyklischen Graphen definiert wird.

Abschließend werden schließlich stückweise linear geordnete Mengen eingeführt und gezeigt, daß diese zu stückweise fortlaufend indizierten Mengen äquivalent sind. Es handelt sich dabei um nichts anderes als um Mengen von Teilmengen, die ihrerseits jeweils linear geordnet bzw. fortlaufend indiziert sind. Ihre besondere Bedeutung kommt dann zum Tragen, wenn im Fall bewerteter Subzentren-Netzwerke verschiedene Knotenmengen, wie z.B. die Ein- und Ausgänge eines Subzentrums, über Indizes geordnet werden.

A2.1 Einführung in die Graphentheorie

In diesem Abschnitt sollen die in der Graphentheorie üblichen und für das Verständnis der nachfolgenden Kapitel notwendigen Begriffe erklärt werden. Vergleichbare Definitionen findet man auch bei C. Berge [BER73] oder H. Noltemeier [NOL76].

Eine Menge V mit einer Relation $K \subseteq V \times V$ heißt ein **gerichteter Graph** $G=(V,K)$. Die Elemente von V bezeichnet man als **Knoten** und die Elemente von K als **Zuordnungen** oder **Kanten**. Der Graph heißt **symmetrisch**, falls aus $(v,u) \in K$ folgt $(u,v) \in K$, **gerichtet**, falls er nicht symmetrisch ist und **antisymmetrisch**, falls aus $(v,u) \in K$ folgt $(u,v) \notin K$. In gerichteten Graphen bezeichnet man die Menge $V_a(v) := \{u \in V : (u,v) \in K\}$ bzw. $V_p(v) := \{u \in V : (v,u) \in K\}$ eines Knoten v als die Menge der **Vorgänger** bzw. **Nachfolger** von v . $V_a(v) \cup V_p(v)$ heißt die Menge der Nachbarknoten von v . Sind die Knoten oder Kanten eines Graphen gewichtet, d.h. es gibt eine Menge M_1 bzw. M_2 und eine Abbildung $\alpha_1: V \rightarrow M_1$ bzw. $\alpha_2: K \rightarrow M_2$, dann heißt der Graph G **kanten-** bzw. **knotenbewertet**.

Bei der graphischen Darstellung von endlichen gerichteten Graphen werden Knoten normalerweise als kleine Kreise oder Punkte und die Zuordnungen in Form von Pfeilen dargestellt. Die Bewertungen der Knoten und Kanten trägt man neben diesen auf.

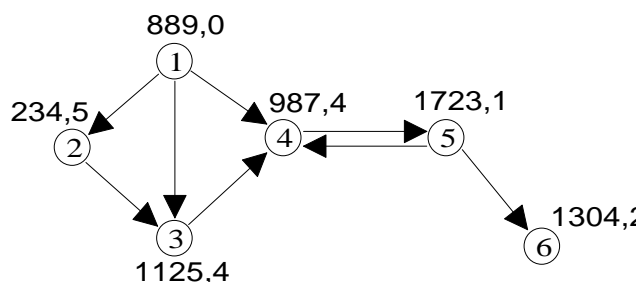


Bild A2.1: Ein knotenbewerteter, gerichteter Graph bestehend aus genau einer (Zusammenhangs-) Komponente.

Zur textuellen Darstellung auf Papier oder zur Darstellung eines Graphen im Computer verwendet man gerne sogenannte Adjazenzlisten. Dabei sind die Knoten aufsteigend geordnet und jedem Index i wird die Menge der Nachbarknoten N_i von v_i in Form einer Liste zugeordnet.

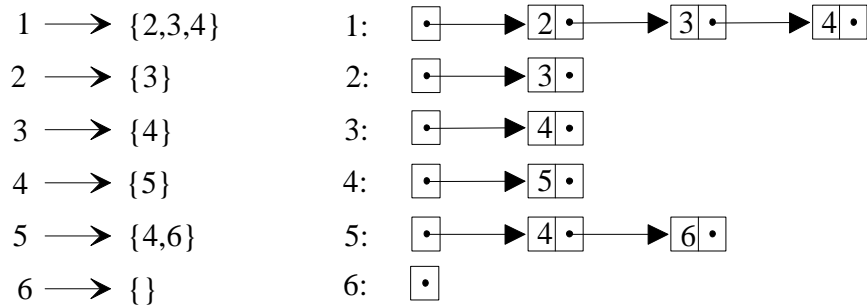


Bild A2.3: Dargestellt ist der gerichtete Graph von Bild A2.1 (ohne Bewertungen) in Form seiner Adjazenzlisten. Die rechte Bildhälfte zeigt dabei die Darstellung der Adjazenzlisten im Computer als verkettete Listen.

Ist $G=(V,K)$ ein Graph, dann heißt eine Sequenz von Kanten $(v_0,v_1),(v_1,v_2),\dots,(v_{n-1},v_n)$ ein **Pfad** von v_0 nach v_n in G , wobei man die Anzahl n der Kanten als die **Länge des Pfades** bezeichnet.

Etwas weniger streng ist die Definition eines Weges. Eine Sequenz $(v_0,v_1),(v_1,v_2),\dots,(v_{n-1},v_n)$ heißt ein **Weg** von v_0 nach v_n , wenn $(v_i,v_{i+1} \in K$ oder $(v_{i+1},v_i) \subseteq K$ ist. Die **Länge** eines Weges ist analog zu der eines Pfades definiert.

Ein Graph heißt **zusammenhängend**, wenn es von jedem Knoten einen Weg zu jedem anderen Knoten gibt. Die im Sinne der Mengentheorie größten zusammenhängenden Teilmengen von V eines Graphen $G=(V,K)$ heißen die **(Zusammenhangs-) Komponenten** von G .

Um Graphen genauer klassifizieren zu können, benötigt man noch die Begriffe Teilgraph, Untergraph und Isomorphie.

Für einen gerichteten Graphen $G=(V,K)$ heißt jeder Graph $G'=(V',K')$ ein **Teilgraph** von G , wenn $V' \subseteq V$ und $K' \subseteq K$ ist. Bei einem geordneten Graphen übertragen sich die Ordnungen der Vorgänger- bzw. Nachfolgermengen in natürlicher Art und Weise auf seine Teilgraphen durch die Restriktionen der Ordnungen auf die entsprechenden Teilmengen.

Für die nachfolgenden Abschnitte ist von Bedeutung, daß jeder Teilgraph eines antisymmetrischen Graphen selbst antisymmetrisch ist.

Von besonderer Bedeutung sind sogenannte **reguläre** Teilgraphen, d.h. solche, mit gleicher Anzahl von Vorgängern und Nachfolgern für alle Knoten. Ist diese Anzahl gleich 1, so heißt ein zusammenhängender Teilgraph ein **Zykel**. Ein gerichteter Graph der keine Zykel enthält heißt **zykelfrei**.

Ist $G=(V,K)$ ein gerichteter Graph, dann heißt ein Teilgraph $G'=(V',K')$ ein **Untergraph**, wenn gilt: Sind $u,v \in V'$ und $(u,v) \in K$, so ist $(u,v) \in K'$.

Zwei gerichtete Graphen $G_1=(V_1,K_1)$ und $G_2=(V_2,K_2)$ heißen **isomorph**, wenn es eine bijektive Abbildung $\beta:V_1\rightarrow V_2$ gibt, mit $(u,v)\in K_1$ genau dann, wenn $(\beta(u),\beta(v))\in K_2$. Zwei gerichtete, geordnete Graphen sollen isomorph heißen, wenn β die Ordnungen erhält, d.h. $\beta(v_i)=(\beta(v))_i$. Anschaulich interpretiert bedeutet diese Definition, daß zwei Graphen genau dann isomorph sind, wenn es je eine Anordnung gibt, so daß beide Graphen auf durchsichtiger Folie dargestellt, deckungsgleich übereinander gelegt werden können. Damit erscheint es auch natürlich, daß bei isomorphen Graphen die Anzahl der Vorgänger bzw. Nachfolger von v und $\beta(v)$ gleich sind.

Eine besondere Klasse von Graphen bilden die bi-, tri- oder allgemein **n-partiten Graphen**. Dabei heißt ein Graph $G=(V,K)$ n-partit, wenn es n Mengen V_1,\dots,V_n gibt, die eine Partition von V bilden und für die gilt $K\cap V_i\times V_i=\emptyset$ für $1\leq i\leq n$.

A2.2 Tri-zyklische Graphen

Definition A2.2.1:

Ein Graph G heißt **bzgl. der Mengen (V_0, V_1, V_2) tri-zyklisch**, wenn V_0, V_1 und V_2 eine Partition von $V(G)$ darstellen (d.h. sie sind paarweise disjunkt und $V(G) = V_0 \cup V_1 \cup V_2$) und $K \subseteq V_0 \times V_1 \cup V_1 \times V_2 \cup V_2 \times V_0$ ist. Ist $v \in V_i$, so heißt v **von der Art i** bzw. **art(v) := i die Art von v**. (Dabei ist i die Position der Menge im Tupel beginnend bei 0.)

Es ist leicht zu sehen, daß folgender Satz gilt.

Satz A2.2.3:

Ein tri-zyklischer Graph ist tri-partit und antisymmetrisch.

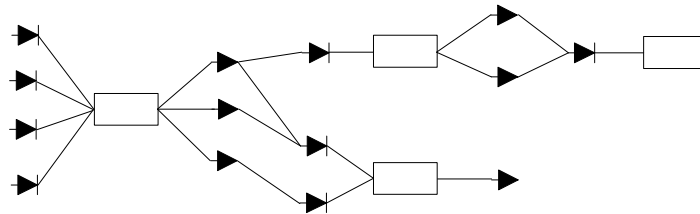


Bild A2.5: Ein tri-zyklischer Graph. Die Art eines Knoten ist dabei durch seine graphische Darstellung als Rechteck oder Pfeilspitze mit bzw. ohne Begrenzungslinie gegeben.

Satz A2.2.5:

Ist der Graph G bzgl. (V_0, V_1, V_2) tri-zyklisch und p ein Pfad von v_i nach v_j der Länge L , so ist $\text{art}(v_j) \equiv (\text{art}(v_i) + (L \bmod 3)) \bmod 3$.

Beweis:

(a) Zeige zuerst die Richtigkeit des Satzes über Induktion für $(L \bmod 3) \equiv 0 \Rightarrow L = 3n$.

Induktionsanfang: $n=1 \Rightarrow$ der Pfad von v_i nach v_j läßt sich darstellen in der Form $(v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, v_j)$ mit $(v_i, v_{i+1}) \in K$, $(v_{i+1}, v_{i+2}) \in K$ und $(v_{i+2}, v_j) \in K$. Ist $\text{art}(v_i) = 0 \Rightarrow v_i \in V_0 \Rightarrow v_{i+1} \in V_1 \Rightarrow v_{i+2} \in V_2 \Rightarrow v_j \in V_0 \Rightarrow \text{art}(v_j) = 0 \equiv (0+0) \bmod 3$. Analog gilt: $\text{art}(v_i) = 1 \Rightarrow \text{art}(v_j) = 1 \equiv (1+0) \bmod 3$ und $\text{art}(v_i) = 2 \Rightarrow$

$$\text{art}(v_j) = 2 \equiv (2+0) \pmod{3}.$$

Induktionsschritt: $L=3n+3 \Rightarrow$ der Pfad von v_i nach v_j lässt sich darstellen in der Form $(v_i, \dots, v_{i+3n}, v_{i+3n+1}, v_{i+3n+2}, v_j)$. Der Pfad von v_i nach v_{i+3n} ist von der Länge $3n \Rightarrow \text{art}(v_{i+3n}) = \text{art}(v_i)$ und damit aus denselben Gründen wie oben $\text{art}(v_{i+3n}) = \text{art}(v_j)$.

$$\text{D.h. } \text{art}(v_j) = \text{art}(v_i) \equiv (\text{art}(v_i) + (L \pmod{3})) \pmod{3}.$$

- (b) Ist $(L \pmod{3}) \equiv 1 \Rightarrow L=3n+1. \Rightarrow$ Der Pfad von v_i nach v_j lässt sich darstellen in der Form $(v_i, \dots, v_{i+3n}, v_j)$. Nach (a) gilt: $\text{art}(v_{i+3n}) \equiv (\text{art}(v_i) + ((L-1) \pmod{3})) \pmod{3}$ und damit mit derselben Begründung wie oben $\text{art}(v_j) \equiv (\text{art}(v_{i+3n}) + 1) \pmod{3} \equiv (\text{art}(v_i) + ((L-1) \pmod{3}) + 1) \pmod{3} \equiv (\text{art}(v_i) + ((L-1+1) \pmod{3})) \pmod{3}$.

- (c) Für $(L \pmod{3}) \equiv 2$ ist der Beweis analog zu (b).

Dieser Satz besagt einerseits, daß sich bei einer Wanderung durch einen tri-zyklischen Graphen die Art der Knoten in Zykeln von drei Schritten wiederholt. Geht man andererseits von einem Knoten aus, dessen Art man kennt, so kennt man die eines jeden folgenden Knoten, sofern man die Länge des zurückgelegten Weges mitzählt. Dieser Umstand kann dazu verwendet werden, die Darstellung von tri-zyklischen Graphen im Computer zu vereinfachen, da die Art eines Knoten nicht unbedingt explizit gespeichert werden muß.

Der Satz beinhaltet aber auch folgendes Korollar: Die Länge eines Pfades von einem Knoten zu einem anderen derselben Art ist durch 3 teilbar.

Satz A2.2.7:

Sind G_1 und G_2 zwei isomorphe Graphen, $\beta: V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ der zugehörige Isomorphismus und G_1 bzgl. (V_0, V_1, V_2) tri-zyklisch, dann ist G_2 bzgl. $(\beta(V_0), \beta(V_1), \beta(V_2))$ tri-zyklisch.

Beweis:

G_1 tri-zyklisch bzgl. $(V_0, V_1, V_2) \Rightarrow V_0, V_1, V_2$ ist Partition auf $V(G_1) \Rightarrow \beta(V_0), \beta(V_1), \beta(V_2)$ ist Partition auf $V(G_2) = \beta(V(G_1))$, da β bijektiv.

Da β Isomorphismus $\Rightarrow (v, v') \in V_i \times V_j \Leftrightarrow (\beta(v), \beta(v')) \in \beta(V_i) \times \beta(V_j)$

q.e.d.

A2.3 Geordnete und indizierte Mengen

In dieser Publikation werden Subzentren-Netzwerke untersucht, deren Ein- und Ausgänge geordnet sind. Aus diesem Grunde ist es notwendig, hier grundlegende Betrachtungen über linear geordnete und indizierte Mengen anzustellen.

Definition A2.3.1:

Eine Relation $\rho \subseteq M \times M$ heißt eine **partielle Ordnung auf M**, wenn gilt:

- (1) $x \in M \Rightarrow (x, x) \in \rho$ (Reflexivität)
- (2) $(x, y) \in \rho$ und $(y, z) \in \rho \Rightarrow (x, z) \in \rho$ (Transitivität)
- (3) $(x, y) \in \rho$ und $(y, x) \in \rho \Rightarrow x = y$ (Antisymmetrie)

Eine partielle Ordnung auf M heißt eine **lineare (totale) Ordnung auf M**, wenn gilt:

- (4) $x, y \in M \Rightarrow (x, y) \in \rho$ oder $(y, x) \in \rho$

Entsprechend nennt man (M, ρ) eine **partiell bzw. linear (total) geordnete Menge**.

Anmerkungen zur Schreibweise:

Für $(x, y) \in \rho$ verwendet man im allgemeinen die Infixnotation **xpy**. Ebenso wird für partielle (bzw. lineare) Ordnungen statt ρ gerne das Zeichen \subseteq (bzw. \leq) verwendet.

Definition A2.3.3:

Ist M eine endliche Menge, dann heißt eine injektive Abbildung $\nu: M \rightarrow \mathbb{N}$, die jedem Element von M eine natürliche Zahl zuordnet, eine **indizierende Abbildung auf M**. Ist darüber hinaus $\max\{\nu(M)\} = |M|$, dann heißt ν eine **fortlaufend indizierende Abbildung**. Entsprechend heißt das Tupel (M, ν) eine **(fortlaufend) indizierte Menge** und $\nu(m)$ der **Index von $m \in M$** .

Satz und Definition A2.3.5:

Ist $\nu: M \rightarrow \mathbb{N}$ eine indizierende Abbildung, dann ist $\leq_\nu := \{(a, b) \in M \times M: \nu(a) \leq \nu(b)\}$ eine lineare Ordnung auf M. \leq_ν heißt die **durch ν induzierte lineare Ordnung**.

Beweis:

Es ist leicht zu sehen, daß für \leq_v die Bedingungen (1), (2) und (4) obiger Definition gelten. Die Antisymmetrie folgt aus der Injektivität von v .

Satz und Definition A2.3.7:

Ist M eine endliche Menge und \leq eine lineare Ordnung auf M , dann ist $v_{\leq}: M \rightarrow \mathbb{N}$ mit $v_{\leq}(m) := |\{m' \in M: m' \leq m\}|$ eine fortlaufend indizierende Abbildung auf M . v_{\leq} heißt die **durch \leq definierte fortlaufend indizierende Abbildung auf M** .

Beweisskizze:

Nach den Gesetzen der Verbandstheorie besitzt jede endliche, linear geordnete Menge genau ein kleinstes Element. Damit läßt sich über Induktion zeigen, daß v_{\leq} eine fortlaufend indizierende Abbildung ist, denn diese ordnet gerade dem kleinsten Element die 1, dem 2.-kleinsten Element die 2, usw. zu.

Satz A2.3.9:

Ist v eine fortlaufend indizierende Abbildung auf M , dann ist $v_{(\leq_v)} = v$. Ist umgekehrt M eine endliche Menge und \leq eine lineare Ordnung auf M , dann ist $\leq_{(v_{\leq})} = \leq$.

Beweis:

- a) Sei v eine fortlaufend indizierende Abbildung auf $M \Rightarrow \leq_v := \{(a,b) \in M \times M: v(a) \leq v(b)\}$ eine lineare Ordnung auf M . $m \in M \Rightarrow |\{m' \in M: m' \leq_v m\}| = v(m) \Rightarrow v_{(\leq_v)} = |\{m' \in M: m' \leq_v m\}| = v(m) \Rightarrow v_{(\leq_v)} = v$.
- b) Sei \leq eine lineare Ordnung auf $M \Rightarrow v_{\leq}$ eine fortlaufend indizierende Abbildung auf M nach Satz und Definition A2.3.7. $\Rightarrow \leq_{(v_{\leq})}$ ist eine lineare Ordnung auf M . Sei $m, m'' \in M$ dann gilt: $m \leq m'' \Leftrightarrow v_{\leq}(m) = |\{m' \in M: m' \leq m\}| \leq |\{m' \in M: m' \leq m''\}| = v_{\leq}(m'') \Leftrightarrow m \leq_{(v_{\leq})} m''$.

q.e.d.

Der eben aufgezeigte Satz besagt also, daß es eine eindeutige Zuordnung zwischen den fortlaufend indizierenden Abbildungen und den linearen Ordnungen auf M gibt. Damit kann man sich wahlweise der einen oder anderen Betrachtungsweise bedienen. Im nachfolgenden ist es deshalb nicht mehr notwendig, genau zwischen einer fortlaufend indizierten und einer linear geordneten Menge zu unterscheiden.

Satz und Definition A2.3.11:

Sind (M_1, v_1) und (M_2, v_2) zwei disjunkte, (fortlaufend) indizierte Mengen, dann ist $(M_1, v_1) \cup (M_2, v_2) := (M, v)$ mit $M := M_1 \cup M_2$ und $v: M \rightarrow \mathbb{N}$ mit $v(v) := \begin{cases} v_1(v) & \text{für } v \in M_1 \\ v_2(v) + \max(v_1(M_1)) & \text{für } v \in M_2 \end{cases}$ wieder eine (fortlaufend) indizierte Menge. $(M_1, v_1) \cup (M_2, v_2)$ heißt die **Vereinigung von (M_1, v_1) und (M_2, v_2)** .

Beweis:

Trivial.

Satz A2.3.13:

Sind (M_1, v_1) , (M_2, v_2) und (M_3, v_3) drei paarweise disjunkte, (fortlaufend) indizierte Mengen, dann ist $((M_1, v_1) \cup (M_2, v_2)) \cup (M_3, v_3) = (M_1, v_1) \cup ((M_2, v_2) \cup (M_3, v_3))$.

Beweis:

Sei $(M, v) := ((M_1, v_1) \cup (M_2, v_2)) \cup (M_3, v_3)$ und $(M'', v'') := (M_1, v_1) \cup ((M_2, v_2) \cup (M_3, v_3)) \Rightarrow M = M_1 \cup M_2 \cup M_3 = M''$. Bleibt zu zeigen $v = v''$.

Sei $(M_1', v_1') := (M_1, v_1) \cup (M_2, v_2)$ und $(M_2', v_2') := (M_2, v_2) \cup (M_3, v_3)$. Sei $m \in M \Rightarrow$ entweder $m \in M_1$ oder $m \in M_2$ oder $m \in M_3$.

Angenommen $m \in M_1 \Rightarrow m \in M_1' \Rightarrow v(m) = v_1'(m) = v_1(m)$ und $v''(m) = v_1(m) \Rightarrow v(m) = v''(m)$.

Angenommen $m \in M_2 \Rightarrow m \in M_1'$ und $m \in M_2' \Rightarrow v(m) = v_1'(m) = v_2(m) + \max(v_1(M_1))$ und $v''(m) = v_2'(m) + \max(v_1(M_1)) = v_2(m) + \max(v_1(M_1)) \Rightarrow v(m) = v''(m)$.

Angenommen $m \in M_3 \Rightarrow m \in M_2' \Rightarrow v(m) = v_3(m) + \max(v_1'(M_1')) = v_3(m) + \max(v_1(M_1)) + \max(v_2(M_2))$ und $v''(m) = v_2'(m) + \max(v_1(M_1)) = v_3(m) + \max(v_2(M_2)) + \max(v_1(M_1)) \Rightarrow v(m) = v''(m)$.

q.e.d.

Satz und Definition A2.3.15:

Sind (M_1, \leq_1) und (M_2, \leq_2) zwei disjunkte geordnete Mengen, dann ist $(M_1, \leq_1) \cup (M_2, \leq_2) := (M_1 \cup M_2, \leq_1 \cup \leq_2 \cup M_1 \times M_2)$ wieder eine geordnete Menge. $(M_1, \leq_1) \cup (M_2, \leq_2)$ heißt die **Vereinigung von (M_1, \leq_1) und (M_2, \leq_2)** .

Beweis:

Es ist leicht nachzuvollziehen, daß $\leq_1 \cup \leq_2 \cup M_1 \times M_2$ die Bedingungen (1)-(4) von Definition A2.3.1 erfüllt und damit eine lineare Ordnung auf $M_1 \cup M_2$ ist.

Satz A2.3.17:

Sind (M_1, \leq_1) und (M_2, \leq_2) zwei disjunkte geordnete Mengen und $(M, \leq) = (M_1, \leq_1) \cup (M_2, \leq_2)$, dann ist $(M, \nu_{\leq}) = (M_1, \nu_{\leq_1}) \cup (M_2, \nu_{\leq_2})$.

Beweis:

Definiere $(M, \nu') := (M_1, \nu_{\leq_1}) \cup (M_2, \nu_{\leq_2})$. Sei $m \in M \Rightarrow$ entweder $m \in M_1$ oder $m \in M_2$.

Angenommen $m \in M_1 \Rightarrow \nu'(m) = \nu_{\leq_1}(m) = |\{m' \in M_1 : m' \leq_1 m\}| = |\{m' \in M : m' \leq m\}| = \nu_{\leq}(m)$

Angenommen $m \in M_2 \Rightarrow \nu'(m) = \max(\nu_{\leq_1}(M_1)) + \nu_{\leq_2}(m) = |M_1| + |\{m' \in M_2 : m' \leq_2 m\}| = |\{m' \in M : m' \leq m\}| = \nu_{\leq}(m)$

q.e.d.

Satz A2.3.19:

Sind (M_1, ν_1) und (M_2, ν_2) zwei disjunkte indizierte Mengen und $(M, \nu) = (M_1, \nu_1) \cup (M_2, \nu_2)$, dann ist $(M, \leq_{\nu}) = (M_1, \leq_{\nu_1}) \cup (M_2, \leq_{\nu_2})$.

Beweis:

Definiere $(M, \leq') := (M_1, \leq_{\nu_1}) \cup (M_2, \leq_{\nu_2})$. Sei $m, m'' \in M$ und $m \leq_{\nu} m''$

$m, m'' \in M_1$ und $m \leq_{\nu} m'' \Leftrightarrow \nu(m) \leq \nu(m'') \Leftrightarrow \nu_1(m) \leq \nu_1(m'') \Leftrightarrow m \leq_{\nu_1} m'' \Leftrightarrow m \leq' m''$ und $m, m'' \in M_1$

$m, m'' \in M_2$ und $m \leq_{\nu} m'' \Leftrightarrow \nu(m) \leq \nu(m'') \Leftrightarrow \max(\nu_1(M_1)) + \nu_2(m) \leq \max(\nu_1(M_1)) + \nu_2(m'') \Leftrightarrow \nu_2(m) \leq \nu_2(m'') \Leftrightarrow m \leq_{\nu_2} m'' \Leftrightarrow m \leq' m''$ und $m, m'' \in M_2$

Angenommen $m \in M_1$ und $m'' \in M_2 \Rightarrow m \leq' m''$, da $M_1 \times M_2 \subseteq \leq'$. Umgekehrt ist stets $\nu_1(m) \leq \max(\nu_1(M_1)) + \nu_2(m) \Rightarrow \nu(m) \leq \nu(m'') \Rightarrow m \leq_{\nu} m''$.

Definition A2.3.21:

Sind (M, \leq) und (M', \leq') zwei endliche, linear geordnete Mengen, dann heißen $m \in M$ und $m' \in M'$ **korrespondierend**, wenn $\nu_{\leq}(m) = \nu_{\leq'}(m')$ ist.

Zwischen linear geordneten Mengen korrespondieren also stets das bzgl. \leq kleinste Element aus M mit dem bzgl. \leq' kleinsten Element aus M' , das bzgl. \leq 2.-kleinste Element aus M mit dem bzgl. \leq' 2.-kleinsten Element aus M' , usw..

Definition A2.3.23:

Sind (M', ν') und (M'', ν'') zwei endliche, indizierte Mengen, dann heißen $m' \in M'$ und $m'' \in M''$ **korrespondierend**, wenn $\nu_{(\leq_{\nu'})}(m') = \nu_{(\leq_{\nu''})}(m'')$ ist.

Zwischen indizierten Mengen korrespondieren also stets das Element mit dem kleinsten ν' -Index aus M' mit dem Element mit dem kleinsten ν'' -Index aus M'' , das Element mit dem 2.-kleinsten ν' -Index aus M' mit dem Element mit dem 2.-kleinsten ν'' -Index aus M'' , usw.. Diese Zuordnung wird im nachfolgenden Satz verallgemeinert und auch genauer spezifiziert.

Satz A2.3.25:

Ist $\nu: M \rightarrow \mathbb{N}$ eine Abbildung, $M_1, M_2 \subseteq M$ mit $\nu(M_1) = \nu(M_2)$ und die Restriktion von ν auf M_1 bzw. M_2 injektiv, so sind $\nu_1: M_1 \rightarrow \nu(M_1): \nu_1(m) := \nu(m)$, $\nu_2: M_2 \rightarrow \nu(M_2): \nu_2(m) := \nu(m)$, und $\varphi := \nu_2^{-1} \circ \nu_1$ Bijektionen und es ist $\nu(\varphi(m)) = \nu(m)$ für alle $m \in M_1$. $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$ heißt die **durch ν eindeutig definierte Zuordnung** von M_1 nach M_2 .

Beweis:

Die Restriktion von ν auf M_1 bzw. M_2 ist injektiv $\Rightarrow \nu_1$ und ν_2 sind bijektiv. Da $\nu_1(M_1) = \nu(M_1) = \nu(M_2) = \nu_2(M_2) \Rightarrow \varphi(M_1) = \nu_2^{-1} \circ \nu_1(M_1) = \nu_2^{-1}(\nu_1(M_1)) = \nu_2^{-1}(\nu_2(M_2)) = M_2 \Rightarrow \varphi$ ist eine Bijektion von M_1 nach M_2 .

Ist $m \in M_1 \Rightarrow \nu(\varphi(m)) = \nu(\nu_2^{-1}(\nu_1(m))) = \nu(\nu_2^{-1}(\nu(m))) = \nu(\nu_2^{-1}(\nu_2(m))) = \nu(m)$

q.e.d.

Definition A2.3.27:

Ist M eine endliche Menge und $\{M_1, \dots, M_n\}$ eine Partition von M , dann heißt eine partielle Ordnung ρ auf M **stückweise linear auf $\{M_1, \dots, M_n\}$** , wenn für $1 \leq i \neq j \leq n$ $\rho \cap M_i \times M_i$ eine lineare Ordnung auf M_i und $\rho \cap M_i \times M_j = \emptyset$ ist. Entsprechend heißt M **bzgl. $\{M_1, \dots, M_n\}$ stückweise linear geordnet**.

Da $\{M_1, \dots, M_n\}$ eine Partition von M ist und es damit zu jedem $m \in M$ genau ein M_i mit $m \in M_i$ gibt und außerdem für $m, m' \in M_i$ stets $(m, m') \in \rho \cap M_i \times M_i \Leftrightarrow (m, m') \in \rho$ ist, ist also die vereinfachte Schreibweise $m \rho m'$ statt $m(\rho \cap M_i \times M_i)m'$ angebracht.

Definition A2.3.29:

Ist M eine endliche Menge und $\{M_1, \dots, M_n\}$ eine Partition von M , dann heißt eine Abbildung $\nu: M \rightarrow \mathbb{N}$ **auf $\{M_1, \dots, M_n\}$ stückweise (fortlaufend) indizierend**, wenn für $1 \leq i \leq n$ die Restriktion $\nu|_{M_i}: M_i \rightarrow \mathbb{N}$ (fortlaufend) indizierend auf M_i ist. Entsprechend heißt M bzgl. $\{M_1, \dots, M_n\}$ **stückweise (fortlaufend) indiziert**.

Satz und Definition A2.3.31:

Ist M eine endliche Menge, $\{M_1, \dots, M_n\}$ eine Partition von M , $\nu: M \rightarrow \mathbb{N}$ auf $\{M_1, \dots, M_n\}$ stückweise (fortlaufend) indizierend und für $1 \leq i \leq n$ $\nu_i: M_i \rightarrow \mathbb{N}$ die Restriktion von ν auf M_i , dann ist $\leq_\nu := \bigcup_{i=1}^n \leq_{\nu_i}$ eine stückweise lineare Ordnung auf $\{M_1, \dots, M_n\}$. \leq_ν heißt die **durch ν induzierte stückweise lineare Ordnung**.

Beweis:

Da nach Satz und Definition A2.3.7 jedes \leq_{ν_i} eine lineare Ordnung auf M_i und $\{M_1, \dots, M_n\}$ eine Partition von M ist, ist leicht zu sehen, daß für \leq_ν die Bedingungen (1)-(3) von Definition A2.3.1 erfüllt sind. Damit ist \leq_ν eine partielle Ordnung auf M . Per Definition ist $1 \leq i \neq j \leq n$ $\leq_\nu \cap M_i \times M_j = \emptyset$. Damit ist \leq_ν stückweise linear auf $\{M_1, \dots, M_n\}$.

Satz und Definition A2.3.33:

Ist M eine endliche Menge, $\{M_1, \dots, M_n\}$ eine Partition von M , \leq eine lineare Ordnung auf M und für $1 \leq i \leq n$ $\leq_i := \leq \cap M_i \times M_i$ die Restriktion von \leq auf M_i , dann ist $\nu_\leq: M \rightarrow \mathbb{N}$ mit $\nu_\leq(m) := \nu_{\leq_i}(m)$ für $m \in M_i$ eine stückweise fortlaufend indizierende Abbildung auf $\{M_1, \dots, M_n\}$. ν_\leq heißt die **durch \leq definierte stückweise fortlaufend indizierende Abbildung auf $\{M_1, \dots, M_n\}$** .

Beweis:

Da nach Satz und Definition A2.3.5 jedes ν_{\leq_i} eine fortlaufend indizierende Abbildung auf M_i ist und $\{M_1, \dots, M_n\}$ eine Partition von M ist, ist leicht zu sehen, daß ν_\leq eine stückweise fortlaufend indizierende Abbildung auf $\{M_1, \dots, M_n\}$ ist.

Satz A2.3.35:

Ist M eine endliche Menge, $\{M_1, \dots, M_n\}$ eine Partition von M und ν eine stückweise fortlaufend indizierende Abbildung auf

$\{M_1, \dots, M_n\}$, dann ist $\nu_{(\leq_\nu)} = \nu$. Ist umgekehrt \leq eine stückweise lineare Ordnung auf $\{M_1, \dots, M_n\}$, dann ist $\leq_{(\nu_\leq)} = \leq$.

Beweis:

Betrachtet man die Restriktionen von ν bzw. \leq auf einer Menge M_i , dann ist für diese die Aussage nach Satz A2.3.9 richtig. Nach den Definitionen von ν_\leq und \leq_ν ergibt sich damit der Rest von selbst.

q.e.d.

Auf geordnete bzw. fortlaufend indizierte Mengen wird erst dann wieder eingegangen, wenn geordnete bzw. fortlaufend indizierte Subzentren-Netzwerke definiert werden.

A2. Unbewertete Subzentren-Netzwerke

3.1 Allgemeines über Subzentren-Netzwerke	81
3.2 Offene und geschlossene Subzentren-Netzwerke	91
3.3 Gepackte Subzentren-Netzwerke	96
3.4 Isomorphe Subzentren-Netzwerke	100
3.5 Die Konstruktion von Subzentren-Netzwerken	102

Mit diesem und zwei weiteren Kapiteln wird die Theorie der Subzentren-Netzwerke eingeführt. Sie ist notwendig, um die Beschreibung von Datenflußnetzwerken und deren Interpretation formal definieren zu können. In einem ersten Schritt wird dazu auf unbewertete Subzentren-Netzwerke eingegangen. Zum einen werden dazu, ausgehend von der grundlegenden Definition eines Subzentren-Netzwerkes als spezieller Graph, verschiedene Eigenschaften herausgearbeitet, wie sie für alle Subzentren-Netzwerke charakteristisch sind. Zum anderen werden aber auch verschiedene Klassen von Subzentren-Netzwerken untersucht, wie sie für Theorie und Praxis nützlich sind. Eine etwas detailliertere Zusammenfassung dazu findet der Leser auf der nächsten Seite.

Zusammenfassung

Im ersten Abschnitt werden elementare Begriffe definiert, wie sie zum Verständnis der Theorie unbedingt notwendig sind, z.B. Subzentren-Netzwerk, innerer Eingang (Ausgang), äußerer Eingang (Ausgang), Subzentrum oder Interimknoten. Ein erstes wichtiges Ergebnis stellt der Dualitätssatz (Satz A2.1.13) dar, der es aufgrund der symmetrischen Definition von Subzentren-Netzwerken erlaubt, sehr viele Beweise zu vereinfachen. Mit Satz A2.1.15, Satz A2.1.17 und Satz A2.1.19 wird festgehalten, wie die verschiedenen Arten von Knoten zusammenspielen bzw. zwischen welchen von diesen überhaupt Kanten möglich sind. Auch diese Ergebnisse erleichtern nachfolgende Beweise erheblich.

Im zweiten Abschnitt wird zwischen geschlossenen und offenen Subzentren-Netzwerken unterschieden. Dabei sind erstere solche, die weder äußere Ein- noch äußere Ausgänge besitzen und letztere solche, die diese Bedingung nicht erfüllen. Da mit Satz A2.2.17 gezeigt werden kann, daß jedes offene Subzentren-Netzwerk in ein geschlossenes überführt werden kann und umgekehrt, sind theoretisch betrachtet beide Klassen gleichwertig. In der Praxis zeigt sich jedoch, daß es günstiger ist, vom Anwender einer Datenflusssprache erstellte (offene) Datenflußnetzwerke als geschlossene Subzentren-Netzwerke zu speichern, da diese eine homogenere Struktur besitzen und damit zu einfacheren Datenstrukturen führen.

Im dritten Abschnitt wird ein Subzentren-Netzwerk ohne Interimknoten als gepacktes Subzentren-Netzwerk definiert. Da nach Satz A2.3.9 der Graph eines solchen Subzentren-Netzwerkes tri-zyklisch ist, ergeben sich bei der Verwendung gepackter Subzentren-Netzwerke als Datenflußgraphen weitere Vereinfachungen, die sowohl die Implementierung eines Interpreters bzw. Compilers vereinfachen, als auch zu effizienterem Code führen.

Danach wird kurz auf isomorphe Subzentren-Netzwerke eingegangen. Dies ist notwendig, da in Bezug auf die Interpretation von Datenflußnetzwerken nur deren Zugehörigkeit zu bestimmten Isomorphie- bzw. Äquivalenzklassen entscheidend ist.

In einem abschließenden Abschnitt wird auf die Konstruktion von Subzentren-Netzwerken aus Graphen eingegangen. Dies ist zwar im Bezug auf Datenflusssprachen nicht mehr von Bedeutung, erlaubt es jedoch, im letzten Kapitel den Einsatz von Subzentren-Netzwerken als Ersatz für spezielle Graphen zu diskutieren.

A2.1 Allgemeines über Subzentren-Netzwerke

Ein Subzentren-Netzwerk ist ein gerichteter Graph, dessen Knotenmenge in verschiedene Gruppen unterteilt ist.

Definition A2.1.1:

Ist $G=(V,K)$ ein antisymmetrischer Graph und $E,S,A\subseteq V$, dann heißt das Tupel $N=(G,E,S,A)$ ein **Subzentren-Netzwerk** wenn gilt:

- (1) $s,s'\in S \Rightarrow (s,s')\notin K(G)$.
- (2) $s\in S$ und $(v,s),(v,v')\in K(G) \Rightarrow v'=s$.
- (3) $s\in S$ und $(s,v'),(v,v')\in K(G) \Rightarrow v=s$.
- (4) $s,s'\in S$ und $(v,s)\in K(G) \Rightarrow (s',v)\notin K(G)$
- (5) $E\cap S=\emptyset, S\cap A=\emptyset, A\cap E=\emptyset$.
- (6) $v\in E, v'\in V(G)$ und $s\in S \Rightarrow (v',v)\notin K(G)$ und $(v,s)\notin K(G)$.
- (7) $v\in A, v'\in V(G)$ und $s\in S \Rightarrow (v,v')\notin K(G)$ und $(s,v)\notin K(G)$.

Definition A2.1.3:

Ist $N=(G,E,S,A)$ ein Subzentren-Netzwerk, dann heißen $\mathbf{G(N)}:=G$ der **Graph von N**, $\mathbf{V(N)}:=V(G)$ die Menge der **Knoten von N**, $\mathbf{K(N)}:=K(G)$ die Menge der **Kanten von N**, $\mathbf{S(N)}:=S$ die Menge der **Subzentren von N** und $\mathbf{E(N)}:=E$ bzw. $\mathbf{A(N)}:=A$ die Menge der **äußeren Ein- bzw. Ausgänge von N**. $\mathbf{E(N,s)}:=\mathbf{E(s)}:=\{v\in V(G):(v,s)\in K(G)\}$ bzw. $\mathbf{A(N,s)}:=\mathbf{A(s)}:=\{v\in V(G):(s,v)\in K(G)\}$ heißt die Menge der **Ein- bzw. Ausgänge von $s\in S$** . Die Menge $\mathbf{E(N,S)}:=\mathbf{E(S)}:=\bigcup_{s\in S} \mathbf{E(s)}$ bzw. $\mathbf{A(N,S)}:=\mathbf{A(S)}:=\bigcup_{s\in S} \mathbf{A(s)}$ sei als die Menge der **inneren Ein- bzw. inneren Ausgänge** definiert. $\mathbf{EA(N)}:=\mathbf{E(N)}\cup\mathbf{E(S)}\cup\mathbf{A(S)}\cup\mathbf{A(N)}$ heiße die Menge **aller inneren und äußeren Ein- und Ausgänge** und $\mathbf{I(N)}:=V(G)\setminus(\mathbf{E(N)}\cup\mathbf{E(S)}\cup\mathbf{A(S)}\cup\mathbf{A(N)})$ die Menge der **Zwischenknoten oder Interimknoten**. Ein innerer Eingang (Ausgang) heißt **frei**, wenn er keinen Vorgänger (Nachfolger) besitzt. Der einfacheren Schreibweise wegen wird $\mathbf{SI(N)}:=\mathbf{S(N)}\cup\mathbf{I(N)}$ definiert.

An dieser Stelle einige Bemerkungen zur Namensgebung und den Bedingungen der Definition von Subzentren-Netzwerken. Die Bedingung (1) stellt sicher, daß keine zwei Subzentren benachbart, d.h. mit einer Kante verbunden sind. Nach Definition von $\mathbf{E(s)}$ und $\mathbf{A(s)}$ hat ein Subzentrum damit nur seine eigenen Ein- und Ausgänge zu Nachbarn. Es sitzt damit

sozusagen im Zentrum von diesen. (Daher der Name Subzentrum! Siehe auch Bild A2.1.)

Darüber hinaus stellen die Bedingungen (2),(3) und (4) sicher, daß keine zwei Subzentren einen gemeinsamen Nachbarn besitzen. Ein innerer Ein- bzw. Ausgang kann damit genau einem Subzentrum zugeordnet werden. Auch kann ein Eingang nie gleichzeitig ein Ausgang sein und umgekehrt.

Die Bedingung (5) stellt für äußere Ein- und Ausgänge ähnliche Voraussetzungen her, wie sie die Bedingungen (1)-(4) für innere Ein- und Ausgänge fordern.

Die Bedingungen (6) und (7) sichern zum einen, daß ein äußerer Eingang (bzw. Ausgang) keinen Vorgänger (bzw. Nachfolger) besitzt. Zum anderen sorgen sie zusammen mit (5) dafür, daß aus einem Netzwerk mit äußeren Ein- und Ausgängen durch Hinzunahme eines weiteren Subzentrums und geeigneter Kanten ein Netzwerk ohne äußeren Ein- und Ausgänge gebildet werden kann. Mehr dazu im Abschnitt "Offene und geschlossene Subzentren-Netzwerke".

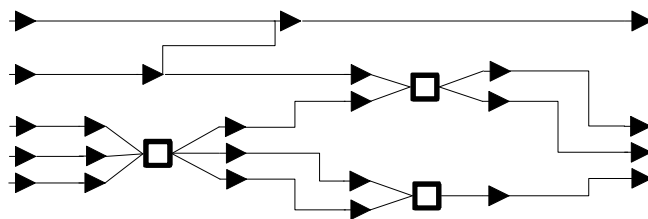


Bild A2.1: Der Graph eines Subzentren-Netzwerkes, wobei Subzentren als kleine Rechtecke und sonstige Knoten als Pfeilspitzen dargestellt sind.

Für nachfolgende graphische Darstellungen von Subzentren-Netzwerken verwendet man einen rechteckigen Rahmen, in dem Subzentren als "kleine Rechtecke" und sonstige Knoten als "Pfeilspitzen" dargestellt werden. Da die inneren Ein- bzw. Ausgänge einem Subzentrum eindeutig zugeordnet sind, kann man diese unmittelbar neben dem zugehörigen Subzentrum plazieren. Dabei werden die Ein- bzw. Ausgänge eines Subzentrums als Pfeilspitzen dargestellt, die zum zugeordneten Subzentrum hin bzw. davon wegzeigen. Besitzt ein Subzentren-Netzwerk äußere Ein- oder Ausgänge, so werden diese (analog zu den inneren) am Rahmen des Netzwerkes aufgetragen. Handelt es sich um zwei Knoten, die keine Subzentren sind, so wird eine Kante zwischen ihnen als Verbindungslinie dargestellt, die von der Pfeilspitze des einen Knoten zum Pfeilanfang des anderen zeigt. Da es sich um den antisymmetrischen Graphen eines Subzentren-Netzwerkes handelt sind die Zuordnungen damit eindeutig festgelegt.

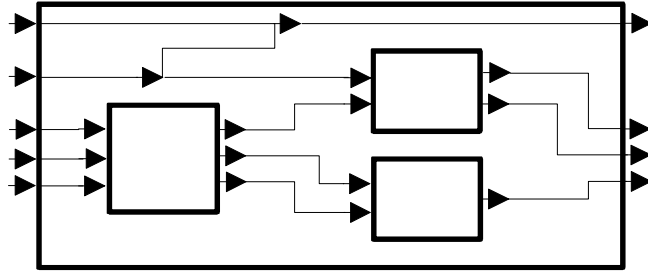


Bild A2.3: Graphische Darstellung eines Subzentren-Netzwerkes mit (äußeren) Eingängen, Ausgängen und Zwischenknoten.

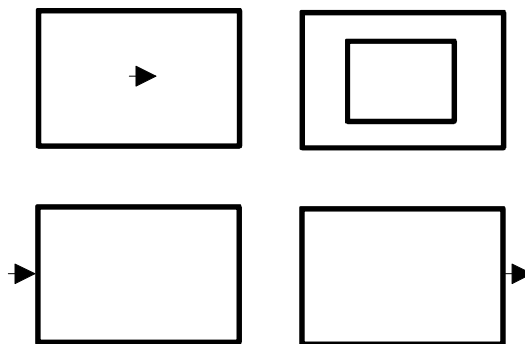


Bild A2.5: Die vier kleinstmöglichen Subzentren-Netzwerke, mit genau einem Element.

Obwohl sie erst viel weiter unten benötigt werden, ist dies eine geeignete Stelle, folgende zwei Definitionen anzubringen.

Definition A2.1.5:

In einem Subzentren-Netzwerk N heißt ein Knoten $v \in V(N) \setminus S(N)$ eine **Verzweigung**, wenn v mindestens zwei Nachfolger besitzt. v heißt eine **Verjüngung**, wenn v mindestens zwei Vorgänger besitzt.

Definition A2.1.7:

Ein Subzentren-Netzwerk heißt **fast leer**, wenn es weder Subzentren noch Interimknoten besitzt. Ist die Knotenmenge eines Subzentren-Netzwerkes gleich der leeren Menge, so heißt es **das leere Netzwerk**.

Der nachfolgende Satz zeigt, daß die Definition für ein Subzentren-Netzwerk symmetrisch aufgebaut ist.

Satz und Definition A2.1.9:

Ist $N=(G,E,S,A)$ ein Subzentren-Netzwerk, so definiert $N^T=(G^T,A,S,E)$ mit $V(G^T)=V(G)$ und $(v,v')\in K(G^T) \Leftrightarrow (v',v)\in K(G)$ ein Subzentren-Netzwerk. Dieses heißt das **Spiegelbild von N**.

Beweis:

Es ist zu zeigen, daß das Spiegelbild die Bedingungen (1)-(7) von Definition A2.1.1 erfüllt. Da diese symmetrisch definiert sind, läßt sich dies sehr einfach zeigen.

Allgemein gilt: $(v,v')\notin K(G^T) \Leftrightarrow (v',v)\notin K(G)$.

- 1) $s,s'\in S \Rightarrow (s',s)\notin K(G) \Rightarrow (s,s')\notin K(G^T)$.
- 2) $s\in S$ und $(v,s),(v,v')\in K(G^T) \Rightarrow (s,v),(v',v)\in K(G) \Rightarrow v'=s$ nach (3) von Definition A2.1.1.
- 3) $s\in S$ und $(s,v'),(v,v')\in K(G^T) \Rightarrow (v,s),(v',v)\in K(G) \Rightarrow v=s$ nach (2) von Definition A2.1.1.
- 4) $s,s'\in S$ und $(v,s)\in K(G^T) \Rightarrow (s,v)\in K(G) \Rightarrow (v,s')\notin K(G) \Rightarrow (s',v)\notin K(G^T)$
- 5) $E(N^T)\cap S=A\cap S=\emptyset$, $S\cap A(N^T)=S\cap E=\emptyset$, $A(N^T)\cap E(N^T)=E\cap A=\emptyset$.
- 6) $v\in E(N^T) \Rightarrow v\in A(N) \Rightarrow (v,v')\notin K(G) \forall v'\in V(G)$ und $(s,v)\notin K(G) \forall s\in S \Rightarrow (v',v)\notin K(G^T) \forall v'\in V(G^T)$ und $(v,s)\notin K(G^T) \forall s\in S$.
- 7) analog zu 6).

q.e.d.

Um aus der graphischen Darstellung eines Netzwerkes N die graphische Darstellung seines Spiegelbildes N^T zu erhalten, müssen lediglich die Pfeilsymbole (für Knoten die keine Subzentren sind) punktgespiegelt werden.

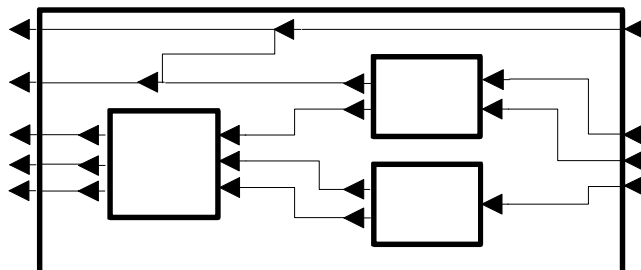


Bild A2.7: Das Spiegelbild des Subzentren-Netzwerkes von Bild A2.3

Satz A2.1.11:

Ist N ein Subzentren-Netzwerk und N^T sein Spiegelbild, so ist $S(N^T)=S(N)$, $E(N^T,s)=A(N,s)$, $A(N^T,s)=E(N,s)$, $E(N^T,S)=A(N,S)$, $A(N^T,S)=E(N,S)$, $E(N^T)=A(N)$, $A(N^T)=E(N)$ und $I(N^T)=I(N)$.

Beweis:

Für fast alle Gleichungen (bis auf die letzte) folgt der Beweis unmittelbar aus der Definition A2.1.3.

$$I(N^T) := V(G^T) \setminus (E(N^T) \cup E(N^T, S) \cup S(N^T) \cup A(N^T, S) \cup A(N^T)) = \\ V(G) \setminus (A(N) \cup A(N, S) \cup S(N) \cup E(N, S) \cup E(N)) = I(N). \quad \text{q.e.d.}$$

Der nachfolgende Satz erleichtert viele Beweise, da er die Symmetrie in der Definition der Subzentren-Netzwerke ausnutzt.

Satz A2.1.13: (Dualitätssatz)

Ist \mathcal{K} eine Klasse von Subzentren-Netzwerken, die mit N stets auch das Spiegelbild von N enthält, so behält eine mengentheoretische Aussage, (über die Elemente dieser Klasse,) in der nur die Mengen $E(N)$, $E(S)$, $E(s)$, S , $A(S)$, $A(s)$, $A(N)$, $I(N)$, $V(N)=V(G)$ und $K(N)=K(G)$, das Kreuzprodukt, Kanten und Pfade verwendet werden, weiterhin ihre Gültigkeit, wenn darin alle Ausdrücke $E(s)$ bzw. $A(s)$, $E(S)$ bzw. $A(S)$, und $E(N)$ bzw. $A(N)$ vertauscht sowie Kreuzprodukte, Kanten und Pfade gespiegelt werden.

Beweis:

Angenommen eine Aussage ist für alle Elemente einer solchen Klasse richtig, dann gilt sie auch für das Spiegelbild N^T von N . Damit kann man in der Aussage die Ausdrücke $S(N^T)$, $E(N^T,s)$, $E(N^T,S)$, $A(N^T,s)$, $A(N^T,S)$, $E(N^T)$, $A(N^T)$ und $I(N^T)$ durch die in Satz A2.1.11 angegebenen Ausdrücke ersetzen. $K(N^T)=K(G^T)$ darf durch $K(N)=K(G)$ ersetzt werden, wenn gleichzeitig alle Kreuzprodukte, Kanten und Pfade gespiegelt werden. Damit ist die neue Aussage über das Subzentren-Netzwerk N , allgemein gültig für alle Subzentren-Netzwerke dieser Klasse.

q.e.d.

Nach Satz und Definition A2.1.9 gilt der Dualitätssatz insbesondere auch für die Klasse aller Subzentren-Netzwerke und wird in den nachfolgenden Sätzen häufig nützliche Verwendung finden.

Mit den nächsten Sätzen werden die an einem Subzentren-Netzwerk beteiligten Knotenmengen genauer charakterisiert.

Satz A2.1.15:

Ist $N=(G,E,S,A)$ ein Subzentren-Netzwerk und $s \neq s' \in S$, dann sind die Mengen $E(s)$, $E(s')$, $A(s)$, $A(s')$ und S paarweise disjunkt.

Beweis:

Im folgenden wird auf die Bedingungen (1)-(4) der Definition A2.1.1 von Subzentren-Netzwerken verwiesen.

- a) $v \in E(s) \cap E(s') \Rightarrow (v,s) \in K(G)$ und $(v,s') \in K(G)$. Wegen (2) $\Rightarrow s=s' \Rightarrow$ Widerspruch zur Voraussetzung $s \neq s' \Rightarrow E(s) \cap E(s') = \emptyset$
- b) $v \in E(s) \cap A(s) \Rightarrow (v,s) \in K(G)$ und $(s,v) \in K(G)$. Wegen (3) $\Rightarrow v=s \Rightarrow$ Widerspruch zu (1) $\Rightarrow E(s) \cap A(s) = \emptyset$
- c) $v \in E(s) \cap A(s') \Rightarrow (v,s) \in K(G)$ und $(s',v) \in K(G)$. \Rightarrow Widerspruch zu (4) $\Rightarrow E(s) \cap A(s') = \emptyset$
- d) $v \in E(s) \cap S \Rightarrow (v,s) \in K(G)$ und $(v,s) \in S \times S$. \Rightarrow Widerspruch zu (1) $\Rightarrow E(s) \cap S = \emptyset$
- e) Aus a) bzw. d) folgt nach dem Dualitätssatz $A(s) \cap A(s') = \emptyset$ bzw. $A(s) \cap S = \emptyset$.

q.e.d.

Satz A2.1.17:

Ist $N=(G,E,S,A)$ ein Subzentren-Netzwerk, dann bilden die Mengen $E(N)$, $E(S)$, S , $A(S)$, $A(N)$ und $I(N)$ eine Partition von $V(G)$. Das heißt, sie sind paarweise disjunkt und $V(G) = E(N) \cup E(S) \cup S \cup A(S) \cup A(N) \cup I(N)$.

Beweis:

- a) Nach Definition von $I(N)$ ist $I(N) \cap [E(N) \cup E(S) \cup S \cup A(S) \cup A(N)] = \emptyset \Rightarrow I(N) \cap E(N) = \emptyset$, $I(N) \cap E(S) = \emptyset$, $I(N) \cap E(s) = \emptyset$, $I(N) \cap S = \emptyset$, $I(N) \cap A(S) = \emptyset$, $I(N) \cap A(s) = \emptyset$ und $I(N) \cap A(N) = \emptyset$.
- b) Nach Definition A2.1.1 (5) ist $A(N) \cap S = \emptyset$, $E(N) \cap S = \emptyset$ und $E(N) \cap A(N) = \emptyset$.
- c) Ist $v \in E(s) \Rightarrow \exists s \in S: (v,s) \in K(G)$ nach Definition von $E(s)$. $\Rightarrow v \notin E(N)$ bzw. $v \notin A(N)$, da sonst Widerspruch zu Definition A2.1.1 (6) bzw. (7) $\Rightarrow E(s) \cap E(N) = \emptyset$ und $E(s) \cap A(N) = \emptyset$
- d) Ist $v \in A(s) \Rightarrow \exists s \in S: (s,v) \in K(G)$ nach Definition von $A(s)$. $\Rightarrow v \notin E(N)$ bzw. $v \notin A(N)$, da sonst Widerspruch zu Definition A2.1.1 (7) bzw. (6) $\Rightarrow A(s) \cap E(N) = \emptyset$ und $A(s) \cap A(N) = \emptyset$

e) Nach Satz A2.1.15 sind die Mengen $E(s)$, S und $A(s) \forall s \in S$ paarweise disjunkt \Rightarrow die Mengen $E(S)$, S und $A(S)$ sind ebenfalls paarweise disjunkt.

q.e.d.

Satz A2.1.19:

Ist $N=(G,E,S,A)$ ein Subzentren-Netzwerk, dann bilden die Mengen $E(N)$, $A(N)$, S , $I(N)$, $E(s)$, $A(s)$ mit $s \in S$ eine Partition auf $V(G)$.

Beweis:

Da $E(s) \subseteq E(S)$ und $A(s) \subseteq A(S)$ folgt dies unmittelbar aus der Verbindung von Satz A2.1.15 und Satz A2.1.17.

Satz A2.1.21:

Ist N ein Subzentren-Netzwerk und $v \in V(N)$ darin ein Knoten der mindestens zwei Vorgänger und mindestens zwei Nachfolger besitzt, so handelt es sich entweder um ein Subzentrum oder einen Interimknoten.

Beweis:

Folgt trivialerweise aus den Bedingungen (2)-(3) und (6)-(7) von Definition A2.1.1 und Satz A2.1.17.

Es ist jedoch nicht nur interessant die an einem Subzentren-Netzwerk beteiligten Knotenmengen zu kennen. Ebenso interessant ist es auch zu wissen, welche verschiedenen Arten von Kanten in einem Subzentren-Netzwerk auftreten können.

Satz A2.1.23:

Der Graph eines Subzentren-Netzwerkes $N=(G,E,S,A)$ enthält ausschließlich Kanten aus den Mengen $E(N) \times A(N)$, $E(N) \times E(S)$, $E(N) \times I(N)$, $I(N) \times E(S)$, $E(S) \times S$, $S \times A(S)$, $A(S) \times E(S)$, $A(S) \times A(N)$, $A(S) \times I(N)$, $I(N) \times A(N)$ und $I(N) \times I(N)$.

Beweis:

Es ist zu zeigen, daß keine Kante aus $K(G)$ Element eines nebenstehend markierten Kreuzproduktes ist.

	A(N)	A(S)	S	I(N)	E(S)	E(N)
E(N)		b	d			a
E(S)	b	b		b	b	a
S	d		e	f	c	a
I(N)		b	f			a
A(S)		b	c			a
A(N)	a	a	a	a	a	a

Sei $(v, v') \in K(G)$ und $M \subseteq V(G)$,

- $(v, v') \in M \times E(N)$ und $(v, v') \in K(G) \Rightarrow$ Widerspruch zur Definition von $E(N)$ bzw. Definition A2.1.1 (6) $\Rightarrow M \times E(N) \cap K(G) = \emptyset$. Mit Dualitätssatz $\Rightarrow A(N) \times M \cap K(G) = \emptyset$.
- $(v, v') \in E(S) \times M \Rightarrow v \in E(S) \Rightarrow \exists s \in S: v \in E(s) \Rightarrow (v, s) \in K(G)$. Wegen $(v, v') \in K(G)$ und (2) $\Rightarrow v' = s \in S \Rightarrow E(S) \times M \cap K(G) = \emptyset$ für $M \cap S = \emptyset$. Mit Dualitätssatz $\Rightarrow M \times A(S) \cap K(G) = \emptyset$ für $M \cap S = \emptyset$.
- $(v, v') \in S \times E(S) \Rightarrow v' \in E(S) \Rightarrow \exists s \in S: v' \in E(s) \Rightarrow (v', s) \in K(G)$. Wegen (4) ist dies ein Widerspruch zu $(v, v') \in K(G)$ und $v \in S \Rightarrow S \times E(S) \cap K(G) = \emptyset$. Mit Dualitätssatz $\Rightarrow A(S) \times S \cap K(G) = \emptyset$.
- $(v, v') \in E(N) \times S \Rightarrow$ Widerspruch zur Definition von $E(N)$ bzw. Definition A2.1.1 (6). $\Rightarrow E(N) \times S \cap K(G) = \emptyset$. Mit Dualitätssatz $\Rightarrow S \times A(N) \cap K(G) = \emptyset$.
- $(v, v') \in S \times S \Rightarrow$ Widerspruch zu Definition A2.1.1 (1).
- $(v, v') \in S \times I(N) \Rightarrow v' \in A(S) \Rightarrow v' \in A(S) \cap I(N) \Rightarrow$ Widerspruch zu Satz A2.1.17. $\Rightarrow S \times I(N) \cap K(G) = \emptyset$. Mit Dualitätssatz $\Rightarrow I(N) \times S \cap K(G) = \emptyset$.

q.e.d.

Als nächstes werden mengentheoretische Operationen aus Subzentren-Netzwerken übertragen.

Definition A2.1.25:

Zwei Subzentren-Netzwerke N_1 und N_2 heißen **disjunkt**, wenn die Mengen $V(N_1)$ und $V(N_2)$ disjunkt sind.

Satz und Definition A2.1.27:

Sind $N_1=(G_1,E_1,S_1,A_1)$ und $N_2=(G_2,E_2,S_2,A_2)$ zwei Subzentren-Netzwerke mit $V(N_1) \cap V(N_2) \subseteq S_1 \cap S_2$, so ist $N_1 \cup N_2 := (G_1 \cup G_2, E_1 \cup E_2, S_1 \cup S_2, A_1 \cup A_2)$ wieder ein Subzentren-Netzwerk, das die **Vereinigung von N_1 und N_2** heißt.

(Insbesondere ist damit die Vereinigung zweier disjunkter Subzentren-Netzwerke wieder ein Subzentren-Netzwerk.)

Beweis:

Die Bedingungen aus Definition A2.1.1 sind trivialerweise erfüllt, da auch im Falle $v \notin S_1 \cup S_2$ und $(v, v') \in K(N_1 \cup N_2) \Rightarrow$ entweder (beide) $v, v' \in V(N_1)$ oder (beide) $v, v' \in V(N_2)$.

q.e.d.

Da die Bedingungen (1)-(7) von Definition A2.1.1 keine Existenzaussagen enthalten, bleibt ein Subzentren-Netzwerk ein Subzentren-Netzwerk, auch wenn einzelne Kanten oder Knoten entfernt werden. Umgekehrt gilt dies auch, wenn einzelne singuläre Knoten hinzugenommen werden. Bei Hinzunahme einer Kante sind allerdings besondere Bedingungen zu beachten, wie nachfolgender Satz zeigt.

Satz A2.1.29:

Ist $N=(G,E,S,A)$ ein Subzentren-Netzwerk, $(v',v) \notin K(G)$ und $(v,v') \in V(G) \times V(G) \setminus (S \times S \cup S \times E(N,S) \cup A(N,S) \times S)$ mit $v \notin E(S) \cup A(N)$, $v' \notin A(S) \cup E(N)$ und den Eigenschaften

- (1) $v \in S \Rightarrow (v, v'') \notin K(G) \quad \forall v'' \in V(G)$
- (2) $v' \in S \Rightarrow (v'', v') \notin K(G) \quad \forall v'' \in V(G)$

Dann ist $N'=(G',E,S,A)$ mit $V(G'):=V(G)$ und $K(G'):=K(G) \cup \{(v,v')\}$ wieder ein Subzentren-Netzwerk.

Beweis:

Da $(v',v) \notin K(G)$ ist G' ebenfalls ein antisymmetrischer Graph. Zeige, daß N' die Bedingungen (1)-(7) von Definition A2.1.1 erfüllt sind.

- 1) $s, s' \in S \Rightarrow (s, s') \notin K(G) \Rightarrow (s, s') \notin K(G') = K(G) \cup \{(v, v')\}$, da $(v, v') \notin S \times S$.
- 2) $s \in S$ und $(w, s), (w, w') \in K(G')$. Angenommen $(w, s) = (v, v') \Rightarrow (w, w') \notin K(G)$ nach Voraussetzung (1). Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung $(w, w') \in K(G')$ und $(w, w') \neq (v, v') \Rightarrow (w, s) \neq (v, v')$.

Sei $(w,s) \neq (v,v') \Rightarrow w \in E(N,S)$. Wegen $v \notin E(N,S) \Rightarrow (w,w') \neq (v,v') \Rightarrow (w,s), (w,w') \in K(G) \Rightarrow w'=s$.

- 3) $s \in S$ und $(s,w'), (w,w') \in K(G')$. Angenommen $(s,w') = (v,v') \Rightarrow (w,w') \notin K(G)$ nach Voraussetzung (2). Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung $(w,w') \in K(G')$ und $(w,w') \neq (v,v') \Rightarrow (s,w') \neq (v,v')$.

Sei $(s,w') \neq (v,v') \Rightarrow w' \in A(N,S)$. Wegen $v' \notin A(N,S) \Rightarrow (w,w') \neq (v,v') \Rightarrow (s,w'), (w,w') \in K(G) \Rightarrow w=s$.

- 4) $s, s' \in S$ und $(w,s) \in K(G')$. Sei $(w,s) \neq (v,v') \Rightarrow (w,s) \in K(G)$ und $w \in E(N,S) \Rightarrow (s',w) \notin K(G)$ und $(s',w) \neq (v,v')$, da $(v,v') \notin S \times E(N,S) \Rightarrow (s',w) \notin K(G)$.

Sei $(w,s) = (v,v')$. Angenommen $(s',w) \in K(G') \Rightarrow (s',w) \in K(G)$ und $w \in A(N,S) \Rightarrow (w,s) \in A(N,S) \times S$. Dies ist ein Widerspruch zu $(v,v') = (w,s) \notin A(N,S) \times S \Rightarrow (s',w) \notin K(G')$.

- 4) trivial

- 5) $w \in E$, $w' \in V(G') = V(G)$ und $s \in S \Rightarrow (w',w) \notin K(G)$ und $(w,s) \notin K(G)$. Wegen $w \in E = E(N)$ und $v' \notin E(N) \Rightarrow (w',w) \neq (v,v')$ und $(w,s) \neq (v,v') \Rightarrow (w',w) \notin K(G') = K(G) \cup \{(v,v')\}$ und $(w,s) \notin K(G')$.

- 6) $w \in A$, $w' \in V(G')$ und $s \in S \Rightarrow (w,w') \notin K(G)$ und $(s,w) \notin K(G)$. Wegen $w \in A = A(N)$ und $v' \notin A(N) \Rightarrow (w,w') \neq (v,v')$ und $(s,w) \neq (v,v') \Rightarrow (w,w') \notin K(G') = K(G) \cup \{(v,v')\}$ und $(s,w) \notin K(G')$

q.e.d.

Dieser einführende Abschnitt soll nun mit einer Definition, die Pfade und Zykel in einem Subzentren-Netzwerk betreffend, abgeschlossen werden. Dabei wird der Umstand genutzt, daß die Begriffe "Pfad" und "Zykel" vom Graphen eines Subzentren-Netzwerk direkt auf das Netzwerk selbst übertragen werden können.

Wie bereits im 1. Kapitel gesehen, sind Subzentren-Netzwerke ohne Zykel von besonderer Bedeutung. Dazu folgende Definition:

Definition A2.1.31:

Ein Subzentren-Netzwerk $N=(G,E,S,A)$ heißt **zykelfrei**, wenn der Graph G zykelfrei ist. N heißt **ohne echte Zykel**, wenn jeder Zykel im Graphen G genau ein Subzentrum und keine Interimknoten beinhaltet. Derartige Zykel in N heißen **Schlaufen**.

Es ist leicht einzusehen, daß die Schleifen in einem Subzentren-Netzwerk gerade aus einem Subzentrum und je einem seiner Ein- und Ausgänge bestehen. Die Kante, die dabei vom Ausgang zum Eingang führt, wird manchmal auch als **schlaufenbildene Kante** bezeichnet.

A2.2 Offene und geschlossene Subzentren-Netzwerke

Definition A2.2.1:

Ein Subzentren-Netzwerk N heißt **geschlossen**, wenn es weder äußere Eingänge noch äußere Ausgänge besitzt ($E(N)=\emptyset=A(N)$). Ein nicht geschlossenes Subzentren-Netzwerk heißt **offen**.

Der Einfachheit halber wird nachfolgend für ein geschlossenes Subzentren-Netzwerk statt $N=(G,\emptyset,S,\emptyset)$ auch die Notation $N=(G,S)$ benutzt.

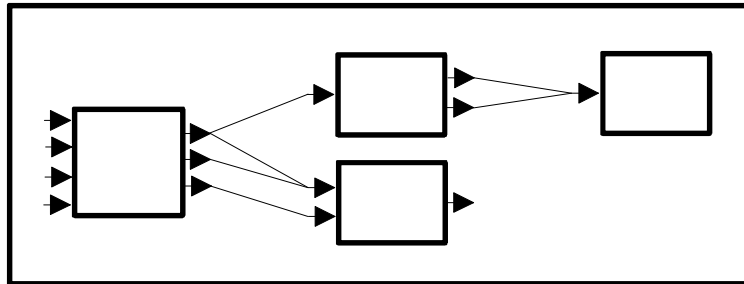


Bild A2.9: Der Graph eines geschlossenen Subzentren-Netzwerks.

Satz A2.2.3:

Ein Subzentren-Netzwerk N ist genau dann offen bzw. geschlossen, wenn auch sein Spiegelbild N^T offen bzw. geschlossen ist. (Damit gilt der Dualitätssatz auch für die Klasse der offenen bzw. geschlossenen Subzentren-Netzwerke.)

Beweis:

Folgt unmittelbar aus dem Dualitätssatz angewendet auf die Klasse aller Subzentren-Netzwerke.

Eine besondere Wechselwirkung zwischen offenen und geschlossenen Subzentren-Netzwerken zeigt sich darin, daß jedes offene Subzentren-Netzwerk injektiv einem geschlossenen zugeordnet werden kann und umgekehrt.

Satz und Definition A2.2.5:

Ist $N=(G,E,S,A)$ ein offenes Subzentren-Netzwerk und $r \notin V(N)$, dann ist $N^{+r} := (G^{+r}, \emptyset, S^{+r}, \emptyset)$ mit $S^{+r} := S \cup \{r\}$, $V(N^{+r}) := V(N) \cup \{r\}$ und $K(N^{+r}) := K(N) \cup \{r\} \times E(N) \cup A(N) \times \{r\}$, ein geschlossenes Subzentren-Netzwerk, das der **Abschluß von N bzgl. r** heißt. Das Element r heißt das **zusätzliche Subzentrum im Abschluß von N**.

Beweis:

Zeige, daß für N^{+r} die Bedingungen (1)-(7) der Definition A2.1.1 erfüllt sind. Allgemein gilt: $(r,v) \in K(N^{+r}) \Leftrightarrow v \in E(N)$, sowie $(v,r) \in K(N^{+r}) \Leftrightarrow v \in A(N)$.

- 1) $s, s' \in S^{+r} = S \cup \{r\} \Rightarrow (s, s') \notin K(N) \cup \{r\} \times E(N) \cup A(N) \times \{r\} = K(N^{+r})$.
- 2) $s \in S^{+r}$ und $(v, s), (v, v') \in K(N^{+r})$. Angenommen $s \in S \Rightarrow (v, s), (v, v') \in K(N) \Rightarrow v' = s$, da N Subzentren-Netzwerk. Angenommen $s \notin S \Rightarrow s = r \Rightarrow (v, s) \in A(N) \times \{r\} \Rightarrow v \in A(N) \Rightarrow (v, v') \in A(N) \times \{r\} \Rightarrow v' = r = s$.
- 3) Analog zu 2).
- 4) $s, s' \in S^{+r}$ und $(v, s) \in K(N^{+r})$. Angenommen $s, s' \in S \Rightarrow (v, s) \in K(N) \Rightarrow (s', v) \notin K(N) \Rightarrow (s', v) \notin K(N^{+r})$. Angenommen $s = r$ und $s' \in S \Rightarrow v \in A(N) \Rightarrow (s', v) \notin K(N) \Rightarrow (s', v) \notin K(N^{+r})$. Angenommen $s = s' = r \Rightarrow v \in A(N) \Rightarrow v \notin E(N) \Rightarrow (s', v) \notin \{r\} \times E(N) \Rightarrow (s', v) \notin K(N^{+r})$.
- 5) Wegen $E(N^{+r}) = \emptyset$ und $A(N^{+r}) = \emptyset$ sind die Bedingungen (5)-(7) trivialerweise erfüllt.

q.e.d.

Achtung! Bei Bildung eines Abschlusses eines offenen Subzentren-Netzwerkes werden aus äußeren Eingängen innere Ausgänge und aus äußeren Ausgängen werden innere Eingänge.

Satz A2.2.7:

Ist N ein offenes Subzentren-Netzwerk und N^{+r} der Abschluß von N bzgl. r , dann ist sein Spiegelbild $(N^{+r})^r$ der Abschluß des Spiegelbildes N^r bzgl. r . (Damit gilt der Dualitätssatz auch für die Klasse der geschlossenen Subzentren-Netzwerke, die Abschluß eines offenen Subzentren-Netzwerkes sind.)

Beweis:

Folgt unmittelbar aus der symmetrischen Definition des Abschlusses und dem Dualitätssatz angewendet auf die Klasse aller Subzentren-Netzwerke.

Satz und Definition A2.2.9:

Ist $N=(G,S)$ ein geschlossenes Subzentren-Netzwerk ($E(N)=\emptyset=A(N)$) und $r \in S(N)$ ein echtes Subzentrum ($E(N,r) \cup A(N,r) \neq \emptyset$), so ist $N^{-r} := (G^{-r}, E, S^{-r}, A)$ mit $S^{-r} := S \setminus \{r\}$, $E := A(N,r)$, $A := E(N,r)$ und $G^{-r} := G \setminus \{r\}$ ein offenes Subzentren-Netzwerk, das die **Öffnung von N bzgl. r** heißt. Das Element r heißt das **fehlende Subzentrum in der Öffnung von N**.

Beweis:

Zeige, daß für N^{-r} die Bedingungen (1)-(7) der Definition A2.1.1 erfüllt sind.

1-4) Da G^{-r} ein Teilgraph von G ist, sind die Bedingungen (1)-(4) trivialerweise erfüllt.

5) Da $S^{-r} \subset S(N)$, $E=A(N,r)$ und $A=E(N,r)$ sind S^{-r} , E und A nach Satz A2.1.15 disjunkt.

6) $v \in E(N^{-r})$, $v' \in V(N^{-r})$ und $s \in S(N^{-r}) \Rightarrow v \in A(N,r) \Rightarrow (r,v) \in K(G)$.

Angenommen $(v',v) \in K(G^{-r}) \subset K(G)$. Wegen $r \in S$ und $(r,v), (v',v) \in K(G) \Rightarrow v'=r$ nach Definition A2.1.1 (3), da N ein Subzentren-Netzwerk ist. Dies ist ein Widerspruch zu $r \notin V(G^{-r})$. $\Rightarrow (v',v) \notin K(G^{-r})$.

Wegen $s \neq r \in S$ und $(r,v) \in K(G) \Rightarrow (v,s) \notin K(G)$ nach Definition A2.1.1 (4) $\Rightarrow (v,s) \notin K(G^{-r}) \subset K(G)$.

7) Analog zu 6).

q.e.d.

Achtung! "Bei der Öffnung" eines geschlossenen Subzentren-Netzwerkes werden aus inneren Eingängen äußere Ausgänge und aus inneren Ausgängen werden äußere Eingänge.

Satz A2.2.11:

Ist N ein offenes Subzentren-Netzwerk und N^{-r} die Öffnung von N bzgl. r , dann ist sein Spiegelbild $(N^{-r})^r$ die Öffnung des Spiegelbildes N^r bzgl. r . (Damit gilt der Dualitätssatz auch für die Klasse der offenen Subzentren-Netzwerke, die Öffnung eines geschlossenen Subzentren-Netzwerkes sind.)

Beweis:

Folgt unmittelbar aus der symmetrischen Definition des Abschlusses und dem Dualitätssatz angewendet auf die Klasse aller Subzentren-Netzwerke.

Daß sich ein offenes Subzentren-Netzwerk von seinem Abschluß bzgl. r nur wenig unterscheidet, wird mit dem nächsten Satz festgehalten.

Satz A2.2.13:

Ist N ein offenes Subzentren-Netzwerk, $r \notin V(N)$ und N^{+r} der Abschluß von N bzgl. r , so ist $S(N^{+r}) = S(N) \cup \{r\}$, $E(N^{+r}) = \emptyset$, $A(N^{+r}) = \emptyset$, $I(N^{+r}) = I(N)$, $E(N^{+r}, S) = E(N, S) \cup A(N)$, $A(N^{+r}, S) = A(N, S) \cup E(N)$

$$E(N^{+r}, s) = \begin{cases} E(N, s) & \text{für } s \neq r \\ A(N) & \text{für } s = r \end{cases} \quad \text{und} \quad A(N^{+r}, s) = \begin{cases} A(N, s) & \text{für } s \neq r \\ E(N) & \text{für } s = r \end{cases}$$

Beweis:

Außer der Aussage $I(N^{+r}) = I(N)$ folgen alle unmittelbar aus der Definition des Abschlusses. $I(N^{+r}) = I(N)$ gilt dann nach Satz A2.1.17.

Satz A2.2.15:

Ist N ein geschlossenes Subzentren-Netzwerk, $r \in S(N)$ und N^{-r} die Öffnung von N bzgl. r , so ist $S(N^{-r}) = S(N) \setminus \{r\}$, $E(N^{-r}) = A(N, r)$, $A(N^{-r}) = E(N, r)$, $I(N^{-r}) = I(N)$, $E(N^{-r}, S) = E(N, S) \setminus E(N, r)$, $A(N^{-r}, S) = A(N, S) \setminus A(N, r)$, sowie $E(N^{-r}, s) = E(N, s)$ und $A(N^{-r}, s) = A(N, s)$ für alle $s \in S(N^{-r})$.

Beweis:

Außer der Aussage $I(N^{-r}) = I(N)$ folgen alle unmittelbar aus der Definition der Öffnung. $I(N^{-r}) = I(N)$ gilt dann nach Satz A2.1.17.

Der nächste Satz zeigt deutlich den injektiven Zusammenhang von offenen und geschlossenen Subzentren-Netzwerken.

Satz A2.2.17:

- (a) Ist N ein offenes Subzentren-Netzwerk und $r \notin V(N)$, so ist $(N^{+r})^{-r} = N$.
- (b) Ist N ein geschlossenes Subzentren-Netzwerk und $r \in S(N)$ ein echtes Subzentrum, so ist $(N^{-r})^{+r} = N$.

Beweis:

Mit Satz A2.2.13 und Satz A2.2.15 folgt auf einfache Weise:
 $V((N^{+r})^{-r}) = V(N)$, $K((N^{+r})^{-r}) = K(N)$, $E((N^{+r})^{-r}) = E(N)$,
 $S((N^{+r})^{-r}) = S(N)$ und $A((N^{+r})^{-r}) = A(N)$, sowie $V((N^{-r})^{+r}) = V(N)$,

$K((N^{-r})^{+r})=K(N)$, $E((N^{-r})^{+r})=\emptyset=E(N)$, $S((N^{-r})^{+r})=S(N)$ und $A((N^{-r})^{+r})=\emptyset=A(N)$.

q.e.d.

Ist N der Abschluß eines offenen Subzentren-Netzwerkes N' (also $N=N'+r$, so ist es manchmal von Bedeutung festzuhalten, welches das zusätzliche Subzentrum in N ist. Dies kann formal über die Kennzeichnung N^{-r+r} oder einfach N^r erfolgen. N^r heißt dann auch ein **markiertes Subzentren-Netzwerk** und r das **markierte Subzentrum**.

Zur graphischen Darstellung eines Abschlusses eines offenen Subzentren-Netzwerkes bzw. eines markierten Subzentren-Netzwerkes wird das zusätzliche bzw. markierte Subzentrum in geeigneter Art und Weise hervorgehoben. Es kann zum Beispiel durch ein X gekennzeichnet sein, wie in Bild A2.11 geschehen.

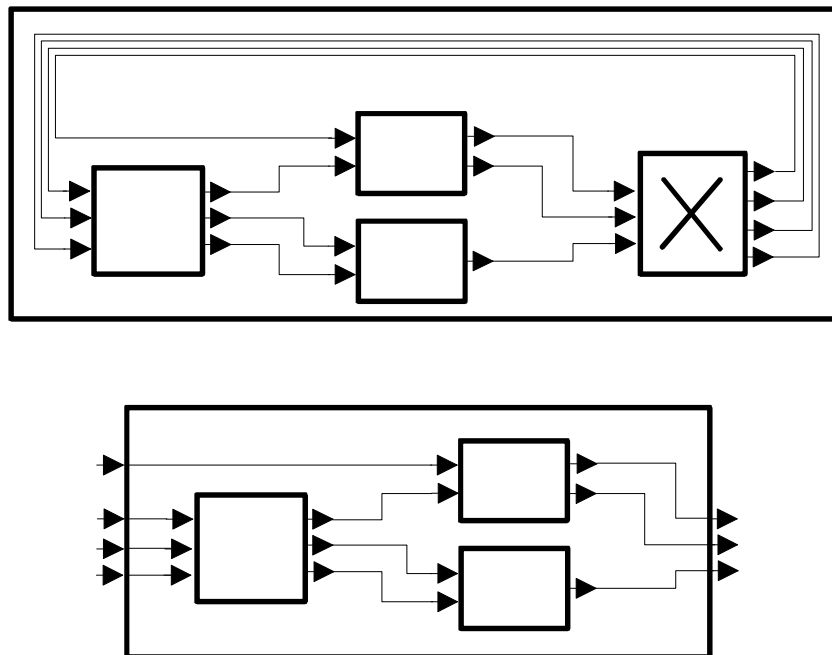


Bild A2.11: Ein offenes Subzentren-Netzwerk (unten) und sein Abschluß (oben). Im Abschluß ist das zusätzliche Subzentrum mit X markiert.

Da einerseits jedes offene Subzentren-Netzwerk mittels eines Abschlusses beschrieben werden kann und andererseits geschlossene Subzentren-Netzwerke in sich homogener sind, empfiehlt es sich häufig zur Darstellung eines offenen Subzentren-Netzwerkes auf seinen Abschluß zurückzugreifen. Dies gilt insbesondere, wenn offene Subzentren-Netzwerke in einem computergerechten Format abgespeichert werden sollen, wie dies bei visuellen Datenflusssprachen der Fall ist.

A2.3 Gepackte Subzentren-Netzwerke

Besonders homogene Subzentren-Netzwerke liegen immer dann vor, wenn diese keine Interimknoten beinhalten. Insbesondere im Fall von visuellen Datenflußnetzwerken können die Interimknoten durch geeignetes Hinzufügen von Kanten substituiert werden, ohne deren semantische Bedeutung zu verändern. Letztlich führt dies unter Benutzung nachfolgender Sätze zu einer schnelleren Interpretation und zu einem effizienteren Programmcode.

Definition A2.3.1:

Ein Subzentren-Netzwerk $N=(G,E,S,A)$ heißt **gepackt**, wenn es keine Zwischen- bzw. Interimknoten besitzt. D.h. $I(N)=\emptyset$ bzw. $V(G)=E(N)\cup E(S)\cup S\cup A(S)\cup A(N)$.

Bild A2.9 zeigt ein gepacktes Subzentren-Netzwerk. Das Subzentren-Netzwerk von Bild A2.3 dagegen ist nicht gepackt.

Daß gepackte Subzentren-Netzwerke einfacher aufgebaut sind, als nicht gepackte, zeigt nicht nur der nächste Satz.

Satz A2.3.3:

Der Graph eines gepackten Subzentren-Netzwerkes $N=(G,E,S,A)$ enthält ausschließlich Kanten aus den Mengen $E(N)\times E(S)$, $E(S)\times S$, $S\times A(S)$, $A(S)\times E(S)$, $A(S)\times A(N)$ und $E(N)\times A(N)$.

Beweis:

Folgt unmittelbar aus Satz A2.1.23, da $I(N)=\emptyset$ für gepackte Subzentren-Netzwerke nach Definition A2.3.1.

Werden Subzentren-Netzwerke zur Beschreibung von visuellen Datenflußsprachen verwendet, so sind die nachfolgend angegebenen Manipulationen gerade die zum Editieren der Netzwerke zugelassenen.

Satz A2.3.5:

Ist $N=(G,E,S,A)$ ein gepacktes Subzentren-Netzwerk, dann ist N' ebenso ein gepacktes Subzentren-Netzwerk, wenn N' durch eine der folgenden Manipulationen aus N hervorgegangen ist:

(a) Hinzunahme einer Kante:

Sei $v, v' \notin S(N)$, $(v, v') \in (E(N) \cup A(N, S)) \times (E(N, S) \cup A(N))$ und $N' = N \cup \{(v, v')\} := (G', E, S, A)$ mit $K(G') := K(G) \cup \{(v, v')\}$.

- (b) Entfernen einer Kante:
 Sei $v, v' \notin S(N)$, $(v, v') \in (E(N) \cup A(N, S)) \times (E(N, S) \cup A(N))$ und $N' = N \setminus \{(v, v')\} := (G', E, S, A)$ mit $K(G') := K(G) \setminus \{(v, v')\}$.
- (c) Hinzunahme eines disjunkten, gepackten Netzes:
 Ist $N'' = (G'', E'', S'', A'')$ ein Subzentren-Netzwerk disjunkt zu N und $N' = N \cup N'' := (G \cup G'', E \cup E'', S \cup S'', A \cup A'')$.
- (d) Entfernen eines Subzentrums mit Ein- und Ausgängen:
 Sei $s \in S(N)$ und $N' = (G', E, S \setminus \{s\}, A)$ mit $V(G') := V(G) \setminus (\{s\} \cup E(N, s) \cup A(N, s))$ und $K(G') = K(G) \cap V(G') \times V(G')$.
- (e) Hinzunahme eines äußeren Eingangs:
 Sei $v \notin V(N)$ und $N' = (G', E \cup \{v\}, S, A)$ mit $V(G') := V(G) \cup \{v\}$ und $K(G') = K(G)$.
- (f) Entfernen eines äußeren Eingangs mit Verbindungskanten:
 Sei $v \in E(N)$ und $N' = (G', E \setminus \{v\}, S, A)$ mit $V(G') := V(G) \setminus \{v\}$ und $K(G') = K(G) \cap V(G') \times V(G')$.
- (g) Hinzunahme eines äußeren Ausgangs:
 Sei $v \notin V(N)$ und $N' = (G', E, S, A \cup \{v\})$ mit $V(G') := V(G) \cup \{v\}$ und $K(G') = K(G)$.
- (h) Entfernen eines äußeren Ausgangs mit Verbindungskanten:
 Sei $v \in A(N)$ und $N' = (G', E, S, A \setminus \{v\})$ mit $V(G') := V(G) \setminus \{v\}$ und $K(G') = K(G) \cap V(G') \times V(G')$.

Beweis:

- a) Hinzunahme einer Kante:
 Sei $v, v' \notin S(N)$, $(v, v') \in (E(N) \cup A(N, S)) \times (E(N, S) \cup A(N))$ und $N' = N \cup \{(v, v')\} := (G', E, S, A)$ mit $K(G') := K(G) \cup \{(v, v')\} \Rightarrow (v, v') \in V(G) \times V(G) \setminus (S \times S \cup S \times E(N, S) \cup A(N, S) \times S)$ mit $v \notin E(S) \cup A(N)$ und $v' \notin A(S) \cup E(N)$. Wegen $v, v' \notin S(N)$ sind auch die Bedingungen (1) und (2) von Satz A2.1.29 erfüllt. Damit ist N' wieder ein Subzentren-Netzwerk. Da durch die Hinzunahme kein neuer Interimknoten entstehen kann ist N' auch gepackt.
- b) Das Entfernen einer Verbindungskante hat keinen Einfluß auf die Bedingungen (1)-(7) von Definition A2.1.1. Damit ist N' wieder ein Subzentren-Netzwerk. Da $(v, v') \in (E(N) \cup A(N, S)) \times (E(N, S) \cup A(N))$ kann bei Entfernen von (v, v') kein Interimknoten entstehen. Damit ist N gepackt.
- c) Folgt unmittelbar aus Satz und Definition A2.1.27, da bei der Vereinigung kein neuer Interimknoten entstehen kann.
- d) Das Entfernen eines Subzentrums mit Ein- und Ausgängen hat keinen Einfluß auf die Bedingungen (1)-(7) von Definition A2.1.1. Damit ist N' wieder ein Subzentren-Netzwerk. Da mit dem Subzentrum auch alle zugehörigen Ein- und Ausgänge entfernt werden, kann kein Interimknoten entstehen.
- e) trivial

f) Ist $e \in E(N)$ und $(e, v) \in K(N)$, so ist $v \in E(N, S) \cup A(N)$ da N gepackt ist. Damit kann durch Wegnahme von e aus N kein Interimknoten entstehen.

g) trivial

h) Ist $a \in A(N)$ und $(v, a) \in K(N)$, so ist $v \in E(N) \cup A(N, S)$ da N gepackt ist. Damit kann durch Wegnahme von a aus N kein Interimknoten entstehen.

q.e.d.

Um die besondere Homogenität von gepackten Subzentren-Netzwerken charakterisieren zu können, ist folgende Definition notwendig:

Definition A2.3.7:

Ist $N=(G, E, S, A)$ ein Subzentren-Netzwerk, dann heißt N **tri-zyklisch**, wenn G bzgl. $(E(S) \cup A(N), S, A(S) \cup E(N))$ tri-zyklisch ist.

Satz A2.3.9:

Ein Subzentren-Netzwerk N ist genau dann tri-zyklisch, wenn es gepackt ist.

Beweis:

Definiere $S := S(N)$, $E := E(S) \cup A(N)$ und $A := A(S) \cup E(N)$.

a) G tri-zyklisch bzgl. $(E, S, A) \Rightarrow E \cup S \cup A = V(G) = (E(S) \cup A(N)) \cup S \cup (A(S) \cup E(N)) \Rightarrow N$ gepackt

b) zu zeigen: N gepackt $\Rightarrow E, S, A$ ist eine Partition auf $V(G)$ und $K(G) \subseteq E \times S \cup S \times A \cup A \times E$

N gepackt $\Rightarrow V(G) = (E(S) \cup A(N)) \cup S \cup (A(S) \cup E(N)) = E \cup S \cup A$. Nach Satz A2.1.23 sind $E(S)$, $E(N)$, S , $A(S)$ und $A(N)$ paarweise disjunkt. \Rightarrow Auch E , S und A sind paarweise disjunkt.

$$(E \cup S \cup A) \times (E \cup S \cup A) = E \times E \cup E \times S \cup E \times A \cup S \times E \cup S \times S \cup S \times A \cup A \times E \cup A \times S \cup A \times A = (E \times S \cup S \times A \cup A \times E) \cup (E \times E \cup E \times A \cup S \times E \cup S \times S \cup A \times S \cup A \times A)$$

$$K(G) \cap E \times E = K(G) \cap ((E(S) \cup A(N)) \times (E(S) \cup A(N))) = K(G) \cap (E(S) \times E(S) \cup E(S) \times A(N) \cup A(N) \times E(S) \cup A(N) \times A(N)) = \emptyset \text{ nach Satz A2.1.13.}$$

$$K(G) \cap E \times A = K(G) \cap ((E(S) \cup A(N)) \times (A(S) \cup E(N))) = K(G) \cap (E(S) \times A(S) \cup E(S) \times E(N) \cup A(N) \times A(S) \cup A(N) \times E(N)) = \emptyset \text{ nach Satz A2.1.13.}$$

$$K(G) \cap S \times E = K(G) \cap (S \times (E(S) \cup A(N))) = K(G) \cap (S \times E(S) \cup S \times A(N)) = \emptyset \text{ nach Satz A2.1.13.}$$

$$K(G) \cap S \times S = \emptyset \text{ nach Satz A2.1.13.}$$

$$K(G) \cap \bar{A} \times S = K(G) \cap ((A(S) \cup E(N)) \times S) = K(G) \cap (A(S) \times S \cup E(N) \times S) = \emptyset$$

nach Satz A2.1.13.

$$K(G) \cap \bar{A} \times A = K(G) \cap ((A(S) \cup E(N)) \times (A(S) \cup E(N))) =$$

$$= K(G) \cap (A(S) \times A(S) \cup A(S) \times E(N) \cup E(N) \times A(S) \cup E(N) \times E(N)) = \emptyset \text{ nach}$$

Satz A2.1.13.

$$\Rightarrow K(G) \cap (E \times E \cup E \times A \cup S \times E \cup S \times S \cup A \times S \cup A \times A) = \emptyset \Rightarrow$$

$$K(G) \subseteq E \times S \cup S \times A \cup A \times E$$

q.e.d.

Der obige Satz ist von Bedeutung, wenn gepackte Datenflußnetzwerke durch einen Interpreter bzw. Simulator zur Ausführung gebracht werden. In diesem Fall ist es nützlich, bei der "Wanderung durch ein Netzwerk" die Art eines Knoten zu kennen, ohne sie explizit speichern oder erfragen zu müssen.

Am Ende dieses Kapitel wird in Bezug auf die Konstruktion von Subzentren-Netzwerken aus Graphen, noch einmal auf gepackte Subzentren-Netzwerke eingegangen.

A2.4 Isomorphe Subzentren-Netzwerke

Um zwei Subzentren-Netzwerke als gleich strukturiert charakterisieren zu können, kann auf den Begriff der Isomorphie für Graphen zurückgegriffen werden.

Definition A2.4.1:

Zwei Subzentren-Netzwerke $N_1=(G_1,E_1,S_1,A_1)$ und $N_2=(G_2,E_2,S_2,A_2)$ heißen **isomorph**, wenn es eine bijektive Abbildung

$\beta:V(G_1)\rightarrow V(G_2)$ gibt mit den Eigenschaften:

- (1) $\beta(E_1)=E_2$, $\beta(S_1)=S_2$ und $\beta(A_1)=A_2$
- (2) $(v,v')\in K(G_1)\Leftrightarrow(\beta(v),\beta(v'))\in K(G_2)$

β heißt dann ein **Isomorphismus**.

Satz A2.4.3:

Sind $N_1=(G_1,E_1,S_1,A_1)$ und $N_2=(G_2,E_2,S_2,A_2)$ zwei Subzentren-Netzwerke und $\beta:V(G_1)\rightarrow V(G_2)$ ein Isomorphismus, so ist auch die Umkehrabbildung $\beta^{-1}:V(G_2)\rightarrow V(G_1)$ ein Isomorphismus.

Beweis:

- 1) $\beta(E_1)=E_2 \Rightarrow \beta^{-1}(\beta(E_1))=\beta^{-1}(E_2) \Rightarrow E_1=\beta^{-1}(E_2)$. Analog ist $S_1=\beta^{-1}(S_2)$ und $A_1=\beta^{-1}(A_2)$
- 2) β ist ein Isomorphismus. \Rightarrow Zu jedem $u\in V(N_2)$ existiert genau ein $v\in V(N_1)$ mit $u=\beta(v)$. \Rightarrow
 $(u,u')=(\beta(v),\beta(v'))\in K(G_2) \Leftrightarrow (v,v')=(\beta^{-1}(u),\beta^{-1}(u'))\in K(G_1)$.

q.e.d.

Satz A2.4.5:

Sind $N_1=(G_1,E_1,S_1,A_1)$ und $N_2=(G_2,E_2,S_2,A_2)$ zwei Subzentren-Netzwerke und $\beta:V(G_1)\rightarrow V(G_2)$ ein Isomorphismus, so gilt:

- (1) $v\in E_1 \Leftrightarrow \beta(v)\in E_2$
- (2) $v\in S_1 \Leftrightarrow \beta(v)\in S_2$
- (3) $v\in A_1 \Leftrightarrow \beta(v)\in A_2$
- (4) $s\in S_1$ und $v\in E(N_1,s) \Leftrightarrow \beta(s)\in S_2$ und $\beta(v)\in E(N_2,\beta(s))$
- (5) $s\in S_1$ und $v\in A(N_1,s) \Leftrightarrow \beta(s)\in S_2$ und $\beta(v)\in A(N_2,\beta(s))$
- (6) $v\in E(N_1,S) \Leftrightarrow \beta(v)\in E(N_2,S)$

$$(7) v \in A(N_1, S) \Leftrightarrow \beta(v) \in A(N_2, S)$$

$$(8) v \in I(N_1) \Leftrightarrow \beta(v) \in I(N_2)$$

Beweis:

- 1) $v \in E_1 \Rightarrow \beta(v) \in E_2$ nach Definition A2.4.1 (1). $\beta(v) \in E_2 \Rightarrow \beta^{-1}(\beta(v)) = v \in E_1$ nach Satz A2.4.3.
- 2) Analog zu 1).
- 3) Analog zu 1).
- 4) $s \in S_1$ und $v \in E(N_1, s) \Rightarrow (v, s) \in K(G_1) \Rightarrow (\beta(v), \beta(s)) \in K(G_2)$. Nach (2) ist $\beta(s) \in S_2 \Rightarrow \beta(v) \in E(N_2, \beta(s))$. Ist $\beta(s) \in S_2$ und $\beta(v) \in E(N_2, \beta(s))$, so gilt für β^{-1} : $s = \beta^{-1}(\beta(s)) \in S_1$ und $v = \beta^{-1}(\beta(v)) \in E(N_1, \beta^{-1}(\beta(s))) = E(N_1, s)$.
- 5) Analog zu 4).
- 6) Folgt nach Definition von $E(N_1, S)$ unmittelbar aus (4).
- 7) Folgt nach Definition von $A(N_1, S)$ unmittelbar aus (5).
- 8) Folgt aus (1)-(3) und (6)-(7), da nach Satz A2.1.17 die Mengen $E_1, S_1, A_1, E(N_1, S), A(N_1, S)$ und $I(N_1)$ bzw. $E_2, S_2, A_2, E(N_2, S), A(N_2, S)$ und $I(N_2)$ eine Partition von $V(N_1)$ bzw. $V(N_2)$ bilden.

q.e.d.

Satz A2.4.7:

Sind $N_1 = (G_1, E_1, S_1, A_1)$ und $N_2 = (G_2, E_2, S_2, A_2)$ zwei isomorphe Subzentren-Netzwerke, so ist N_1 genau dann ein geschlossenes bzw. offenes bzw. ein gepacktes Subzentren-Netzwerk, wenn dies auch für N_2 gilt.

Beweis:

Da $N_1 = (G_1, E_1, S_1, A_1)$ und $N_2 = (G_2, E_2, S_2, A_2)$ isomorph sind, existiert ein Isomorphismus $\beta: V(G_1) \rightarrow V(G_2)$. Sei $e_2 \in E_2$, dann existiert ein $e_1 \in E_1$ mit $\beta(e_1) = e_2$, da β bijektiv ist. N_1 ist geschlossen $\Rightarrow \exists s_1 \in S_1$ mit $(e_1, s_1) \in K(G_1) \Rightarrow (\beta(e_1), \beta(s_1)) \in K(G_2) \Rightarrow \exists s_2 \in S_2$ mit $\beta(s_1) = s_2 \Rightarrow (\beta(e_1), \beta(s_1)) = (e_2, s_2) \in K(G_2)$. Da dies auch analog für jedes $a_2 \in A_2$ gilt ist N_2 ebenfalls geschlossen. Ist N_1 offen, dann kann N_2 nicht geschlossen sein, sonst wäre dies ein Widerspruch zu oben.

Da ein Isomorphismus nach Satz A2.4.5 (8) Interimknoten auf Interimknoten abbildet, ist N_1 genau dann gepackt, wenn auch N_2 gepackt ist.

q.e.d.

A2.5 Die Konstruktion von Subzentren-Netzwerken

Im Bezug auf visuelle Datenflußsprachen wird der Leser in diesem Abschnitt nichts Neues mehr erfahren. Die nachfolgenden Definitionen und Sätze sind aber dann interessant, wenn Subzentren-Netzwerke für andere Zwecke benutzt werden. Dies gilt insbesondere, wenn auf Graphen beruhende Theorien auf Subzentren-Netzwerke übertragen werden sollen, wie dies im letzten Kapitel geschieht.

Den Schlüssel zur Konstruktion eines Subzentren-Netzwerkes aus einem Graphen bilden die tri-zyklischen Graphen.

Satz A2.5.1:

Ist der Graph G bzgl. (V_0, V_1, V_2) tri-zyklisch, dann ist $N=(G, E, V_0, A)$ ein Subzentren-Netzwerk, wenn gilt:

- (1) $E \subseteq V_1$ und $A \subseteq V_2$
- (2) Zu jedem $v_2 \in V_2$ existiert höchstens ein $v_0 \in V_0$ mit $(v_2, v_0) \in K(G)$.
- (3) Zu jedem $v_1 \in V_1$ existiert höchstens ein $v_0 \in V_0$ mit $(v_0, v_1) \in K(G)$.
- (4) $v \in E$ und $v' \in V(G) \Rightarrow (v', v) \notin K(G)$
- (5) $v \in A$ und $v' \in V(G) \Rightarrow (v, v') \notin K(G)$

Beweis:

Zeige, daß für N die Bedingungen (1)-(7) von Definition A2.1.1 erfüllt sind.

- 1) ist erfüllt, da $V_0 \times V_0 \cap K(G) = \emptyset$.
- 2) $v_0 \in V_0$ und $(v, v_0), (v, v') \in K(G) \Rightarrow v \in V_2$ und $v' \in V_0$ da G tri-zyklisch $\Rightarrow v' = v_0$ nach Voraussetzung (2).
- 3) $v_0 \in V_0$ und $(v_0, v'), (v, v') \in K(G) \Rightarrow v' \in V_1$ und $v \in V_0$ da G tri-zyklisch $\Rightarrow v = v_0$ nach Voraussetzung (3).
- 4) $v_0, v_0' \in V_0$ und $(v, v_0) \in K(G) \Rightarrow v \in V_2$ da G tri-zyklisch. Angenommen $(v_0', v) \in K(G) \Rightarrow v \in V_1$ da G tri-zyklisch $\Rightarrow v \in V_1 \cap V_2$. Dies ist ein Widerspruch zu $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. $\Rightarrow (v_0', v) \notin K(G)$.
- 5) $E \cap V_0 = \emptyset$, $V_0 \cap A = \emptyset$, $A \cap E = \emptyset$ da V_0, V_1, V_2 Partition von $V(G)$ und $E \subseteq V_1$ und $A \subseteq V_2$ nach Voraussetzung (1).
- 6) $v \in E$, $v' \in V(G)$ und $v_0 \in V_0 \Rightarrow (v, v_0) \in V_1 \times V_0 \Rightarrow (v, v_0) \notin K(G)$ da G tri-zyklisch bzgl. (V_0, V_1, V_2) . Andererseits ist $(v', v) \notin K(G)$ nach Voraussetzung (4).

- 7) $v \in A$, $v' \in V(G)$ und $v_0 \in V_0 \Rightarrow (v_0, v) \in V_0 \times V_2 \Rightarrow (v_0, v) \notin K(G)$ da G tri-zyklisch bzgl. (V_0, V_1, V_2) . Andererseits ist $(v, v') \notin K(G)$ nach Voraussetzung (5).

q.e.d.

Satz A2.5.3:

Ist der Graph G bzgl. (V_0, V_1, V_2) tri-zyklisch, dann ist $N=(G, E, V_0, A)$ ein gepacktes Subzentren-Netzwerk, wenn gilt:

- (1) $E \subseteq V_1$ und $A \subseteq V_2$
- (2) Zu jedem $v_2 \in V_2 \setminus A$ existiert genau ein $v_0 \in V_0$ mit $(v_2, v_0) \in K(G)$.
- (3) Zu jedem $v_1 \in V_1 \setminus E$ existiert genau ein $v_0 \in V_0$ mit $(v_0, v_1) \in K(G)$.
- (4) $v \in E$ und $v' \in V(G) \Rightarrow (v', v) \notin K(G)$
- (5) $v \in A$ und $v' \in V(G) \Rightarrow (v, v') \notin K(G)$

Beweis:

Nach Satz A2.5.1 ist N ein Subzentren-Netzwerk.

Wegen (2) existiert zu jedem $v_2 \in V_2 \setminus A$ ein $v_0 \in V_0$ mit $(v_2, v_0) \in K(G) \Rightarrow V_2 \subseteq E(N, V_0) \cup A$. Wegen (3) existiert zu jedem $v_1 \in V_1 \setminus E$ ein $v_0 \in V_0$ mit $(v_0, v_1) \in K(G) \Rightarrow V_1 \subseteq A(N, V_0) \cup E$. Wegen $V(G) = V_0 \cup V_1 \cup V_2$ ist $V(G) = (A(N, V_0) \cup E) \cup V_0 \cup (E(N, V_0) \cup A) \Rightarrow I(N) = \emptyset$. Damit ist N gepackt.

q.e.d.

Satz A2.5.5:

Ist der Graph G bzgl. (V_0, V_1, V_2) tri-zyklisch, dann ist $N=(G, V_0)$ ein geschlossenes, gepacktes Subzentren-Netzwerk, wenn gilt:

- (1) Zu jedem $v_2 \in V_2$ existiert genau ein $v_0 \in V_0$ mit $(v_2, v_0) \in K(G)$.
- (2) Zu jedem $v_1 \in V_1$ existiert genau ein $v_0 \in V_0$ mit $(v_0, v_1) \in K(G)$.

Beweis:

Folgt trivialerweise aus Satz A2.5.3, da $E(N) = \emptyset = A(N)$.

In der Praxis treten geschlossene, gepackte Subzentren-Netzwerke besonders häufig auf. Nachfolgender Satz wird später des öfteren benutzt, wenn zu vorgegebenen Mengen ein Subzentren-Netzwerk konstruiert werden soll.

Satz A2.5.7:

Sind W, B zwei nicht leere disjunkte Mengen, $S := \{(w, w) : w \in W\}$, $V \subseteq (W \cup B) \times (W \cup B)$ mit $V \cap W \times W = S$ und $V \cap B \times B = \emptyset$ und $K \subseteq V \times V$ mit den Eigenschaften:

- (1) $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in K \Rightarrow y_1 = x_2$
- (2) $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in K$ und $x_1 \in B \Rightarrow y_2 \in W$
- (3) $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in K$ und $x_1, y_2 \in W \Rightarrow y_1, x_2 \in B$
- (4) $(x, x) \in S$ und $(x, y) \in V \setminus S \Rightarrow ((x, x), (x, y)) \in K$
- (5) $(x, y) \in V \setminus S$ und $(y, y) \in S \Rightarrow ((x, y), (y, y)) \in K$

Dann ist $N := (G, S)$ mit $G := (V, K)$ ein geschlossenes, gepacktes Subzentren-Netzwerk.

Beweis:

- a) Definiere die Mengen $V_0 := V \cap W \times W = S$, $V_1 := V \cap W \times B$ und $V_2 := V \cap B \times W$ und zeige G ist bzgl. (V_0, V_1, V_2) tri-zyklisch.

V_0, V_1, V_2 bilden eine Partition von V , da $V_i \cap V_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und $V \subseteq (W \cup B) \times (W \cup B) = W \times W \cup W \times B \cup B \times W \cup B \times B$ mit $V \cap B \times B = \emptyset$

Ist $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in K' \Rightarrow y_1 = x_2$

Angenommen $(x_1, y_1) \in V_0 \Rightarrow (x_1, y_1) \in W \times W \Rightarrow x_1, y_1 = x_2 \in W \Rightarrow y_2 \in B$, da sonst Widerspruch zu (3) $\Rightarrow (x_2, y_2) \in W \times B \Rightarrow (x_2, y_2) \in V_1$.

Angenommen $(x_1, y_1) \in V_1 \Rightarrow (x_1, y_1) \in W \times B \Rightarrow y_1 = x_2 \in B \Rightarrow y_2 \in W$, da $V \cap B \times B = \emptyset$. $\Rightarrow (x_2, y_2) \in B \times W \Rightarrow (x_2, y_2) \in V_2$.

Angenommen $(x_1, y_1) \in V_2 \Rightarrow (x_1, y_1) \in B \times W \Rightarrow y_1 = x_2 \in W$ und $x_1 \in B \Rightarrow y_2 \in W$ wegen (2) $\Rightarrow (x_2, y_2) \in W \times W \Rightarrow (x_2, y_2) \in V_0$.

$\Rightarrow K \subseteq V_0 \times V_1 \cup V_1 \times V_2 \cup V_2 \times V_0 \Rightarrow G$ ist bzgl. (V_0, V_1, V_2) tri-zyklisch.

- b) Zeige N ist nach Satz A2.5.5 ein geschlossenes, gepacktes Subzentren-Netzwerk.

zu (1) zu zeigen: Ist $v_2 \in V_2$, dann existiert ein $v_0 \in V_0$ mit $(v_2, v_0) \in K$. Ist weiter $v_0' \in V_0$ und auch $(v_2, v_0') \in K$, so ist $v_0 = v_0'$

Wegen $v_2 \in V_2 \exists w_2 \in W$ und $b \in B$ mit $v_2 = (b, w_2)$. $\Rightarrow v_0 := (w_2, w_2) \in V_0$ und damit $(v_2, v_0) = ((b, w_2), (w_2, w_2)) \in K$ nach Voraussetzung (5). Sei weiter $v_0' \in V_0$ und auch $(v_2, v_0') \in K$. $\Rightarrow \exists w_0' \in W$ mit $v_0' = (w_0', w_0')$.

Da $(v_2, v_0) \in K$ bzw. $(v_2, v_0') \in K \Rightarrow ((b, w_2), (w_0, w_0)) \in K$ bzw. $((b, w_2), (w_0', w_0')) \in K' \Rightarrow w_2 = w_0$ bzw. $w_2 = w_0'$ nach Voraussetzung (1). $\Rightarrow w_0 = w_0' \Rightarrow v_0 = v_0'$.

zu (2) ist analog zu (1) zu zeigen: Ist $v_1 \in V_1$, dann existiert ein $v_0 \in V_0$ mit $(v_0, v_1) \in K$. Ist weiter $v_0' \in V_0$ und auch $(v_0', v_1) \in K$, so ist $v_0 = v_0'$

q.e.d.

In Bezug auf Petrinetze sind bipartite Subzentren-Netzwerke von Bedeutung. Dazu folgende Definition:

Definition A2.5.9:

Ein geschlossenes, gepacktes Subzentren-Netzwerk $N=(G,S)$ heißt **bipartit bzgl. (S_1,S_2)** oder einfach **bipartit**, wenn S_1,S_2 eine Partition von S bilden und mit $s,s' \in S$, $a \in A(s)$ und $e \in E(s')$ gilt:

- (1) $s \in S_1$ und $s' \in S_1 \Rightarrow (a,e) \notin K(G)$.
- (2) $s \in S_2$ und $s' \in S_2 \Rightarrow (a,e) \notin K(G)$.

Diese Definition kann als natürliche Erweiterung zur Definition von bipartiten Graphen gesehen werden.

Satz A2.5.11:

Seien X,Y,B drei disjunkte Mengen und existiere zu jedem $x \in X$ bzw. $y \in Y$ ein $B_l(x), B_r(x) \subseteq B$ bzw. $B_l(y), B_r(y) \subseteq B$. (Dabei steht l für links und r für rechts.) Ferner sei:

$$\begin{aligned}
 V_{0X} &:= \{(x,x) : x \in X\}, & V_{0Y} &:= \{(y,y) : y \in Y\}, \\
 V_{1X} &:= \{(x,b) : x \in X \text{ und } b \in B_r(x)\}, & V_{1Y} &:= \{(y,b) : y \in Y \text{ und } b \in B_r(y)\}, \\
 V_{2X} &:= \{(b,x) : x \in X \text{ und } b \in B_l(x)\}, & V_{2Y} &:= \{(b,y) : y \in Y \text{ und } b \in B_l(y)\}, \\
 V &:= V_0 \cup V_1 \cup V_2 \text{ mit } V_0 := V_{0X} \cup V_{0Y}, V_1 := V_{1X} \cup V_{1Y}, V_2 := V_{2X} \cup V_{2Y}. \\
 K_0 &:= \{(b,x)(x,x) : (b,x) \in V_{2X} \text{ und } (x,x) \in V_{0X}\}, \\
 K_1 &:= \{(x,x)(x,b) : (x,x) \in V_{0X} \text{ und } (x,b) \in V_{1X}\}, \\
 K_2 &\subseteq \{(x,b)(b,y) : (x,b) \in V_{1X} \text{ und } (b,y) \in V_{2Y}\}, \\
 K_3 &:= \{(b,y)(y,y) : (b,y) \in V_{2Y} \text{ und } (y,y) \in V_{0Y}\}, \\
 K_4 &:= \{(y,y)(y,b) : (y,y) \in V_{0Y} \text{ und } (y,b) \in V_{1Y}\}, \\
 K_5 &\subseteq \{(y,b)(b,x) : (y,b) \in V_{1Y} \text{ und } (b,x) \in V_{2X}\} \text{ und}
 \end{aligned}$$

$$K := K_0 \cup K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4 \cup K_5,$$

dann ist $N := (G, V_0)$ mit $G := (V, K)$ ein bzgl. (V_{0X}, V_{0Y}) bipartites, geschlossenes, gepacktes, Subzentren-Netzwerk. Es ist für $x \in X$ bzw. $y \in Y$ $E(N, (x,x)) = \{(b,x) \in V_{2X} : b \in B_l(x)\}$ und $A(N, (x,x)) =$

$\{(x,b) \in V_{1X} : b \in B_r(x)\}$ bzw. $E(N, (y,Y)) = \{(b,x) \in V_{2Y} : b \in B_1(y)\}$ und $A(N, (y,Y)) = \{(x,b) \in V_{1Y} : b \in B_r(y)\}$.

Beweis:

Definiere $W := X \cup Y$ und $S := V_0$. $\Rightarrow W \cap B = \emptyset$, $S = \{(w,w) : w \in W\}$, $V \subseteq (W \cup B) \times (W \cup B)$ mit $V \cap W \times W = S$ und $V \cap B \times B = \emptyset$. Weiter ist leicht zu sehen, daß $K \subseteq V \times V$ die Eigenschaften (1)-(5) von Satz A2.5.7 besitzt $\Rightarrow N$ ist ein geschlossenes, gepacktes Subzentren-Netzwerk.

Die Aussagen $E(N, (x,x)) = \{(b,x) \in V_{2X} : b \in B_1(x)\}$ und $A(N, (x,x)) = \{(x,b) \in V_{1X} : b \in B_r(x)\}$ bzw. $E(N, (y,Y)) = \{(b,x) \in V_{2Y} : b \in B_1(y)\}$ und $A(N, (y,Y)) = \{(x,b) \in V_{1Y} : b \in B_r(y)\}$ folgen trivialerweise aus der Definition von K .

Damit folgt nach Definition A2.5.9 ebenso einfach: N ist bipartit bzgl. (V_{0X}, V_{0Y}) , da $K \cap V_{1X} \times V_{2X} = \emptyset$ und $K \cap V_{1Y} \times V_{2Y} = \emptyset$.

q.e.d.

Die beiden zuletzt genannten Sätze werden am Ende des nächsten Kapitels wieder benötigt.

A2. Einfach bewertete Subzentren-Netzwerke

4.1 Allgemeines	108
4.2 Benannte und indizierte Subzentren-Netzwerke	109
4.3 Formatierte Subzentren-Netzwerke	114
4.4 Die Konstruktion formatierter Subzentren-Netzwerke	116

In diesem Kapitel wird die Theorie der Subzentren-Netzwerke auf solche erweitert, deren Knoten mit Marken bewertet sind und die zudem noch die eine oder andere Bedingung erfüllen. Handelt es sich bei den Marken um Namen bzw. Texte, so können benannte Subzentren-Netzwerke vorliegen. Von diesen kann mit Satz und Definition A2.2.3 gezeigt werden, daß jede zugehörige Isomorphieklasse durch eine textuelle Beschreibung dargestellt werden kann. (Bei der Implementierung von VPLE bzw. DIGISIM erwies sich dieser Umstand als äußerst nützlich, da damit, zum Zweck des "Debuggens", Datenflußnetzwerke auch sehr schnell und einfach textuell dargestellt werden konnten.)

Eine besondere Rolle innerhalb dieser Publikation kommt natürlich den Subzentren-Netzwerken zu, deren Knoten mit Indizes versehen sind. Im günstigsten Fall liegen hier fortlaufend indizierte bzw. geordnete Subzentren-Netzwerke vor, wie dies auch bei Datenflußnetzwerken der Fall ist.

Sind die Knoten eines Subzentren-Netzwerkes so mit Marken bzw. Typen versehen, daß die beiden Endknoten jeder Kante, (die nicht zu einem Subzentrum führt oder von dort ausgeht,) denselben Typ besitzen, so liegt ein formatiertes Subzentren-Netzwerk vor. Auch dieses Merkmal ist für Datenflußnetzwerke charakteristisch.

Wie im vorangegangenen Kapitel wird auch hier zum Abschluß auf die Konstruktion einfach bewerteter Subzentren-Netzwerke eingegangen, da dies im letzten Kapitel für den Vergleich mit anderen relevanten Theorien notwendig ist. In Bezug auf Datenflußsprachen kann dieser letzte Abschnitt jedoch wieder vernachlässigt werden.

A2.1 Allgemeines

So wie die Knoten von Graphen in der Regel mit Marken, Typen oder Gewichten bewertet sind, gilt dies auch für Subzentren-Netzwerke. Dazu folgende Definitionen.

Definition A2.1.1:

Ist N ein Subzentren-Netzwerk und $\mu:V(N)\rightarrow M$ eine Bewertungsfunktion, dann heißt das Paar (N,μ) ein **knotenbewertetes Netzwerk**.

Ist $V'\subset V(N)$, dann bezeichne $\mu(V')$ die Menge $\{\mu(v): v\in V'\}$.

Definition A2.1.3:

Ist $H=(N,\mu)$ ein knotenbewertetes Subzentren-Netzwerk, so sei $V(H):=V(N)$, $K(H):=K(N)$, $E(H):=E(N)$, $E(H,s):=E(N,s)$, $E(H,S):=E(N,S)$, $S(H):=S(N)$, $I(H):=I(N)$, $A(H,s):=S(N,s)$, $A(H,S):=A(N,S)$, $A(H):=A(N)$, $EA(H):=EA(N)$ und $SI(H):=SI(N)$ definiert.

Definition A2.1.5:

Ein Isomorphismus β , der zwei knotenbewertete Subzentren-Netzwerke (N_1,μ_1) und (N_2,μ_2) mit $\mu_1:V(N_1)\rightarrow M$ und $\mu_2:V(N_2)\rightarrow M$ aufeinander abbildet heißt **bewertungserhaltend**, wenn $\mu_1(v)=\mu_2(\beta(v))$ für alle $v\in V(N_1)$. (N_1,μ_1) und (N_2,μ_2) heißen dann **bewertungserhaltend isomorph**.

Je nach den Eigenschaften einer Bewertungsfunktion μ werden nun nachfolgend verschiedene Arten von knotenbewerteten Netzwerken vorgestellt.

A2.2 Benannte und indizierte Subzentren-Netzwerke

Besonders interessant sind solche Bewertungsfunktionen, die es erlauben, aus der Bewertung eines Netzwerkes ein isomorphes Bild davon zu gewinnen.

Definition A2.2.1:

Ist N ein Subzentren-Netzwerk und $\text{name}:V(N)\rightarrow N$ eine Bewertungsfunktion, die jedem Knoten von N ein Element aus der Menge N (Namen) zuordnet, dann heißt das Tupel (N,name) ein **benanntes Netzwerk**, wenn die Restriktionen von $\text{name}()$ auf die Mengen $S(N)\cup I(N)\cup E(N)\cup A(N)$ und $E(s)\cup A(s)$ (mit $s\in S(N)$) injektiv sind.

Satz und Definition A2.2.3:

Ist (N,name) mit $\text{name}:V(N)\rightarrow N$ ein benanntes Subzentren-Netzwerk und $\beta:V(N)\rightarrow N\cup N\times N$ definiert durch

$$\beta(v) := \begin{cases} \text{name}(s).\text{name}(v) & \text{falls } v \in E(s) \cup A(s) \\ \text{name}(v) & \text{sonst} \end{cases}$$

dann ist N' mit $S(N') := \beta(S)$, $V(N') := \beta(V(N))$ und $(\beta(v), \beta(v')) \in K(N') \Leftrightarrow (v, v') \in K(N)$ ein zu N isomorphes Subzentren-Netzwerk. Es heißt das **virtuelle Bild von N** .

Beweis:

Noch zu zeigen: β ist injektiv. Mit Satz A2.1.19 \Rightarrow die Mengen $S(N)\cup I(N)\cup E(N)\cup A(N)$ und $E(s)\cup A(s)$ mit $s\in S(N)$ bilden eine Partition von $V(N)$.

Angenommen $v, v' \in S(N)\cup I(N)\cup E(N)\cup A(N)$ oder $v, v' \in E(s)\cup A(s)$ und $\beta(v) = \beta(v') \Rightarrow v = v'$, da β injektiv auf diesen Mengen.

Angenommen $v \in S(N)\cup I(N)\cup E(N)\cup A(N)$ und $v' \in E(s)\cup A(s) \Rightarrow \beta(v) \in N$ und $\beta(v') \in N \times N \Rightarrow \beta(v) \neq \beta(v')$.

Angenommen $v \in E(s)\cup A(s)$ und $v' \in E(s')\cup A(s')$ mit $s \neq s' \Rightarrow \beta(v) = \text{name}(s).\text{name}(v)$ und $\beta(v') = \text{name}(s').\text{name}(v')$. Da β injektiv auf $S \Rightarrow \text{name}(s) \neq \text{name}(s') \Rightarrow \beta(v) \neq \beta(v')$.

q.e.d.

Obiger Satz bildet die Grundlage, ein Subzentren-Netzwerk bzw. eine Klasse von isomorphen Subzentren-Netzwerken in Form einer textuellen Beschreibung zu definieren. Ähnliches gilt für indizierte Netzwerke.

Definition A2.2.5:

Ist N ein Subzentren-Netzwerk und $\nu:V(N)\rightarrow\mathbb{N}$ eine Bewertungsfunktion, die jedem Knoten von N einen Index aus der Menge der natürlichen Zahlen \mathbb{N} zuordnet, dann heißt das Tupel (N,ν) ein **(fortlaufend) indiziertes Subzentren-Netzwerk**, wenn ν auf $\{S(N), I(N), E(N), A(N), E(s)$ und $A(s)$ (mit $s\in S(N)\}$ stückweise, (fortlaufend) indizierend ist. (Vgl. Definition A2.3.29)

Soll ein (fortlaufend) indiziertes Subzentren-Netzwerk (N,ν) graphisch dargestellt werden, so ist es im allgemeinen notwendig den Index $\nu(v)$ eines Knoten v neben diesem anzutragen, wie dies in Bild A2.1 geschehen ist. Geht man jedoch von der Übereinkunft aus, daß die Knoten so plaziert sind, daß die Ein- oder Ausgänge von oben nach unten und die Subzentren oder Interimknoten von oben nach unten und von links nach rechts durchnummeriert sind, so können die Indizes auch ganz oder zumindest teilweise weggelassen werden. (In den weiteren graphischen Darstellungen von fortlaufend indizierten Subzentren-Netzwerken ist dies stets der Fall.)

Ist in einem fortlaufend indizierten Subzentren-Netzwerk einem Knoten v der Index $i=\nu(v)$ zugeordnet so heißt v je nach Zugehörigkeit auch der i -te äußere Eingang, das i -te Subzentrum, der i -te Eingang vom j -ten Subzentrum, usw.

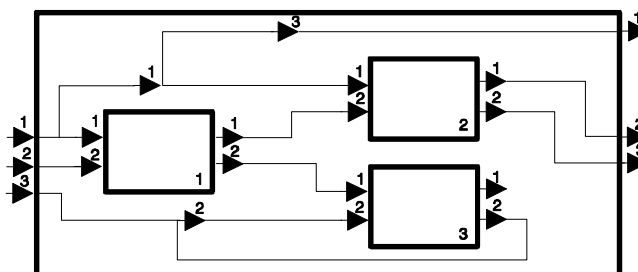


Bild A2.1: Ein fortlaufend indiziertes Subzentren-Netzwerk mit explizit angegebenen Indizes.

Satz A2.2.7:

Ist (N,ν) ein (fortlaufend) indiziertes Subzentren-Netzwerk, so existiert ein zu N isomorphes Subzentren-Netzwerk N_z mit $V(N_z)\subseteq\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

Beweis:

Definiere $\beta:V(N)\rightarrow\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ mit $\beta(v):=$

$$\begin{cases} (0,-v(v)) & \text{für } v \in E(N) \\ (0, v(v)) & \text{für } v \in A(N) \\ (v(v),0) & \text{für } v \in S(N) \\ (-v(v),0) & \text{für } v \in I(N) \\ (v(s),-v(v)) & \text{für } v \in E(N,s) \\ (v(s), v(v)) & \text{für } v \in A(N,s) \end{cases}$$

$V(N'):=\beta(V(N))$, $K(N'):=\{(\beta(u),\beta(v))\in V(N')\times V(N'):(u,v)\in K(N)\}$
 $G(N'):=\langle V(N'),K(N') \rangle$, $N':=(G(N'),\beta(E(N)),\beta(S(N)),\beta(A(N)))$ und zeige, daß $\beta':V(N)\rightarrow\beta(V(N))$ mit $\beta'(v):=\beta(v)$ der gesuchte Isomorphismus ist. Nach Satz A2.1.19 bilden die Mengen $E(N)$, $A(N)$, $S(N)$, $I(N)$ und $E(N,s)$ bzw. $A(N,s)$ mit $s\in S(N)$ eine Partition auf $V(N)$. Damit sind sowohl β als auch β' wohldefinierte Abbildungen. Da stets $v(v)>0$ ist und die Restriktionen von v auf die genannten Mengen injektiv sind, ist β' eine bijektive Abbildung. (Ist die 1. Komponente gleich 0, so ist $v\in E(N)\cup A(N)$. Ist die 2. Komponente gleich 0, so ist $v\in S(N)\cup I(N)$. Ist keine der beiden Komponenten gleich 0, so existiert ein $s\in S(N)$ mit $v\in E(N,s)\cup A(N,s)$. Das Minuszeichen entscheidet dann darüber, zu welcher der beiden Teilmengen v gehört.) Da nach Definition $(\beta(u),\beta(v))\in K(N') \Leftrightarrow (u,v)\in K(N)$ ist β' ein Isomorphismus.

q.e.d.

Da zu jedem Netzwerk N mit einer abzählbaren Menge von Knoten $V(N)$ eine Indexfunktion v definiert werden kann, (die Knoten aus $E(N)$, $A(N)$, $S(N)$, $I(N)$ und $E(N,s)$ bzw. $A(N,s)$ mit $s\in S(N)$ werden in beliebiger Reihenfolge durchnummeriert,) gibt es also zu jedem solchen Netzwerk ein isomorphes Bild mit Knoten aus $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. Neben dem benennen der Knoten mit Namen liefert auch dies eine Möglichkeit Subzentren-Netzwerke computergerecht darzustellen.

Die wirkliche Bedeutung von fortlaufend indizierten Subzentren-Netzwerken liegt jedoch darin, daß es anhand der Indizierung möglich ist, algebraische Operationen auf Subzentren-Netzwerken zu definieren. Darauf wird im nächsten Kapitel noch detailliert eingegangen.

Fast identisch zu den fortlaufend indizierten Subzentren-Netzwerken sind die geordneten Subzentren-Netzwerke.

Definition A2.2.9:

Ist N ein Subzentren-Netzwerk und \leq eine partielle Ordnung auf $V(N)$ die auf $\{S(N), I(N), E(N), A(N), E(s)$ und $A(s)$ (mit $s \in S(N)\}$ stückweise linear ist, dann heißt das Tupel (N, \leq) ein **geordnetes Subzentren-Netzwerk**.

Da jede Indizierung eine Ordnung definiert, sind nach folgendem Satz fortlaufend indizierte und geordnete Subzentren-Netzwerke äquivalent.

Satz A2.2.11:

Ist (N, ν) ein (fortlaufend) indiziertes Subzentren-Netzwerk, dann ist (N, \leq_ν) ein geordnetes Subzentren-Netzwerk und ist umgekehrt (N, \leq) ein geordnetes Subzentren-Netzwerk, dann ist (N, ν_\leq) ein fortlaufend indiziertes Subzentren-Netzwerk. Außerdem ist $(N, \leq) = (N, \leq_{(\nu_\leq)})$.

Beweis:

- a) Sei (N, ν) ein indiziertes Netzwerk $\Rightarrow \nu$ auf $\{S(N), I(N), E(N), A(N), E(s)$ und $A(s)$ (mit $s \in S(N)\}$ stückweise, indizierend. \Rightarrow Nach Satz und Definition A2.3.31 ist \leq_ν eine partielle Ordnung auf $V(N)$ die auf $\{S(N), I(N), E(N), A(N), E(s)$ und $A(s)$ (mit $s \in S(N)\}$ stückweise linear ist. $\Rightarrow (N, \leq_\nu)$ ein geordnetes Subzentren-Netzwerk.
- b) Sei (N, \leq) ein geordnetes Subzentren-Netzwerk \Rightarrow ist \leq eine partielle Ordnung auf $V(N)$ die auf $\{S(N), I(N), E(N), A(N), E(s)$ und $A(s)$ (mit $s \in S(N)\}$ stückweise linear ist. \Rightarrow Nach Satz und Definition A2.3.33 ist ν_\leq auf $\{S(N), I(N), E(N), A(N), E(s)$ und $A(s)$ (mit $s \in S(N)\}$ stückweise, fortlaufend indizierend $\Rightarrow (N, \nu_\leq)$ ist ein fortlaufend indiziertes Subzentren-Netzwerk.
- c) $(N, \leq) = (N, \leq_{(\nu_\leq)})$ gilt nach Satz A2.3.35.

q.e.d.

Dieser Satz ermöglicht es also, Aussagen über fortlaufend indizierte Subzentren-Netzwerke direkt auf geordnete Subzentren-Netzwerke zu übertragen und umgekehrt.

Es ist leicht einzusehen, daß aus einem geordneten Subzentren-Netzwerk ein Ein- oder Ausgang gelöscht werden kann, ohne die Ordnung zu zerstören. Bei einem fortlaufend indizierten Subzentren-Netzwerk führt dies dagegen dazu, daß es im allgemeinen eben nicht mehr fortlaufend indiziert ist. Aus diesem Grunde wäre es angebracht stets mit geordneten Subzentren-Netzwerken zu arbeiten. Werden jedoch für geordnete

Subzentren-Netzwerke algebraische Operationen definiert, so ist man sowieso gezwungen, auf fortlaufend indizierte Subzentren-Netzwerke auszuweichen. Aus diesem Grunde werden im nächsten Kapitel nur mehr fortlaufend indizierte Subzentren-Netzwerke untersucht, obwohl eigentlich geordnete Subzentren-Netzwerke gemeint sind.

A2.3 Formatierte Subzentren-Netzwerke

Besonders interessant sind auch solche knotenbewertete Subzentren-Netzwerke, bei denen es zwischen den Marken und der Struktur des Subzentren-Netzwerks Abhängigkeiten gibt.

Definition A2.3.1:

Ist T eine Menge von **Typen**, so heißt ein knotenbewertetes Subzentren-Netzwerk (N, τ) mit $\tau: V(N) \rightarrow T$ **formatiert**, wenn für alle $(v, v') \in K(N)$ mit $v, v' \notin S(N)$ $\tau(v) = \tau(v')$ ist.

Da in einem formatierten Netzwerk die Typen den Knoten zugeordnet werden, es aber in der Regel in einem Netzwerk wesentlich mehr Kanten als Knoten gibt, können die Typen dazu verwendet werden, die Möglichkeiten der Verbindungen zwischen Ein- und Ausgängen einzuschränken, denn einem Ausgang kann ein Eingang nur dann zugeordnet werden, wenn der Ausgang vom selben Typ ist wie der Eingang. (Siehe auch Bild A2.3.)

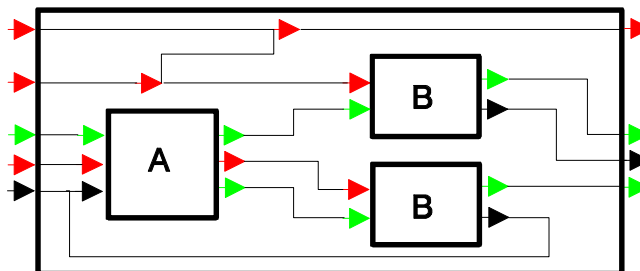


Bild A2.3: Ein offenes formatiertes Subzentren-Netzwerk. Dabei sind der Typ $\tau(v)$ eines Subzentrums über den kennzeichnenden Buchstaben und der anderer Knoten über seine Farbe (Graustufe) gegeben.

Einen Spezialfall von formatierten Subzentren-Netzwerk beschreibt die folgende Definition.

Definition A2.3.3:

Ein formatiertes Subzentren-Netzwerk (N, τ) heißt **eindeutig formatiert**, wenn gilt:

- (1) $s \in S(N)$, $e, e' \in E(s)$ und $\tau(e) = \tau(e') \Rightarrow e = e'$.
- (2) $s \in S(N)$, $a, a' \in A(s)$ und $\tau(a) = \tau(a') \Rightarrow a = a'$.
- (3) $e, e' \in E(N)$ und $\tau(e) = \tau(e') \Rightarrow e = e'$.
- (4) $a, a' \in A(N)$ und $\tau(a) = \tau(a') \Rightarrow a = a'$.

Damit sind in einem eindeutig formatierten Subzentren-Netzwerk keine zwei Eingänge bzw. Ausgänge desselben Subzentrums vom selben Typ.

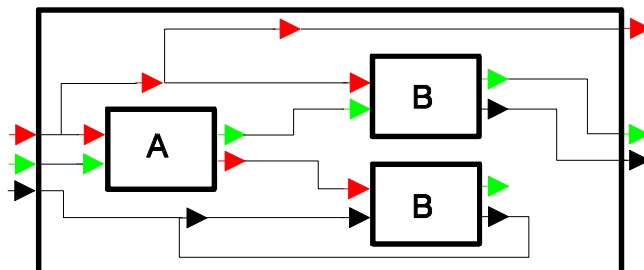


Bild A2.5: Ein offenes, eindeutig formatiertes, aber nicht typenkonformes Subzentren-Netzwerk.

A2.4 Die Konstruktion formatierter Subzentren-Netzwerke

In Bezug auf Graph-Grammatiken bzw. attributierte Grammatiken sind folgende Definitionen und Sätze von Bedeutung.

Satz A2.4.1:

Sind W, A, B drei nicht leere Mengen mit $W \cap A = \emptyset$, $W \cap B = \emptyset$ und $\alpha: W \rightarrow A$ eine Abbildung, $S := \{(w, w) : w \in W\}$ und $V \subseteq (W \cup B) \times (W \cup B)$ mit $V \cap W \times W = S$ und $V \cap B \times B = \emptyset$, $K \subseteq V \times V$ mit den Eigenschaften:

- (1) $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in K \Rightarrow y_1 = x_2$
- (2) $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in K$ und $x_1 \in B \Rightarrow y_2 \in W$
- (3) $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in K$ und $x_1, y_2 \in W \Rightarrow y_1, x_2 \in B$
- (4) $(x, x), (x, y) \in V \Rightarrow ((x, x), (x, y)) \in K$
- (5) $(x, y), (y, y) \in V \Rightarrow ((x, y), (y, y)) \in K$

und $\tau: V \rightarrow A \cup B$ definiert durch $\tau((x, y)) := \begin{cases} \alpha(x) & \text{für } x \in W \text{ und } y \in W \\ y & \text{für } x \in W \text{ und } y \in B \\ x & \text{für } x \in B \text{ und } y \in W \end{cases}$, so

ist (N, τ) mit $N := (G, S)$ und $G := (V, K)$ ein geschlossenes, gepacktes, eindeutig formatiertes Subzentren-Netzwerk.

Beweis:

a) Nach Satz A2.5.7 ist (N, τ) ein geschlossenes, gepacktes Subzentren-Netzwerk.

b) Zeige (N, τ) ist ein formatiertes Subzentren-Netzwerk.

Seien V_0, V_1, V_2 wie im Beweis von Satz A2.5.7 definiert und $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in K(N) = K$ mit $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \notin S(N) = S = V_0$. Da $G(N) = G$ tri-zyklisch bzgl. $(V_0, V_1, V_2) \Rightarrow (x_1, y_1) \in V_1$ und $(x_2, y_2) \in V_2 \Rightarrow \tau((x_1, y_1)) = y_1 = x_2 = \tau((x_2, y_2))$ nach Definition von τ und (1).

c) Zeige (N, τ) ist ein eindeutig formatiertes Subzentren-Netzwerk.

zu (1): $(v, v) \in S(N) = V_0$ und $(x, y), (x', y') \in E((v, v))$ mit $\tau(x, y) = \tau(x', y') \Rightarrow ((x, y), (v, v)), ((x', y'), (v, v)) \in K(N) \Rightarrow y = v = y' \Rightarrow (x, y), (x', y') \in V_2 \Rightarrow x = \tau(x, y) = \tau(x', y') = x' \Rightarrow (x, y) = (x', y')$.

zu (2): $(v, v) \in S(N) = V_0$ und $(x, y), (x', y') \in A((v, v))$ mit $\tau(x, y) = \tau(x', y') \Rightarrow (x, y) = (x', y')$ analog zu (1).

zu (3) und (4): Sind automatisch erfüllt, da N nach (a) ein geschlossenes Subzentren-Netzwerk ist.

q.e.d.

Definition A2.4.3:

Ein einfach bewertetes Subzentren-Netzwerk (N, τ) mit $\tau: V(N) \rightarrow T$ heißt **typenkonform**, wenn für alle $s, s' \in S(N)$ mit $\tau(s) = \tau(s')$ gilt:

- (1) $|\{v \in E(N, s) : \tau(v) = t\}| = |\{v \in E(N, s') : \tau(v) = t\}|$ für alle $t \in T$.
- (2) $|\{v \in A(N, s) : \tau(v) = t\}| = |\{v \in A(N, s') : \tau(v) = t\}|$ für alle $t \in T$.

Wie in Bild A2.3 zu sehen ist, besitzen in einem typenkonformen Subzentren-Netzwerk die Subzentren mit gleichem Typ dieselbe Anzahl von Ein- bzw. Ausgängen vom selben Typ.

Satz A2.4.5:

Seien W, A, B drei nicht leere Mengen mit $W \cap A = \emptyset$, $W \cap B = \emptyset$ und (X, Y) eine Partition von W . Außerdem existiere zu jedem $w \in W$ ein $B_1(w), B_r(w) \subseteq B$ und eine Abbildung $\alpha: W \rightarrow A$ mit der Eigenschaft $\alpha(w) = \alpha(w') \Rightarrow B_1(w) = B_1(w')$ und $B_r(w) = B_r(w')$. Ferner sei:

$$V_{0X} := \{(x, x) : x \in X\},$$

$$V_{0Y} := \{(y, y) : y \in Y\},$$

$$V_{1X} := \{(x, b) : x \in X \text{ und } b \in B_r(x)\}, \quad V_{1Y} := \{(y, b) : y \in Y \text{ und } b \in B_r(y)\},$$

$$V_{2X} := \{(b, x) : x \in X \text{ und } b \in B_1(x)\}, \quad V_{2Y} := \{(b, y) : y \in Y \text{ und } b \in B_1(y)\},$$

$$V := V_0 \cup V_1 \cup V_2 \text{ mit } V_0 := V_{0X} \cup V_{0Y}, \quad V_1 := V_{1X} \cup V_{1Y}, \quad V_2 := V_{2X} \cup V_{2Y}.$$

$$K_0 := \{(b, x)(x, x) : (b, x) \in V_{2X} \text{ und } (x, x) \in V_{0X}\},$$

$$K_1 := \{(x, x)(x, b) : (x, x) \in V_{0X} \text{ und } (x, b) \in V_{1X}\},$$

$$K_2 \subseteq \{(x, b)(b, y) : (x, b) \in V_{1X} \text{ und } (b, y) \in V_{2Y}\},$$

$$K_3 := \{(b, y)(y, y) : (b, y) \in V_{2Y} \text{ und } (y, y) \in V_{0Y}\},$$

$$K_4 := \{(y, y)(y, b) : (y, y) \in V_{0Y} \text{ und } (y, b) \in V_{1Y}\},$$

$$K_5 \subseteq \{(y, b)(b, x) : (y, b) \in V_{1Y} \text{ und } (b, x) \in V_{2X}\} \text{ und}$$

$$K := K_0 \cup K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4 \cup K_5,$$

$$\text{und } \tau: V \rightarrow A \cup B \text{ definiert durch } \tau((x, y)) := \begin{cases} \alpha(x) \text{ für } x \in W \text{ und } y \in W \\ y \text{ für } x \in W \text{ und } y \in B \\ x \text{ für } x \in B \text{ und } y \in W \end{cases},$$

dann ist (N, τ) mit $N := (G, V_0)$ und $G := (V, K)$ ein bzgl. (V_{0X}, V_{0Y}) bipartites, geschlossenes, gepacktes, eindeutig formatiertes und typenkonformes Subzentren-Netzwerk.

Beweis:

Nach Satz A2.5.11 ist N ein bzgl. (V_{0X}, V_{0Y}) bipartites, geschlossenes, gepacktes Subzentren-Netzwerk. Bleibt noch zu zeigen, (N, τ) ist eindeutig formatiert und typenkonform.

Es gilt: $V \subseteq (W \cup B) \times (W \cup B)$ mit $V \cap W \times W = V_0$ und $V \cap B \times B = \emptyset$. Außerdem ist $K \subseteq V \times V$ und erfüllt die Bedingungen (1)-(5) von Satz A2.4.1. Damit ist (N, τ) ein eindeutig formatiertes Subzentren-Netzwerk.

Zeige: Für $s, s' \in S(N) = V_0$ mit $\tau(s) = \tau(s')$ gelten die Bedingungen (1) und (2) von Definition A2.4.3.

$s, s' \in S(N) \Rightarrow \exists w, w' \in W$ mit $s = (w, w)$ und $s' = (w', w')$. $\tau(s) = \tau(s') \Rightarrow \alpha(w) = \alpha(w') \Rightarrow B_1(w) = B_1(w')$ und $B_r(w) = B_r(w')$. Nach Satz A2.5.11 ist für $x \in X$ bzw. $y \in Y$ $E(N, (x, x)) = \{(b, x) \in V_{2X} : b \in B_1(x)\}$ und $A(N, (x, x)) = \{(x, b) \in V_{1X} : b \in B_r(x)\}$ bzw. $E(N, (y, y)) = \{(b, x) \in V_{2Y} : b \in B_1(y)\}$ und $A(N, (y, y)) = \{(x, b) \in V_{1Y} : b \in B_r(y)\}$. Da (N, τ) ein eindeutig formatiert ist, ist $|\{v \in E(N, s) : \tau(v) = b\}| = 0$ oder $|\{v \in E(N, s) : \tau(v) = b\}| = 1$ für alle $b \in B$ und alle $s \in S(N)$. $\Rightarrow |\{v \in E(N, s) : \tau(v) = b\}| = |\{v \in E(N, s') : \tau(v) = b\}|$, da $B_1(w) = B_1(w')$. Damit ist die Bedingung (1) von Definition A2.4.3 erfüllt. Analog folgert man, daß auch die Bedingung (2) gilt.

q.e.d.

A2. Zweifach bewertete Subzentren-Netzwerke

5.1 Allgemeines	126
5.2 Das parallele und serielle Produkt zweier Subzentren-Netzwerke	129
5.3 Das natürliche Monopolyid der Äquivalenzklassen ...	139
5.4 Besondere Untermonopolyide und einfache Netzwerke .	146
5.5 Bestimmende Abbildungen	158
5.6 Sequentielle Darstellungen und symmetrische Substitutionsmengen	168
5.6.1 Grundlegende Definitionen.....	168
5.6.2 Spezielle symmetrische Substitutionsmengen..	170
5.6.3 Kriterien für Vertauschungen und Überbrückungen.....	175
5.7 Vollkommene Untermonopolyide	179
5.8 Alpha-vollkommene Untermonopolyide	188
5.9 Die Konstruktion eines Monopolyiden-Homomorphismus'	221

In diesem Kapitel werden fortlaufend indizierte und damit implizit geordnete Subzentren-Netzwerke untersucht, deren Knoten zusätzlich ein Typ zugeordnet ist. Für derartige Netzwerke lassen sich algebraische Operationen definieren, die mittels Repräsentanten auf die Isomorphie- bzw. Äquivalenzklassen übertragbar sind. Es läßt sich dabei relativ einfach zeigen, daß die Menge aller Äquivalenzklassen formatierter Netzwerke, mit Typen aus einer Menge T , ein natürliches Monopolyid $(N_T^F / \sim, \times, \bullet_D)$ definiert. Es ist jedoch ein erheblicher Aufwand notwendig, um zu zeigen, daß bestimmte Untermonopolyide von $(N_T^F / \sim, \times, \bullet_D)$ α -vollkommene Monopolyide sind. Dieser Aufwand ist jedoch gerechtfertigt, da derartige α -vollkommene Monopolyide dazu benutzt werden können, visuellen Datenflusssprachen, deren Syntax über formatierte,

fortlaufend indizierte Subzentren-Netzwerke definiert ist, eine semantische Bedeutung zuzuordnen. Eine Zusammenfassung dazu findet der Leser auf den unmittelbar folgenden Seiten.

A2A2A2A2A2A2A2A2A2

Zusammenfassung

Im ersten Abschnitt werden einige einfache Definitionen für zweifach bewertete Subzentren-Netzwerke vorangestellt. Besonders zu erwähnen ist dabei die Definition der typenindexkonformen Subzentren-Netzwerke, da jedes, vom Anwender einer visuellen Datenflusssprache erzeugte Datenflußnetzwerk durch ein typenindexkonformes Subzentren-Netzwerk repräsentiert werden kann. Diese Definition besagt dabei lediglich, daß in den beteiligten Netzwerken die Subzentren mit demselben Typen bzgl. ihrer Ein- und Ausgänge dasselbe Erscheinungsbild zeigen. (Vgl. Bild A2.1.) Ginge es nur darum die Syntax visueller Datenflusssprachen festzulegen, so hätte man hier bereits das Ziel erreicht, denn der Rest des Kapitels dient dazu, auch die Definition der Semantik visueller Datenflusssprachen in den Griff zu bekommen. Aus diesem Grund muß auf Isomorphie- und Äquivalenzklassen zweifach bewerteter Subzentren-Netzwerke eingegangen werden. Um mit diesen Begriffen schnell vertraut zu werden, genügt es sich klar zu machen, daß jede graphische Darstellung eines zweifach bewerteten Subzentren-Netzwerkes eigentlich seine Isomorphieklasse repräsentiert. Wird dabei zudem die Ordnung der Subzentren und Interimknoten vernachlässigt, so liegt die entsprechende Äquivalenzklasse vor.

In den Abschnitten 2. und 3. wird gezeigt, daß für eine feste Menge von Typen T , die Menge N_T/\sim aller Äquivalenzklassen ein Monopolyid $(N_T/\sim, \times, \bullet_D)$ bildet. Dazu wird zunächst für die Repräsentanten solcher Äquivalenzklassen ein paralleles Produkt " \times " und ein serielles Produkt " \bullet " definiert und dieses dann auf die Äquivalenzklassen selbst übertragen. (Beide Produkte können sehr anschaulich dargestellt werden, wie anhand Bild A2.3 und Bild A2.5 zu sehen ist.) Die Beweise dazu zeigen auch deutlich, daß hier auf Äquivalenzklassen ausgewichen werden muß, da die Menge N_T der Isomorphieklassen im allgemeinen kein Monopolyid bildet. Im Rahmen dieser Beweise ist es auch notwendig, die Menge der Identitäten N_T^I des Monopolyids $(N_T/\sim, \times, \bullet_D)$ zu bestimmen. Sie werden als eine Teilmenge der Permutationen N_T^P definiert und sind im wesentlichen dadurch gekennzeichnet, daß sie weder Subzentren noch Interimknoten beinhalten und darin von jedem äußeren Eingang genau eine Kante zu einem äußeren Ausgang führt. (Siehe Bild A2.11.) Sie sind damit auch Elemente aus der Menge N_T^0 aller formatierten, fast leeren Subzentren-Netzwerke, also solcher Subzentren-Netzwerke, die weder Subzentren noch Interimknoten beinhalten und formatiert sind. Schließlich wird am Ende des dritten Abschnitts mit Satz A2.3.25 gezeigt, daß $(N_T/\sim, \times, \bullet_D)$ sogar ein natürliches Monopolyid ist. Dies bedeutet, daß es einen Monopolyiden-Homomorphismus $\| \| : (N_T/\sim, \times, \bullet_D) \rightarrow (\mathbb{N}_0, +, +)$ gibt, der mindestens einer Äquivalenzklasse nicht die Null zuordnet. Der Beweis dazu ist

sehr einfach, wenn man $\| \|$ so definiert, daß $\| \|$ jedem Subzentren-Netzwerk bzw. seiner Äquivalenzklasse gerade die Anzahl seiner Subzentren und Interimknoten zuordnet. Der Umstand, daß $(N_T/\sim, \times, \bullet_D)$ ein natürliches Monopolyid ist, ist deshalb von großer Tragweite, da sich diese Eigenschaft auf einige Untermonopolyide überträgt und damit in den Beweisen zum ersten und zweiten Hauptsatz dieser Arbeit (Satz A2.7.11 und Satz A2.8.19), die Methode der Induktion angewendet werden kann, wodurch diese Beweise erst möglich werden.

Ab dem vierten Abschnitt werden nur noch Untermonopolyide von $(N_T^F/\sim, \times, \bullet_D)$ betrachtet, welches selbst ein Untermonopolyid von $(N_T/\sim, \times, \bullet_D)$ ist. Dabei handelt es sich bei N_T^F/\sim um die Menge aller formatierten Subzentren-Netzwerke bzw. deren Äquivalenzklassen. Da alle Datenflußnetzwerke formatierten Subzentren-Netzwerken entsprechen, wird damit in Bezug auf diese keine Einschränkung vorgenommen. Ein wesentliches Ergebnis des vierten Abschnitts stellt Satz A2.4.5 dar. Er besagt, daß die Menge N_T^I bzw. N_T^P gerade der Menge der Identitäten bzw. invertierbaren Elemente von $(N_T^F/\sim, \times, \bullet_D)$ entspricht. Besonders zu erwähnen ist auch Satz A2.4.7, da dieser besagt, daß kein Untermonopolyid von $(N_T^F/\sim, \times, \bullet_D)$ mit den Permutationen N_T^P als Teilmenge ein vollkommenes bzw. Hotz'sches Monopolyid sein kann. Da nach [HÜB95] die Hotz'schen Monopolyide zu freien X-Kategorien fast äquivalent sind, bedeutet dies in seiner letzten Konsequenz, daß die von G. Hotz entwickelte Theorie der freien X-Kategorien [HOT74] nicht hinreichend genug ist, um das, in Bezug auf die Definition der Semantik von visuellen Datenflußsprachen, wesentliche Ergebnis des zweiten Hauptsatzes zu beweisen. Vorbereitend zum Beweis dieses wichtigen Satzes, werden in diesem Abschnitt auch einfache Netzwerke mit und ohne Schleifen, vorwärts- und rückwärtszyklische Permutationen, sowie einfache Verzweigungen und einfache Verjüngungen definiert und untersucht. (Vergleiche dazu Bild A2.15, Bild A2.42 und Bild A2.23.)

Im fünften Abschnitt werden bestimmende Abbildungen eingeführt. Da ein Isomorphismus Subzentren und Interimknoten gerade auf Subzentren und Interimknoten abbildet, kann man zeigen, daß seine Restriktion auf diese Menge diesen Isomorphismus eindeutig bestimmt und deshalb die Bezeichnung "bestimmende Abbildung" gerechtfertigt ist. (Vergleiche dazu Satz A2.5.3.) Bestimmende Abbildungen haben gegenüber den Isomorphismen den wesentlichen Vorteil, daß bei der Bildung des seriellen Produkts die Vereinigung zweier gegebener bestimmenden Abbildungen die bestimmende Abbildung für das Produkt ist. Für die zugehörigen Isomorphismen gilt dies jedoch nicht. (Vergleiche dazu Satz A2.5.9.) Dieser Umstand wird im Beweis zum zweiten Hauptsatz implizit ausgenutzt, in dem Satz A2.5.27 angewandt wird. Es sei auch bereits hier

hervorgehoben, daß dieser Beweis nur unter Verwendung von bestimmten Abbildungen zu führen ist. Der Einsatz von Isomorphismen ist an dieser Stelle nicht praktikabel!

Im sechsten Abschnitt wird der Begriff der sequentiellen Darstellung, wie er für Monopolyide typisch ist, für die Elemente aus $(N_T^F/\sim, \times, \bullet_D)$ konkretisiert. Dasselbe gilt für dazu relevante Begriffe, wie den der Überführbarkeit oder der Substitutionsbasis. Auch werden spezielle symmetrische Substitutionsmengen, wie zum Beispiel Erweiterungen, Kürzungen, Verschmelzungen, Zerlegungen und Überbrückungen auf das Monopolyid $(N_T^F/\sim, \times, \bullet_D)$ bezogen definiert. Dies alles zusammengenommen dient nur dem einzigen Ziel, zum Beweis des ersten und zweiten Hauptsatzes direkt den Satz A2.8.13 bzw. Satz A2.8.11 aus [HÜB95] anwenden zu können.

Für den ersten Hauptsatz geschieht dies im siebten Abschnitt. Dabei besagt dieser Satz im wesentlichen, daß für jede nicht leere Teilmenge $N_T^{1A} \subseteq N_T^F/\sim$ von Äquivalenzklassen einfacher Netzwerke ohne Schlaufen, in denen jedes Subzentrum mindestens einen Ausgang besitzt, das von $N'' := N_T^I \cup N_T^{1A}$ erzeugte Untermonopolyid $\langle N'', \times, \bullet_D \rangle$ ein vollkommenes bzw. Hotz'sches Monopolyid ist. In Bezug auf visuelle Datenflusssprachen stellt dieser Satz kein wesentliches Ergebnis dar. Doch zum einen bestätigt er ein entsprechendes, von G. Hotz formuliertes und in Bezug auf die Schaltkreistheorie bedeutendes Ergebnis und zum anderen zeigt das zu seinem Beweis entwickelte Verfahren eine Methode auf, wie sie für den Beweis des hier wichtigen zweiten Hauptsatzes in erweiterter Form wieder verwendet werden kann. (Eine Zusammenfassung des Beweises zum ersten Hauptsatz findet der Leser im Anschluß an diesen.)

Im achten Abschnitt wird nun endlich der Beweis zum zweiten Hauptsatz geführt. Auf dem Weg dorthin sind jedoch noch einige kleinere Hürden in Form von Sätzen und Hilfssätzen zu überwinden, die dazu dienen, einen bestimmten Faktor in einer sequentiellen Darstellung an das rechte Ende zu verschieben. Geschieht dies in geeigneter Art und Weise bei zwei äquivalenten sequentiellen Darstellungen, so kann eben dieser Faktor abgespalten und mit dem verbleibenden Rest analog verfahren werden. Da dies sehr vereinfacht ausgedrückt ist, sei auch hier auf die, dem Beweis zum zweiten Hauptsatz folgende Zusammenfassung verwiesen. Unterstützend wirken dabei auch die vielen Abbildungen, die die jeweils verwendeten Verfahren illustrieren. Der zweite Hauptsatz schließlich selbst besagt, daß für jede nicht leeren Teilmenge $N_T^{(1)} \subseteq N_T^F/\sim$ von Äquivalenzklassen einfacher Interimknoten oder einfacher Netzwerke mit oder ohne Schlaufen das von $N' := N_T^0 \cup N_T^{(1)}$ erzeugte Untermonopolyid $\langle N', \times, \bullet_D \rangle$ ein α -vollkommenes Monopolyid ist. Im bezug auf die Definition der Semantik visueller

Datenflußsprachen muß dieses Ergebnis wie folgt gedeutet werden: Wird $N_T^{(1)}$ gerade als die Menge einfacher Interimknoten oder einfacher Netzwerke ohne Schleifen definiert, die durch die, dem Anwender einer visuellen Datenflußsprache, im Menü dargebotenen Elementarbausteine festgelegt sind, so ist jedes Datenflußnetzwerk ohne Zykel, das der Anwender aus den Elementarbausteinen erzeugen kann, Element des von $N' := N_T^0 \cup N_T^{(1)}$ erzeugten Untermonopolyids $\langle N', \times, \bullet_D \rangle$. Da letzteres ein α -vollkommenes Monopolyid ist, kann damit jede α -übertragbare Abbildung ϕ' von N' in ein anderes Monopolyid zu genau einem Monopolyiden-Homomorphismus fortgesetzt werden. Umgekehrt bedeutet dies, daß dieser Monopolyiden-Homomorphismus bereits vollständig definiert ist, wenn nur ϕ' definiert ist.

Im letzten Abschnitt wird schließlich darauf eingegangen, wie ϕ' als α -übertragbare Abbildung definiert werden muß, so daß der zugehörige Monopolyiden-Homomorphismus eine sinnvolle Interpretation festlegt. Dazu wird in mehreren Etappen vorgegangen. Da im Fall der Interpretation jedem Datenflußnetzwerk eine Funktion aus dem Monopolyid $(F_\emptyset, \times, \bullet_\emptyset)$ zugeordnet werden soll, wird zuerst ein Monopolyiden-Homomorphismus $\phi'' : (N_T^0, \times, \bullet_D) \rightarrow (F_\emptyset, \times, \bullet_\emptyset)$ definiert, der jedem fast leeren Netzwerk aus N_T^0 auf sinnvolle Art und Weise eine Funktion zuordnet. Die Abbildung $\phi''' : N_T^{(1)} \rightarrow F_\emptyset$ wird dann so definiert, daß jedem einfachen Netzwerk aus $N_T^{(1)}$ gerade die Funktion aus F_\emptyset zugeordnet wird, die durch den Typ des Subzentrums eindeutig festgelegt ist. Im Anschluß daran, wird mit Satz A2.9.17 gezeigt, daß $\phi' := \phi'' \cup \phi'''$ eine α -übertragbare Abbildung mit den gewünschten Eigenschaften ist. Abschließend wird mit dem dritten Hauptsatz (Satz A2.9.19) aufgezeigt, wie ϕ' konstruktiv über eine sequentielle Darstellung der Elemente aus $\langle N', \times, \bullet_D \rangle$ zu einem Monopolyiden-Homomorphismus ϕ fortgesetzt werden kann. Dieser Satz beweist auch, daß der im 1. Kapitel vorgestellte Algorithmus zur Interpretation eines Datenflußnetzwerkes korrekt arbeitet.

A2.1 Allgemeines

In diesem Kapitel werden ausschließlich solche Subzentren-Netzwerke untersucht, die fortlaufend indiziert sind und deren Knoten zusätzlich noch ein Typ zugeordnet ist. Geht man davon aus, daß im Fall von nur fortlaufend indizierten Subzentren-Netzwerken allen Knoten derselbe Typ zugeordnet wird, so gelten alle nachfolgenden Aussagen auch für diese Subzentren-Netzwerke. Aus diesem Grund, werden der Einfachheit halber, nachfolgend die zweifach bewerteten Subzentren-Netzwerke auch nur als fortlaufend indizierte Subzentren-Netzwerke bezeichnet.

An dieser Stelle sei auch explizit noch einmal darauf hingewiesen, daß nach Satz A2.2.11 alle in diesem Kapitel auftretenden Definitionen und Sätze sinngemäß auch für geordnete Subzentren-Netzwerke gelten.

Vergleichbar zu den einfach bewerteten Subzentren-Netzwerken wird ein zweifach bewertetes Subzentren-Netzwerk als ein Tripel $H=(N,\upsilon,\tau)$ notiert, wobei die Abbildung υ die Indizes und die Abbildung τ die Typen zuordnet. In analoger Weise wie bei den einfach bewerteten Subzentren-Netzwerken, werden auch hier die Knoten- und Kantenmengen als $V(H):=V(N)$, $K(H):=K(N)$, usw. definiert.

In einer Menge von fortlaufend indizierten Subzentren-Netzwerken stehen die Typen und Indizes der Knoten meist in besonderer Beziehung zueinander. Dazu folgende Definition:

Definition A2.1.1:

Ein fortlaufend indiziertes Subzentren-Netzwerk $H=(N,\upsilon,\tau)$ heißt **typenindexkonform**, wenn für alle $s,s'\in S(H)$ mit $\tau(s)=\tau(s')$ gilt:

- (1) $|E(H,s)|=|E(H,s')|$ und $|A(H,s)|=|A(H,s')|$.
- (2) $e\in E(H,s)$ und $e'\in E(H,s')$ mit $\upsilon(e)=\upsilon(e') \Rightarrow \tau(e)=\tau(e')$.
- (3) $a\in A(H,s)$ und $a'\in A(H,s')$ mit $\upsilon(a)=\upsilon(a') \Rightarrow \tau(a)=\tau(a')$.

Definition A2.1.3:

Zwei typenindexkonforme Subzentren-Netzwerke $H=(N,\upsilon,\tau)$ und $H'=(N',\upsilon',\tau')$ heißen **zueinander typenindexkonform**, wenn für alle $s\in S(H)$ und $s'\in S(H')$ mit $\tau(s)=\tau'(s')$ gilt:

- (1) $|E(H,s)|=|E(H',s')|$ und $|A(H,s)|=|A(H',s')|$.

(2) $e \in E(H, s)$ und $e' \in E(H', s')$ mit $v(e) = v'(e') \Rightarrow \tau(e) = \tau'(e')$.

(3) $a \in A(H, s)$ und $a' \in A(H', s')$ mit $v(a) = v'(a') \Rightarrow \tau(a) = \tau'(a')$.

Beide Definitionen sind sehr ähnlich und besagen lediglich, daß in den beteiligten Netzwerken die Subzentren mit demselben Typen bzgl. ihrer Ein- und Ausgänge dasselbe Erscheinungsbild zeigen. Vgl. Bild A2.1.

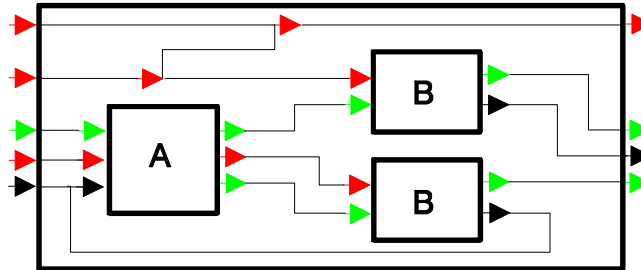


Bild A2.1: Ein formatiertes, typenindexkonformes Subzentren-Netzwerk, wobei die Indizes wie üblich von oben nach unten vergeben sind.

Da in diesem Kapitel isomorphe und äquivalente, fortlaufend indizierte Subzentren-Netzwerke von besonderer Bedeutung sind, seien als nächstes die Definitionen dazu vorangestellt.

Definition A2.1.5:

Zwei fortlaufend indizierte Subzentren-Netzwerke $H=(N, v, \tau)$ und $H'=(N', v', \tau')$ heißen **isomorph**, wenn es einen Isomorphismus $\beta: V(H) \rightarrow V(H')$ gibt, der sowohl bzgl. v als auch τ bewertungserhaltend ist. (β heißt dann ein **bewertungserhaltender Isomorphismus**.)

Definition A2.1.7:

Zwei fortlaufend indizierte Subzentren-Netzwerke $H=(N, v, \tau)$ und $H'=(N', v', \tau')$ heißen **äquivalent** (in Zeichen: $H \sim H'$), wenn N und N' isomorph sind und für den zugehörigen Isomorphismus $\beta: V(N) \rightarrow V(N')$ gilt: $v \in V(N) \Rightarrow \tau(v) = \tau'(\beta(v))$, sowie $v \in EA(N) \Rightarrow v(v) = v'(\beta(v))$. (β heißt dann ein **eingeschränkt bewertungserhaltender Isomorphismus**.)

Das heißt, bei äquivalenten, fortlaufend indizierten Subzentren-Netzwerken werden nur die Indizes aller inneren und äußeren Ein- und Ausgänge berücksichtigt, nicht jedoch die der Subzentren und Interimknoten.

Im nächsten Abschnitt werden nun für fortlaufend indizierte Subzentren-Netzwerke zwei algebraische Operationen definiert, die sich später über die Repräsentanten auf die zugehörigen Isomorphie- bzw. Äquivalenzklassen übertragen lassen.

A2.2 Das parallele und serielle Produkt zweier Subzentren-Netzwerke

Wie bereits angedeutet, lassen sich auf fortlaufend indizierten Subzentren-Netzwerken algebraische Produkte definieren.

Satz und Definition A2.2.1:

Sind $H_1=(N_1, \nu_1, \tau_1)$ und $H_2=(N_2, \nu_2, \tau_2)$ zwei disjunkte, (fortlaufend) indizierte Subzentren-Netzwerke mit $\tau_1:V(N_1)\rightarrow T_1$ bzw. $\tau_2:V(N_2)\rightarrow T_2$ und $H_3=(N_3, \nu_3, \tau_3)$ wie nachfolgend definiert, so ist das **parallele Produkt** $H_1 \times H_2 := H_3$ wieder ein (fortlaufend) indiziertes Subzentren-Netzwerk. (Das Zeichen "x" wird dabei als "über" gelesen.)

$$(1) N_3 := N_1 \cup N_2$$

$$(2) \nu_3:V(N_3)\rightarrow \mathbb{N} \text{ mit}$$

$$\nu_3(v) := \begin{cases} \nu_1(v) & \text{für } v \in V(N_1) \\ \nu_2(v) & \text{für } v \in E(N_2, S) \cup A(N_2, S) \\ \nu_2(v) + \max(\nu_1(S(N_1))) & \text{für } v \in S(N_1) \\ \nu_2(v) + \max(\nu_1(I(N_1))) & \text{für } v \in I(N_1) \\ \nu_2(v) + \max(\nu_1(E(N_1))) & \text{für } v \in E(N_2) \\ \nu_2(v) + \max(\nu_1(A(N_1))) & \text{für } v \in A(N_2) \end{cases} .$$

$$(3) \tau_3:V(N_3)\rightarrow T_1 \cup T_2 \text{ mit } \tau_3(v) := \begin{cases} \tau_1(v) & \text{für } v \in V(N_1) \\ \tau_2(v) & \text{für } v \in V(N_2) \end{cases} .$$

Beweis:

Nach Satz und Definition A2.1.27 ist $N_3 := N_2 \cup N_1$ ein Subzentren-Netzwerk. Es ist leicht zu sehen, daß (N_3, ν_3) (fortlaufend) indiziert ist.

Obwohl die Definition des parallelen Produktes zweier disjunkter, fortlaufend indizierter Subzentren-Netzwerke nicht gerade übersichtlich ist, kann diese Operation dennoch sehr anschaulich dargestellt werden, wie in Bild A2.3 zu sehen ist. Dabei werden die Indizes wieder als von oben nach unten geordnet angenommen und die den Knoten zugewordnen Typen durch verschiedene Farbwerte (Graustufen) repräsentiert.

Satz A2.2.3:

Sind H_1 , H_2 und H_3 drei paarweise disjunkte, (fortlaufend) indizierte Subzentren-Netzwerke, so ist $(H_1 \times H_2) \times H_3 = H_1 \times (H_2 \times H_3)$.

Beweis:

Sei $H_1=(N_1, \upsilon_1, \tau_1)$, $H_2=(N_2, \upsilon_2, \tau_2)$, $H_3=(N_3, \upsilon_3, \tau_3)$, $H_4=(N_4, \upsilon_4, \tau_4) := (H_1 \times H_2) \times H_3$ und $H_5=(N_5, \upsilon_5, \tau_5) := H_1 \times (H_2 \times H_3)$.

Da für die Vereinigung von Mengen das Assoziativgesetz gilt, ist unter Berücksichtigung von Satz und Definition A2.1.27 bzw. Satz A2.2.9 leicht zu sehen, daß $V(N_4)=V(N_5)$ und $K(N_4)=K(N_5)$ ist. $\Rightarrow N_4=N_5$.

Für $i=1,2,3,4,5$ bilden nach Satz A2.1.19 die Mengen $E(N_i)$, $S(N_i)$, $A(N_i)$, $I(N_i)$, $\{E(N_i, s)$ und $A(N_i, s)$ für $s \in S(N_i)\}$ eine Partition von $V(N_i)$. Betrachtet man nun jeweils die Restriktion von υ_i auf eine dieser Partitions Mengen, so ist jede von diesen bzgl. der entsprechenden Restriktion indiziert und nach Satz und Definition A2.1.27 die disjunkte Vereinigung von anderen solchen Mengen. Mit Satz A2.3.19 ist damit $\upsilon_4=\upsilon_5$. Da die Folgerung $\tau_4=\tau_5$ trivial ist, gilt: $H_4=(N_4, \upsilon_4, \tau_4)=(N_5, \upsilon_5, \tau_5)=H_5$.

q.e.d.

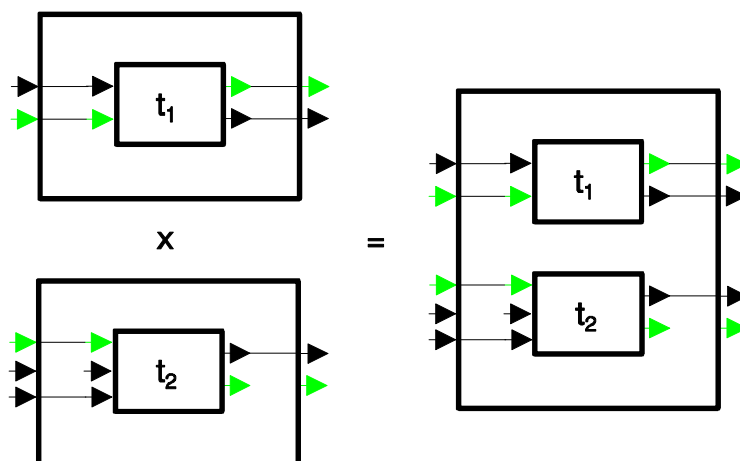


Bild A2.3: Das parallele Produkt zweier fortlaufend indizierter Subzentren-Netzwerke.

Natürlich legt obiger Satz die Vermutung nahe, eine bzgl. des parallelen Produkts abgeschlossene Menge von (fortlaufend) indizierten Subzentren-Netzwerken könnte eine Halbgruppe bilden. Dies ist nicht der Fall! Es läßt sich auch sehr einfach zeigen, daß sie nicht einmal eine partielle Halbgruppe bilden, denn sind auch die Paare (H_1, H_2) und (H_2, H_3) disjunkt, so kann daraus nicht gefolgert werden, daß auch $H_1 \times H_2$ und H_3 disjunkt sind. Im Falle einer partiellen Halbgruppe müßte dies jedoch gelten. Erst die Bildung von Isomorphieklassen schafft hier Abhilfe, wie später gezeigt werden wird.

Bevor als nächstes das serielle Produkt definiert wird, ist der einfacheren Schreibweise wegen, zunächst noch eine andere Definition notwendig.

Definition A2.2.5:

Sind $H_1=(N_1, \nu_1, \tau_1)$ und $H_2=(N_2, \nu_2, \tau_2)$ zwei disjunkte, (fortlaufend) indizierte Subzentren-Netzwerke, dann heißt ein Tupel (a, e) mit $a \in A(N_1)$, $e \in E(N_2)$ und $\nu_1(a) = \nu_2(e)$ eine **virtuelle Verbindungskante von H_1 nach H_2** . Ist $(v_1, a) \in K(N_1)$, $(e, v_2) \in K(N_2)$ und (a, e) eine virtuelle Verbindungskante von H_1 nach H_2 , dann heißt (v_1, v_2) eine **Produktkante von H_1 nach H_2** . $PK(H_1, H_2)$ sei als die Menge aller Produktkanten von H_1 nach H_2 definiert.

Ist (a, e) eine virtuelle Verbindungskante, dann ergibt sich also eine Produktkante genau dann, wenn man einen Vorgänger des äußeren Ausgangs a von N_1 mit einem Nachfolger des äußeren Eingangs e von N_2 verbindet. (Vgl. Bild A2.7)

Satz und Definition A2.2.7:

Sind $H_1=(N_1, \nu_1, \tau_1)$ und $H_2=(N_2, \nu_2, \tau_2)$ zwei disjunkte, (fortlaufend) indizierte Subzentren-Netzwerke mit $\tau_1: V(N_1) \rightarrow T_1$ bzw. $\tau_2: V(N_2) \rightarrow T_2$ und $H_3=(N_3, \nu_3, \tau_3)$ wie nachfolgend definiert, so ist das **serielle Produkt $H_1 \bullet H_2 := H_3$** wieder ein fortlaufend indiziertes Subzentren-Netzwerk. (Das Zeichen " \bullet " wird dabei als "vor" gelesen.)

$$(1) V(N_3) := (V(N_1) \setminus A(N_1)) \cup (V(N_2) \setminus E(N_2))$$

$$(2) E(N_3) := E(N_1), S(N_3) := S(N_1) \cup S(N_2), A(N_3) := A(N_2).$$

$$(3) K(N_3) := (K(N_1) \cup K(N_2)) \cap V(N_3) \times V(N_3) \cup PK(H_1, H_2)$$

$$(4) \nu_3: V(N_3) \rightarrow \mathbb{N} \text{ mit}$$

$$\nu_3(v) := \begin{cases} \nu_1(v) & \text{für } v \in V(N_1) \\ \nu_2(v) & \text{für } v \in A(N_2) \cup E(N_2, S) \cup A(N_2, S) \\ \nu_2(v) + \max(\nu_1(S(N_1))) & \text{für } v \in S(N_2) \\ \nu_2(v) + \max(\nu_1(I(N_1))) & \text{für } v \in I(N_2) \end{cases}.$$

$$(5) \tau_3: V(N_3) \rightarrow T_1 \cup T_2 \text{ mit } \tau_3(v) := \begin{cases} \tau_1(v) & \text{für } v \in V(N_1) \\ \tau_2(v) & \text{für } v \in V(N_2) \end{cases}.$$

Beweis:

Sei N_1' bzw. N_2' das Subzentren-Netzwerk das entsteht, wenn von N_1 bzw. N_2 die Menge der äußeren Ausgänge $A(N_1)$ bzw. der äußeren Eingänge $E(N_2)$ mit anhängenden Kanten entfernt wird. Nach Satz und Definition A2.1.27 ist $N_3' := N_2' \cup N_1'$ ein Subzentren-Netzwerk. N_3 entsteht aus N_3' durch Hinzunahme der

Produktkanten von H_1 nach H_2 und ist damit nach Satz A2.1.29 ebenfalls ein Subzentren-Netzwerk.

Aus (3) folgt unmittelbar:
$$E(N_3, s) = \begin{cases} E(N_1, s) & \text{für } s \in S(N_1) \\ E(N_2, s) & \text{für } s \in S(N_2) \end{cases}'$$

$$A(N_3, s) = \begin{cases} A(N_1, s) & \text{für } s \in S(N_1) \\ A(N_2, s) & \text{für } s \in S(N_2) \end{cases}, \quad E(N_3, S(N_3)) = E(N_1, S(N_1)) \cup E(N_2, S(N_2))$$

und $A(N_3, S(N_3)) = A(N_1, S(N_1)) \cup A(N_2, S(N_2))$. $\Rightarrow I(N_3) = I(N_1) \cup I(N_2)$
nach Satz A2.1.17 und Voraussetzung (2).

Mit Voraussetzung (2) und Satz und Definition A2.3.11 ist damit leicht zu sehen, daß (N_3, ν_3) (fortlaufend) indiziert ist.

q.e.d.

Die Zwischenergebnisse des vorausgegangenen Beweises seien nachfolgend in einem eigenen Satz festgehalten.

Satz A2.2.9:

Sind $H_1 = (N_1, \nu_1, \tau_1)$ und $H_2 = (N_2, \nu_2, \tau_2)$ zwei disjunkte, (fortlaufend) indizierte Subzentren-Netzwerke, dann gilt für das serielle Produkt $H = (N, \nu, \tau) := H_1 \bullet H_2$:

(1) $E(N) = E(N_1)$ und $A(N) = A(N_2)$

(2) $S(N) = S(N_1) \cup S(N_2)$ und $I(N) = I(N_1) \cup I(N_2)$

(3)
$$E(N, s) = \begin{cases} E(N_1, s) & \text{für } s \in S(N_1) \\ E(N_2, s) & \text{für } s \in S(N_2) \end{cases} \quad \text{und} \quad A(N, s) = \begin{cases} A(N_1, s) & \text{für } s \in S(N_1) \\ A(N_2, s) & \text{für } s \in S(N_2) \end{cases}$$

(4) $E(N, S(N)) = E(N_1, S(N_1)) \cup E(N_2, S(N_2))$ und
 $A(N, S(N)) = A(N_1, S(N_1)) \cup A(N_2, S(N_2))$.

Ebenso wie das parallele Produkt, läßt sich das serielle Produkt zweier fortlaufend indizierter Subzentren-Netzwerke graphisch sehr anschaulich darstellen, wie in Bild A2.5 zu sehen ist.

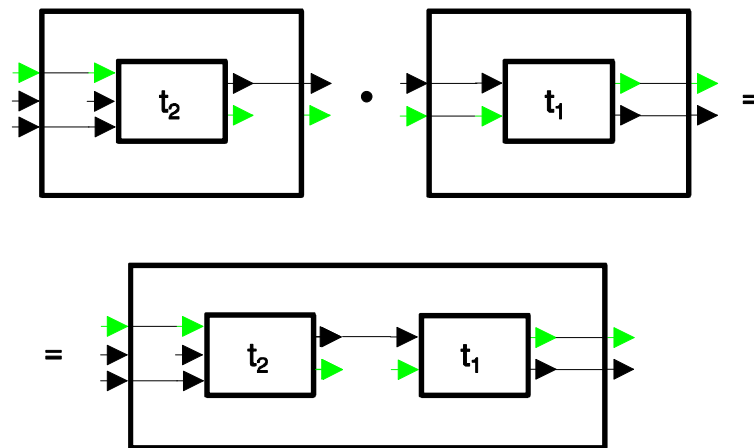


Bild A2.5: Das serielle Produkt zweier fortlaufend indizierter Subzentren-Netzwerke.

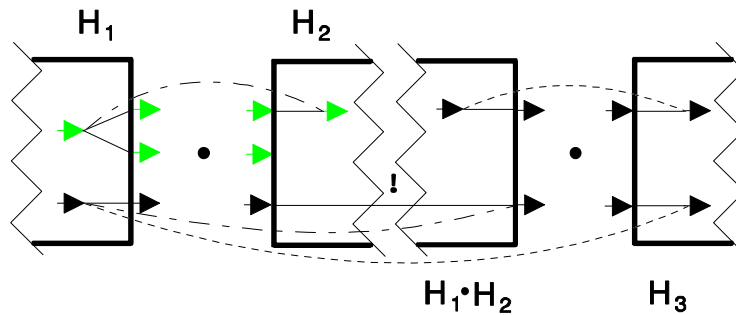


Bild A2.7: Die Produktkanten von H_1 nach H_2 bzw. von $H_1 \cdot H_2$ nach H_3 . (Letztere kurz strichliert.)

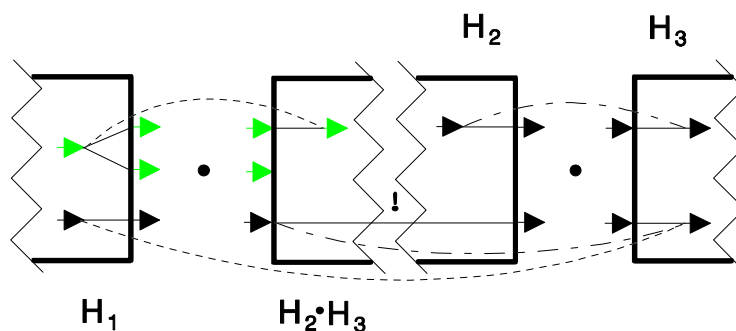


Bild A2.9: Die Produktkanten von H_2 nach H_3 bzw. von H_1 nach $H_2 \cdot H_3$. (Letztere kurz strichliert.)

Um zeigen zu können, daß auch für das serielle Produkt dreier disjunkter, (fortlaufend) indizierter Subzentren-Netzwerke das Assoziativgesetz gilt, ist noch ein kleiner Hilfssatz notwendig.

Hilfssatz A2.2.11:

Sind $H_1=(N_1, \upsilon_1, \tau_1)$, $H_2=(N_2, \upsilon_2, \tau_2)$ und $H_3=(N_3, \upsilon_3, \tau_3)$ drei paarweise disjunkte, (fortlaufend) indizierte Subzentren-Netzwerke und $V_4 := (V(N_1) \cup V(N_2)) \cup V(N_3) \setminus (A(N_1) \cup A(N_2) \cup E(N_2) \cup E(N_3))$, so ist $PK(H_1, H_2) \cap V_4 \times V_4 = PK(H_1 \bullet H_2, H_3) \cap V_4 \times V_4$ und $PK(H_2, H_3) \cap V_4 \times V_4 = PK(H_1, H_2 \bullet H_3) \cap V_4 \times V_4$

Beweis:

Angenommen $\exists (v, v') \in PK(H_1, H_2)$ mit $(v, v') \notin PK(H_1, H_2 \bullet H_3) \Rightarrow v' \in A(N_2)$. Wegen $A(N_2) \cap V_4 = \emptyset \Rightarrow PK(H_1, H_2) \cap V_4 \times V_4 \subseteq PK(H_1, H_2 \bullet H_3) \cap V_4 \times V_4$.

Vollkommen analog folgt: $PK(H_1, H_2 \bullet H_3) \cap V_4 \times V_4 \subseteq PK(H_1, H_2) \cap V_4 \times V_4 \Rightarrow PK(H_1, H_2) \cap V_4 \times V_4 = PK(H_1, H_2 \bullet H_3) \cap V_4 \times V_4$. (Vgl. Bild A2.7.)

Angenommen $\exists (v, v') \in PK(H_2, H_3)$ mit $(v, v') \notin PK(H_1, H_2 \bullet H_3) \Rightarrow v \in E(N_2)$. Wegen $E(N_2) \cap V_4 = \emptyset \Rightarrow PK(H_2, H_3) \cap V_4 \times V_4 \subseteq PK(H_1, H_2 \bullet H_3) \cap V_4 \times V_4$

Analog folgt: $PK(H_1, H_2 \bullet H_3) \cap V_4 \times V_4 \subseteq PK(H_2, H_3) \cap V_4 \times V_4 \Rightarrow PK(H_2, H_3) \cap V_4 \times V_4 = PK(H_1, H_2 \bullet H_3) \cap V_4 \times V_4$. (Vgl. Bild A2.9.)

q.e.d.

Satz A2.2.13:

Sind H_1 , H_2 und H_3 drei paarweise disjunkte, (fortlaufend) indizierte Subzentren-Netzwerke, so ist $(H_1 \bullet H_2) \bullet H_3 = H_1 \bullet (H_2 \bullet H_3)$.

Beweis:

Sei $H_1=(N_1, \upsilon_1, \tau_1)$, $H_2=(N_2, \upsilon_2, \tau_2)$, $H_3=(N_3, \upsilon_3, \tau_3)$, $H=(N, \upsilon, \tau) := H_1 \bullet H_2$, $H_4=(N_4, \upsilon_4, \tau_4) := H \bullet H_3$, $H'=(N', \upsilon', \tau') := H_2 \bullet H_3$ und $H_5=(N_5, \upsilon_5, \tau_5) := H_1 \bullet H'$
 $\Rightarrow H_4=(H_1 \bullet H_2) \bullet H_3$ und $H_5=H_1 \bullet (H_2 \bullet H_3)$.

Nach Satz und Definition A2.2.7 und Satz A2.2.9 gilt: $V(N_4) = (V(N) \setminus A(N)) \cup (V(N_3) \setminus E(N_3)) = ((V(N_1) \setminus A(N_1)) \cup (V(N_2) \setminus E(N_2)) \setminus A(N_2)) \cup (V(N_3) \setminus E(N_3)) = (V(N_1) \cup V(N_2)) \cup V(N_3) \setminus (A(N_1) \cup A(N_2) \cup E(N_2) \cup E(N_3)) = (V(N_1) \setminus A(N_1)) \cup ((V(N_2) \setminus A(N_2)) \cup (V(N_3) \setminus E(N_3))) \setminus E(N_2) = (V(N_1) \setminus A(N_1)) \cup (V(N') \setminus E(N')) = V(N_5)$

Nebenrechnung: $V(N) = (V(N_1) \setminus A(N_1)) \cup (V(N_2) \setminus E(N_2))$ und

$V(N_4) = (V(N_1) \setminus (A(N_1) \cup (V(N_2) \setminus (A(N_2) \cup E(N_2)))) \cup (V(N_3) \setminus E(N_3))$
 $\Rightarrow K(N_1) \cap V(N) \times V(N) = K(N_1) \cap V(N_4) \times V(N_4)$ und $K(N_2) \cap V(N) \times V(N) = K(N_2) \cap V(N_4) \times V(N_4) \Rightarrow (K(N_1) \cup K(N_2)) \cap V(N) \times V(N) = (K(N_1) \cup K(N_2)) \cap V(N_4) \times V(N_4)$

$V(N') = (V(N_2) \setminus A(N_2)) \cup (V(N_3) \setminus E(N_3))$ und $V(N_4) = (V(N_1) \setminus (A(N_1) \cup (V(N_2) \setminus (A(N_2) \cup E(N_2)))) \cup (V(N_3) \setminus E(N_3)) \Rightarrow K(N_2) \cap$

$V(N') \times V(N') = K(N_2) \cap V(N_4) \times V(N_4)$ und $K(N_3) \cap V(N') \times V(N') = K(N_3) \cap V(N_4) \times V(N_4) \Rightarrow (K(N_2) \cup K(N_3)) \cap V(N') \times V(N') = (K(N_1) \cup K(N_2)) \cap V(N_4) \times V(N_4)$

$$\begin{aligned}
K(N_4) &= (K(N) \cup K(N_3)) \cap V(N_4) \times V(N_4) \cup PK(H, H_3) = ((K(N_1) \cup K(N_2)) \cap \\
&V(N) \times V(N) \cup PK(H_1, H_2)) \cup K(N_3) \cup PK(H, H_3) \cap V(N_4) \times V(N_4) = \\
&((K(N_1) \cup K(N_2)) \cap V(N_4) \times V(N_4) \cup PK(H_1, H_2)) \cup K(N_3) \cup PK(H, H_3) \cap \\
&V(N_4) \times V(N_4) = \\
&(K(N_1) \cup K(N_2) \cup K(N_3) \cup PK(H_1, H_2) \cup PK(H, H_3)) \cap V(N_4) \times V(N_4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K(N_5) &= (K(N_1) \cup K(N')) \cap V(N_5) \times V(N_5) \cup PK(H_1, H') = (K(N_1) \cup K(N')) \cap \\
&V(N_4) \times V(N_4) \cup PK(H_1, H') = \\
&(K(N_1) \cup ((K(N_2) \cup K(N_3)) \cap V(N') \times V(N') \cup PK(H_2, H_3)) \cup PK(H_1, H', v')) \cap \\
&V(N_4) \times V(N_4) = \\
&(K(N_1) \cup ((K(N_2) \cup K(N_3)) \cap V(N_4) \times V(N_4) \cup PK(H_2, H_3)) \cup PK(H_1, H', v')) \cap \\
&V(N_4) \times V(N_4) = \\
&(K(N_1) \cup (K(N_2) \cup K(N_3) \cup PK(H_2, H_3) \cup PK(H_1, H')) \cap V(N_4) \times V(N_4)
\end{aligned}$$

Nach Hilfssatz A2.2.11 (1) ist $(PK(H_1, H_2) \cup PK(H_1 \bullet H_2, H_3)) \cap V(N_4) \times V(N_4) = (PK(H_2, H_3) \cup PK(H_1, H_2 \bullet H_3)) \cap V(N_4) \times V(N_4) \Rightarrow$
 $(PK(H_1, H_2) \cup PK(H, H_3)) \cap V(N_4) \times V(N_4) = (PK(H_2, H_3) \cup PK(H_1, H')) \cap V(N_4) \times V(N_4) \Rightarrow K(N_4) = K(N_5)$

Für $i=1,2,3,4,5$ bilden nach Satz A2.1.19 die Mengen $E(N_i)$, $S(N_i)$, $A(N_i)$, $I(N_i)$, $\{E(N_i, s)$ und $A(N_i, s)$ für $s \in S(N_i)\}$ eine Partition von $V(N_i)$. Betrachtet man nun jeweils die Restriktion von v_i auf eine dieser Partitions Mengen, so ist jede von diesen bzgl. der entsprechenden Restriktion indiziert und Satz A2.2.9 die disjunkte Vereinigung von anderen solchen Mengen. Mit Satz A2.3.19 ist damit $v_4 = v_5$. Da die Folgerung $\tau_4 = \tau_5$ trivial ist, gilt: $H_4 = (N_4, v_4, \tau_4) = (N_5, v_5, \tau_5) = H_5$.

q.e.d.

Der Beweis zu vorangegangenen Satz kann auch sehr leicht anschaulich an Hand einer graphischen Darstellung nachvollzogen werden.

Leider gilt für die Operationen " \times " und " \bullet " nicht das Distributivgesetz für Monopolyide, d.h. $(H_1 \times H_2) \bullet (H_3 \times H_4) \neq (H_1 \bullet H_3) \times (H_2 \bullet H_4)$. Jedoch kann man eine abgeschwächte Version dieses Gesetzes beweisen, in dem man statt der Äquivalenzrelation "=" auf die Äquivalenzrelation "~" zurückgreift.

Hilfssatz A2.2.15:

Sind $H_1 = (N_1, v_1, \tau_1)$, $H_2 = (N_2, v_2, \tau_2)$, $H_3 = (N_3, v_3, \tau_3)$ und $H_4 = (N_4, v_4, \tau_4)$ vier paarweise disjunkte, (fortlaufend) indizierte Subzentren-Netzwerke und $\max(v_1(A(N_1))) = \max(v_2(E(N_2)))$ mit $\max(\emptyset) := 0$, so ist $PK(H_1 \times H_3, H_2 \times H_4) = PK(H_1, H_2) \cup PK(H_3, H_4)$.

Beweis:

Sei $H=(N,\nu,\tau):=H_1 \times H_3$ und $H'=(N',\nu',\tau'):=H_2 \times H_4 \Rightarrow$ Nach Satz und Definition A2.1.27 ist $V(N)=V(N_1) \cup V(N_3)$, $A(N)=A(N_1) \cup A(N_3)$ und $K(N)=K(N_1) \cup K(N_3)$, sowie $V(N')=V(N_2) \cup V(N_4)$, $E(N')=E(N_2) \cup E(N_4)$ und $K(N')=K(N_2) \cup K(N_4)$.

Außerdem ist $\nu(a) := \begin{cases} \nu_1(a) \text{ für } a \in A(N_1) \\ \nu_3(a) + \max(\nu_1(A(N_1))) \text{ für } a \in A(N_3) \end{cases}$ für

$a \in A(N_1) \cup A(N_3)$ und für $e \in E(N_2) \cup E(N_4)$

$\nu'(e) := \begin{cases} \nu_2(e) \text{ für } e \in E(N_2) \\ \nu_4(e) + \max(\nu_2(E(N_2))) \text{ für } e \in E(N_4) \end{cases} \Rightarrow$ Ist $\nu(a) = \nu'(e)$, so ist

entweder ($a \in A(N_1)$ und $e \in E(N_2)$) oder ($a \in A(N_3)$ und $e \in E(N_4)$), da nach Voraussetzung $\max(\nu_1(A(N_1))) = \max(\nu_2(E(N_2)))$.

$PK(H_1 \times H_3, H_2 \times H_4) = PK(H \times H') = \{(v, v') \in V(N) \times V(N') : \exists a \in A(N) : (v, a) \in K(N), \exists e \in E(N') : (e, v') \in K(N') \text{ und } \nu(a) = \nu'(e)\} = \{(v, v') \in (V(N_1) \cup V(N_3)) \times (V(N_2) \cup V(N_4)) : \exists a \in A(N_1) \cup A(N_3) : (v, a) \in K(N_1) \cup K(N_3),$

$\exists e \in E(N_2) \cup E(N_4) : (e, v') \in K(N_2) \cup K(N_4) \text{ und } \nu(a) = \nu'(e)\} =$

$\{(v, v') \in (V(N_1) \cup V(N_3)) \times (V(N_2) \cup V(N_4)) : \exists a \in A(N_1) : (v, a) \in K(N_1) \cup$

$K(N_3), \exists e \in E(N_2) : (e, v') \in K(N_2) \cup K(N_4) \text{ und } \nu(a) = \nu_1(a) = \nu_2(e) = \nu'(e)\}$

$\cup \{(v, v') \in (V(N_1) \cup V(N_3)) \times (V(N_2) \cup V(N_4)) : \exists a \in A(N_3) : (v, a) \in K(N_1) \cup K(N_3), \exists e \in E(N_4) : (e, v') \in K(N_2) \cup K(N_4) \text{ und } \nu(a) = \nu_3(a) = \nu_4(e) = \nu'(e)\}$

$= \{(v, v') \in (V(N_1) \cup V(N_3)) \times (V(N_2) \cup V(N_4)) : \exists a \in A(N_1) : (v, a) \in K(N_1), \exists e \in E(N_2) : (e, v') \in K(N_2) \text{ und } \nu_1(a) = \nu_2(e)\} \cup \{(v, v') \in (V(N_1) \cup$

$V(N_3)) \times (V(N_2) \cup V(N_4)) : \exists a \in A(N_3) : (v, a) \in K(N_3), \exists e \in E(N_4) :$

$(e, v') \in K(N_4) \text{ und } \nu_3(a) = \nu_4(e)\} =$

$\{(v, v') \in V(N_1) \times V(N_2) : \exists a \in A(N_1) : (v, a) \in K(N_1), \exists e \in E(N_2) : (e, v') \in K(N_2) \text{ und } \nu_1(a) = \nu_2(e)\} \cup \{(v, v') \in V(N_3) \times V(N_4) : \exists a \in A(N_3) : (v, a) \in K(N_3), \exists e \in E(N_4) : (e, v') \in K(N_4) \text{ und } \nu_3(a) = \nu_4(e)\} =$

$PK(H_1, H_2) \cup PK(H_3, H_4)$

q.e.d.

Satz A2.2.17:

Sind H_1, H_2, H_3 und H_4 vier paarweise disjunkte, (fortlaufend) indizierte Subzentren-Netzwerke und $\max(\nu_1(A(N_1))) = \max(\nu_2(E(N_2)))$, so ist $(H_1 \bullet H_2) \times (H_3 \bullet H_4) \sim (H_1 \times H_3) \bullet (H_2 \times H_4)$.

Beweis:

Sei $H_1 := (N_1, \nu_1, \tau_1)$, $H_2 := (N_2, \nu_2, \tau_2)$, $H_3 := (N_3, \nu_3, \tau_3)$, und

$H_4 := (N_4, \nu_4, \tau_4)$. Definiere $H_5 = (N_5, \nu_5, \tau_5) := (H_1 \bullet H_2) \times (H_3 \bullet H_4)$,

$H_6 = (N_6, \nu_6, \tau_6) := (H_1 \times H_3) \bullet (H_2 \times H_4)$, $H_1' = (N_1', \nu_1', \tau_1') := H_1 \times H_3$,

$H_2' = (N_2', \nu_2', \tau_2') := H_2 \times H_4$, $H_1'' = (N_1'', \nu_1'', \tau_1'') := H_1 \bullet H_2$ und

$H_3'' = (N_3'', \nu_3'', \tau_3'') := H_3 \bullet H_4$.

Zeige $N_5 = N_6$ und die Identität ist der gesuchte Isomorphismus. Gehe dazu analog wie in Beweis von Satz A2.2.13 vor.

$$\begin{aligned} V(N_6) &= (V(N_1') \cup V(N_2')) \setminus (A(N_1') \cup E(N_2')) = ((V(N_1) \cup V(N_3)) \cup (V(N_2) \cup \\ &V(N_4)) \setminus (A(N_1) \cup A(N_3) \cup E(N_2) \cup E(N_4))) = \\ &((V(N_1) \cup V(N_2)) \setminus (A(N_1) \cup E(N_2))) \cup ((V(N_3) \cup V(N_4)) \setminus (A(N_3) \cup \\ &E(N_4))) = V(N_1'') \cup V(N_3'') = V(N_5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K(N_6) &= (K(N_1') \cup K(N_2') \cup PK(H_1', H_2')) \cap V(N_6) \times V(N_6) = \\ &(K(N_1') \cup K(N_2')) \cap V(N_6) \times V(N_6) \cup PK(H_1', H_2') = \\ &= (K(N_1) \cup K(N_3) \cup K(N_2) \cup K(N_4)) \cap V(N_6) \times V(N_6) \cup PK(H_1, H_2) \cup PK(H_3, H_4) = \\ &(K(N_1) \cup K(N_2)) \cap V(N_6) \times V(N_6) \cup PK(H_1, H_2) \cup ((K(N_3) \cup K(N_4)) \cap V(N_6) \times V(N_6)) \\ &\cup PK(H_3, H_4) = \\ &(K(N_1) \cup K(N_2)) \cap V(N_1'') \times V(N_1'') \cup PK(H_1, H_2) \cup ((K(N_3) \cup K(N_4)) \cap \\ &V(N_3'') \times V(N_3'')) \cup PK(H_3, H_4) = K(N_1'') \cup K(N_3'') = K(N_5) \end{aligned}$$

Wegen $E(N_5) = E(N_6)$, $S(N_5) = S(N_6)$ und $A(N_5) = A(N_6) \Rightarrow N_5 = N_6$.

Es ist leicht zu sehen, daß die Restriktionen von ν_6 und ν_5 auf den Mengen der inneren und äußeren Ein- und Ausgänge identisch sind. $\Rightarrow H_5 = (N_5, \nu_5, \tau_5) \sim (N_6, \nu_6, \tau_6) = H_6$.

q.e.d.

Man kann ohne Probleme feststellen, daß die Indizes der Subzentren für beide Produkte verschieden sind und somit die völlige Gleichheit im allgemeinen ausgeschlossen ist.

Abschließend soll noch kurz auf einige Eigenschaften eingegangen werden, die bei der Bildung des parallelen bzw. seriellen Produkts erhalten bleiben.

Satz A2.2.19:

Sind $H_1 = (N_1, \nu_1, \tau_1)$ und $H_2 = (N_2, \nu_2, \tau_2)$ zwei disjunkte, (fortlaufend) indizierte Subzentren-Netzwerke mit der Eigenschaft "gepackt" bzw. "zykelfrei" bzw. "ohne Verzweigungen" bzw. "ohne Verjüngungen" bzw. "ohne freie Eingänge" bzw. "ohne freie Ausgänge", so besitzen auch $H_1 \times H_2$ und $H_1 \bullet H_2$ diese Eigenschaft.

Beweis:

Sei $H = (N, \nu, \tau) := (N_1, \nu_1, \tau_1) \times (N_2, \nu_2, \tau_2)$ bzw. $H' = (N', \nu', \tau') := (N_1, \nu_1, \tau_1) \bullet (N_2, \nu_2, \tau_2)$

- "gepackt": $\Rightarrow I(N_1) = \emptyset = I(N_2) \Rightarrow I(N) = \emptyset = I(N') \Rightarrow N$ und N' sind gepackt.
- "zykelfrei": Angenommen es gibt in N einen Zykel Z , so ist dieser ganz in N_1 oder N_2 enthalten, da $K(N) \cap V(N_1) \times V(N_2) = \emptyset$ und $K(N) \cap V(N_2) \times V(N_1) = \emptyset$. Dies ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung. $\Rightarrow N$ ist zyklfrei.
Angenommen es gibt in N' einen Zykel Z , so ist dieser ganz

in N_1 oder N_2 enthalten, da $K(N') \cap V(N_2) \times V(N_1) = \emptyset$ und Z mit einer Kante aus $V(N_1) \times V(N_2)$ auch eine Kante aus $V(N_2) \times V(N_1)$ enthalten müßte. Analog wie eben folgt damit ein Widerspruch zur Voraussetzung. $\Rightarrow N'$ ist zykliefrei.

c) "ohne Verzweigungen" bzw. "ohne Verjüngungen":

Da $K(N) \cap V(N_2) \times V(N_1) = \emptyset$ und $K(N) \cap V(N_1) \times V(N_2) = \emptyset$ muß auch N ohne Verzweigungen bzw. ohne Verjüngungen sein.

Angenommen es gibt in N' eine Verzweigung am Knoten v , so gibt es eine Produktkante $(v, v') \in V(N_1) \times V(N_2)$. Zu dieser existiert dann eine Kante $(v, a) \in V(N_1) \times V(N_1)$ und eine virtuelle Verbindungskante (a, e) . Damit wäre v auch eine Verzweigung in N_1 . $\Rightarrow N'$ ist ohne Verzweigungen.

Analog folgt: N' ist ohne Verjüngungen.

d) "ohne freie Eingänge" bzw. "ohne freie Ausgänge":

Da $K(N) \cap V(N_2) \times V(N_1) = \emptyset$ und $K(N) \cap V(N_1) \times V(N_2) = \emptyset$ muß auch N ohne freie Eingänge bzw. ohne freie Ausgänge sein.

Angenommen es gibt in N' einen freien Eingang v . Da $E(N') = E(N_1)$ muß es in N_1 eine Kante (v, a) geben und da v in N' ein freier Eingang ist, muß eine virtuelle Verbindungskante (a, e) existieren, wobei e in N_2 keinen Nachfolger besitzen darf. $\Rightarrow e \in E(N_2)$ ist ein freier Eingang. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung. $\Rightarrow N'$ ist ohne freie Eingänge.

Analog zeigt man, daß N' ohne Verjüngungen ist.

q.e.d.

Im nächsten Abschnitt sollen nun die vorangegangenen Definitionen und Sätze dazu verwendet werden, Isomorphie- bzw. Äquivalenzklassen von fortlaufend indizierten Subzentren-Netzwerken genauer zu untersuchen.

A2.3 Das natürliche Monopolyid der Äquivalenzklassen

Im allgemeinen ist bei einem konkreten Subzentren-Netzwerk nicht interessant aus welcher Knotenmenge es sich zusammensetzt, sondern vielmehr, welche Struktur es besitzt bzw. zu welcher Isomorphieklasse es gehört. Nachfolgend werden Isomorphie- und Äquivalenzklassen von fortlaufend indizierten Subzentren-Netzwerken mit einer festen Menge T von Typen genauer untersucht. Dazu werden die wichtigsten Definitionen und Sätze über Monopolyide als bekannt vorausgesetzt. Als alternative Lösung bietet sich aber auch an, diese bei Bedarf im Anhang oder in [HÜB95] nachzuschlagen.

Definition A2.3.1:

Ist T eine Menge von Typen, dann bezeichne N_T die Menge aller Isomorphieklassen von fortlaufend indizierten Subzentren-Netzwerken. Ist $H=(N,\nu,\tau)$ mit $\tau:V(N)\rightarrow T$, so bezeichne (H) die zu H gehörende **Isomorphieklasse**. Ist $H'\in(H)$, dann heißt H' ein **Repräsentant von (H)** .

Obwohl es vom Standpunkt der Mengenlehre gesehen etwas kritisch ist, von der "Menge aller Isomorphieklassen" zu sprechen, so können diese Bedenken jedoch mit Satz A2.2.7 entkräftet werden, da es danach zu jeder Isomorphieklasse einen eindeutig definierbaren Repräsentanten mit einer Knotenmenge aus $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ gibt.

Um eine geeignete Vorstellung von Isomorphieklassen von Subzentren-Netzwerken zu haben, sollte man sich klar machen, daß alle Abbildungen in dieser Publikation, die ein Subzentren-Netzwerk zeigen, eigentlich die Isomorphieklasse des zugehörigen Subzentren-Netzwerks zeigen, da dabei die originale Knotenmenge nie dargestellt wurde. Umgekehrt kann also jede Isomorphieklasse durch die graphische Darstellung eines Repräsentanten visualisiert werden.

Als nächstes werden nun das parallele und das serielle Produkt über die Repräsentanten auf die Menge N_T übertragen.

Definition und Satz A2.3.3:

Sind H_1 und H_2 zwei disjunkte Repräsentanten der Isomorphieklassen (H_1) und (H_2) aus N_T und das parallele Produkt " \times " definiert durch $(H_1)\times(H_2):=(H_1\times H_2)$, so ist (N_T,\times) ein Monoid mit dem leeren Netzwerk als Neutralelement 0.

Beweis:

Zunächst ist die Wohldefiniertheit der Operation " \times " zu zeigen. Das heißt, sind H_1' und H_1' zwei andere disjunkte Repräsentanten, so ist $(H_1' \times H_2') = (H_1 \times H_2)$.

Sei $H_1 = (N_1, \nu_1, \tau_1)$, $H_2 = (N_2, \nu_2, \tau_2)$, $H_1' = (N_1', \nu_1', \tau_1') \in (H_1)$ und $H_2' = (N_2', \nu_2', \tau_2') \in (H_2)$. \Rightarrow Es existiert je ein bewertungserhaltender Isomorphismus $\beta_1: V(N_1) \rightarrow V(N_1')$ bzw. $\beta_2: V(N_2) \rightarrow V(N_2')$. Da $V(N_1)$ und $V(N_2)$, sowie $V(N_1')$ und $V(N_2')$ disjunkt sind, ist $\beta_1 \cup \beta_2: V(N_1) \cup V(N_2) \rightarrow V(N_1') \cup V(N_2')$ ein bewertungserhaltender Isomorphismus von $H_1 \times H_2$ nach $H_1' \times H_2'$. $\Rightarrow (H_1' \times H_2') = (H_1 \times H_2)$.

Da es zu je zwei Isomorphieklassen disjunkte Repräsentanten gibt, gilt für die Operation " \times " nach Satz A2.2.3 das Assoziativgesetz. $\Rightarrow (N_T, \times)$ ist eine Halbgruppe. Es ist außerdem leicht einzusehen, daß das leere Netzwerk das Neutralelement bzgl. " \times " bildet und (N_T, \times) somit ein Monoid ist.

q.e.d.

Bevor eine entsprechende Aussage für das serielle Produkt gemacht werden kann, müssen vorher noch die entsprechenden Neutralelemente dazu definiert werden.

Definition A2.3.5:

Ist $H = (N, \nu, \tau)$ ein fast leeres Netzwerk ohne Verzweigungen, ohne Verjüngungen und ohne freie äußere Ein- oder Ausgänge, dann heißt H eine **Permutation**, falls für jede Kante $(e, a) \in K(N)$ $\tau(e) = \tau(a)$ ist. Ist darüber hinaus für jede Kante $(e, a) \in K(N)$ $\nu(e) = \nu(a)$, dann heißt H eine **Identität**. Ist τ eine Abbildung in die Menge T , dann heißt die Isomorphieklasse (H) aus N_T entsprechend eine **Permutation** oder **Identität**, wenn H eine Permutation oder Identität ist. N_T^P bzw. N_T^I bezeichne die Menge aller Permutationen bzw. Identitäten aus N_T . Allgemein bezeichne N_T^0 die Menge aller Isomorphieklassen aus N_T , deren Repräsentanten fast leere Netzwerke sind und in denen für jede Kante (e, a) $\tau(e) = \tau(a)$ gilt.

Es ist klar, daß es in einer Permutation oder Identität nur Kanten von äußeren Eingängen zu äußeren Ausgängen geben kann und die Anzahl der äußeren Eingänge gleich der der äußeren Ausgänge sein muß. (Vergleiche Bild A2.11.) Nach dieser Definition stellt auch das leere Netzwerk eine Identität dar.

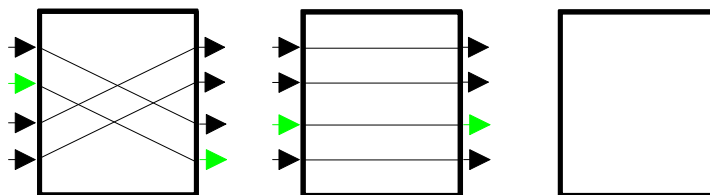


Bild A2.11: Eine Permutation (links) und zwei Identitäten.

Definition A2.3.7:

Ist $H=(N,\upsilon,\tau)$ ein fortlaufend indiziertes Subzentren-Netzwerk mit $\tau:V(N)\rightarrow T$ und (T^*,\cdot) das freie Monoid über T , dann heißt der Vektor $\vec{E}(H)\in T^*$ bzw. $\vec{A}(H)\in T^*$ der **Typeneingangs-** bzw. **Typenausgangsvektor** von H , wenn für die i -te Komponente dieses Vektors gilt:

$\exists v\in E(N)$ mit $\upsilon(v)=i$ und $(\vec{E}(H))_i=\tau(v)$ bzw. $\exists v\in A(N)$ mit $\upsilon(v)=i$ und $(\vec{A}(H))_i=\tau(v)$.

Den Typeneingangs- bzw. Typenausgangsvektor eines fortlaufend indizierten Subzentren-Netzwerkes erhält man also auf einfache Art und Weise in dem man der Reihe nach die Typen der Ein- bzw. Ausgänge zu einem Vektor zusammenfaßt. Entsprechend erhält man den leeren Vektor λ , wenn $E(N)=\emptyset$ bzw. $A(N)=\emptyset$ ist.

Satz A2.3.9:

Eine Identität $[I]$ ist durch Typeneingangsvektor $\vec{E}(I)$ bzw. Typenausgangsvektor $\vec{A}(I)$ eindeutig bestimmt.

Beweis:

Der Typeneingangsvektor bzw. Typenausgangsvektor legt sowohl die Anzahl der äußeren Ein- bzw. Ausgänge von $[I]$ als auch deren Indizes und Typen fest. Da $[I]$ eine Identität ist, sind damit auch die Kanten von $[I]$ festgelegt und $[I]$ somit eindeutig definiert.

q.e.d.

Man beachte bei der nächsten Definition den feinen aber wesentlichen Unterschied, daß das serielle Produkt " \bullet " für zwei Repräsentanten H_1 und H_2 bereits dann definiert ist, wenn sie disjunkte Knotenmengen besitzen; das serielle Produkt " \bullet " der zugehörigen Isomorphieklassen dagegen ist nur dann definiert, wenn $\vec{A}(H_1)=\vec{E}(H_2)$ ist.

Definition und Satz A2.3.11:

Sind H_1 und H_2 zwei disjunkte Repräsentanten der Isomorphieklassen (H_1) und (H_2) aus N_T mit $\bar{A}(H_1) = \bar{E}(H_2)$ und das serielle Produkt " \bullet " definiert durch $(H_1) \bullet (H_2) := (H_1 \bullet H_2)$, so ist (N_T, \bullet_D) mit $D := \{(H), (H')\} : \bar{A}(H) = \bar{E}(H')\}$ ein Polyid, wobei für $(H) \in N_T$ die linksseitige Identität $l_1((H))$ durch den Typeneingangsvektor $\bar{E}(H)$ und die rechtsseitige Identität $l_r((H))$ durch den Typenausgangsvektor $\bar{A}(H)$ eindeutig bestimmt ist.

Beweis:

Die Menge D ist wohldefiniert, da je zwei Repräsentanten einer Isomorphieklasse bewertungserhaltend isomorph sind und somit die Typeneingangs- bzw. Typenausgangsvektoren übereinstimmen.

Zu zeigen ist auch, daß die Operation " \bullet " wohldefiniert ist. Das heißt, sind H_1' und H_1'' zwei andere disjunkte Repräsentanten, so ist $(H_1' \bullet H_2') = (H_1'' \bullet H_2')$.

Sei $H_1 = (N_1, \nu_1, \tau_1)$, $H_2 = (N_2, \nu_2, \tau_2)$, $H_1' = (N_1', \nu_1', \tau_1') \in (H_1)$ und $H_2' = (N_2', \nu_2', \tau_2') \in (H_2)$. \Rightarrow Es existiert je ein bewertungserhaltender Isomorphismus $\beta_1: V(N_1) \rightarrow V(N_1')$ bzw. $\beta_2: V(N_2) \rightarrow V(N_2')$. Da $V(N_1)$ und $V(N_2)$, sowie $V(N_1')$ und $V(N_2')$ disjunkt sind, sind auch die Mengen $V_1 := V(N_1) \setminus A(N_1)$ und $V_2 := V(N_2) \setminus A(N_2)$ bzw. $V_1' := V(N_1') \setminus A(N_1')$ und $V_2' := V(N_2') \setminus A(N_2')$ disjunkt. Damit bildet die Vereinigung der Restriktionen $\beta_1|_{V_1} \cup \beta_2|_{V_2}: V_1 \cup V_2 \rightarrow V_1' \cup V_2'$ einen bewertungserhaltenden Isomorphismus von $H_1 \bullet H_2$ nach $H_1' \bullet H_2'$. $\Rightarrow (H_1' \bullet H_2') = (H_1 \bullet H_2)$.

Da $\bar{A}(H_1 \bullet H_2) = \bar{A}(H_2)$ und $\bar{E}(H_1 \bullet H_2) = \bar{E}(H_1)$ ist, gilt:

$(H_1, H_2), (H_2, H_3) \in D \Leftrightarrow \bar{A}(H_1) = \bar{E}(H_2)$ und $\bar{A}(H_2) = \bar{E}(H_3) \Leftrightarrow \bar{A}(H_1) = \bar{E}(H_2)$ und $\bar{A}(H_1 \bullet H_2) = \bar{E}(H_3) \Leftrightarrow (H_1, H_2), (H_1 \bullet H_2, H_3) \in D$. Analog ist $(H_1, H_2), (H_2, H_3) \in D \Leftrightarrow (H_2, H_3), (H_1, H_2 \bullet H_3) \in D$.

Da es zu je zwei Isomorphieklassen disjunkte Repräsentanten gibt, gilt für die Operation " \bullet " nach Satz A2.2.13 das Assoziativgesetz. $\Rightarrow (N_T, \bullet_D)$ ist eine partielle Halbgruppe. Da eine oben definierte Identität (als Isomorphieklasse) durch den Typeneingangs- bzw. Typenausgangsvektor eindeutig festgelegt ist, ist leicht einzusehen, daß die Identitäten die Neutralelemente bzgl. der Operation " \bullet " sind und zu jeder Isomorphieklasse aus N_T eine links- bzw. rechtsseitige Identität existiert, die nach Satz A2.3.9 durch den Typeneingangs- bzw. Typenausgangsvektor eindeutig bestimmt ist.

$\Rightarrow (N_T, \bullet_D)$ ist ein Polyid.

q.e.d.

Bei den weiteren Untersuchungen spielen die Isomorphieklassen allerdings nur eine untergeordnete Rolle. Weit interessanter sind bestimmte Äquivalenzklassen von Isomorphieklassen. Dazu

wird die Definition der Äquivalenz zweier fortlaufend indizierter Subzentren-Netzwerke über die Repräsentanten auf die Isomorphieklassen übertragen.

Definition A2.3.13:

Ist T eine Menge von Typen, dann heißen zwei Isomorphieklassen (H_1) und (H_2) aus N_T **äquivalent** (in Zeichen $(H_1) \sim (H_2)$), wenn die zugehörigen Repräsentanten H_1 und H_2 äquivalent sind. (Vgl. Definition A2.1.7)

Satz und Definition A2.3.15:

Die Relation " \sim " definiert auf N_T eine Äquivalenzrelation. Damit bezeichne N_T/\sim die durch " \sim " definierte Quotientenmenge von N_T und $[H]$ die zu (H) gehörende **Äquivalenzklasse**. H heißt dann ein **Repräsentant** von $[H]$.

Beweis:

Natürlich ist die Relation " \sim " reflexiv. " \sim " ist symmetrisch, da ein eingeschränkt bewertungserhaltender Isomorphismus bijektiv ist und " \sim " ist transitiv, da die Hintereinanderausführung zweier eingeschränkt bewertungserhaltender Isomorphismen wieder ein eingeschränkt bewertungserhaltender Isomorphismus ist. \Rightarrow " \sim " ist eine Äquivalenzrelation auf N_T .

q.e.d.

Zu einer Äquivalenzklasse aus N_T/\sim sind also gerade solche Isomorphieklassen zusammengefaßt, die sich nur in den Indizes der Subzentren und Interimknoten unterscheiden. Man kann eine solche Äquivalenzklasse also eineindeutig mit der graphischen Darstellung eines Repräsentanten assoziieren, bei dem die Indizes der Subzentren und Interimknoten unterschlagen werden.

Für ein fast leeres Netzwerk sind die zugehörige Isomorphie- und Äquivalenzklasse identisch; wie folgender Satz zeigt:

Hilfssatz A2.3.17:

Ist H ein fast leeres Netzwerk, so ist die Isomorphieklasse (H) identisch zur Äquivalenzklasse $[H]$. Insbesondere ist damit $N_T^0 = N_T^0/\sim$, $N_T^P = N_T^P/\sim$ und $N_T^I = N_T^I/\sim$.

Beweis:

Angenommen $H=(N, \upsilon, \tau)$ besitzt keine Subzentren und keine Interimknoten, so besitzt jedes $H'=(N', \upsilon', \tau') \in [H]$ ebenfalls

kein Subzentrum und keinen Interimknoten, da N und N' isomorph sind. Damit ist aber auch jeder eingeschränkt bewertungserhaltende Isomorphismus von H nach H' ein bewertungserhaltender Isomorphismus. $\Rightarrow H' \in (H) \Rightarrow [H] \subseteq (H)$. Umgekehrt gilt trivialerweise $(H) \subseteq [H]$. $\Rightarrow [H] = (H) \Rightarrow$ Behauptung.

q.e.d.

Als nächstes werden nun das parallele und das serielle Produkt über die Repräsentanten auf die Menge N_T/\sim der Äquivalenzklassen übertragen.

Definition und Satz A2.3.19:

Sind H_1 und H_2 zwei disjunkte Repräsentanten der Äquivalenzklassen $[H_1]$ und $[H_2]$ aus N_T/\sim und das parallele Produkt " \times " definiert durch $[H_1] \times [H_2] := [H_1 \times H_2]$, so ist $(N_T/\sim, \times)$ ein Monoid mit dem leeren Netzwerk als Neutralelement 0.

Beweis:

Analog zu Definition und Satz A2.3.3.

Definition und Satz A2.3.21:

Sind H_1 und H_2 zwei disjunkte Repräsentanten der Äquivalenzklassen $[H_1]$ und $[H_2]$ aus N_T/\sim mit $\bar{A}(H_1) = \bar{E}(H_2)$ und das serielle Produkt " \bullet " definiert durch $[H_1] \bullet [H_2] := [H_1 \bullet H_2]$, so ist $(N_T/\sim, \bullet_D)$ mit $D := \{([H], [H']) : \bar{A}(H) = \bar{E}(H')\}$ ein Polyid, wobei die obig definierten Identitäten die Neutralelemente bilden, d.h. $1_{N_T/\sim} = N_T^I$.

Beweis:

Analog zu Definition und Satz A2.3.11 unter Verwendung von Hilfssatz A2.3.17.

Damit gelangt man zu dem einfachen, aber wichtigen Satz:

Satz A2.3.23:

$(N_T/\sim, \times, \bullet_D)$ ist ein Monopolyid.

Beweis:

Nach Definition und Satz A2.3.19 ist $(N_T/\sim, \times)$ ein Monoid und nach Definition und Satz A2.3.21 ist $(N_T/\sim, \bullet_D)$ ein Polyid.

Zeige daß $(N_T/\sim, \times, \bullet_D)$ die Bedingungen (1)-(4) von Definition A2.1.16 aus [HÜB95] erfüllt.

- 1) Das leere Netzwerk 0 ist eine Identität nach Definition A2.3.5.
- 2) Es ist leicht einzusehen, daß das parallele Produkt zweier Identitäten wieder eine Identität ist.
- 3) Seien $H_1=(N_1, \upsilon_1, \tau_1)$, $H_2=(N_2, \upsilon_2, \tau_2)$, $H_3=(N_3, \upsilon_3, \tau_3)$ und $H_4=(N_4, \upsilon_4, \tau_4)$ vier disjunkte Repräsentanten der Äquivalenzklassen $[H_1], [H_2], [H_3]$ und $[H_4]$ und $([H_1], [H_2]), ([H_3], [H_4]), ([H_1] \times [H_3], [H_2] \times [H_4]) \in D. \Rightarrow$
 $\bar{A}(H_1) = \bar{E}(H_2) \Rightarrow \max(\upsilon_1(A(N_1))) = \max(\upsilon_2(E(N_2))) \Rightarrow$
 $(H_1 \bullet H_2) \times (H_3 \bullet H_4) \sim (H_1 \times H_3) \bullet (H_2 \times H_4)$ nach Satz A2.2.17. \Rightarrow
 $[(H_1 \bullet H_2) \times (H_3 \bullet H_4)] = [(H_1 \times H_3) \bullet (H_2 \times H_4)] \Rightarrow$
 $([H_1] \bullet [H_2]) \times ([H_3] \bullet [H_4]) = ([H_1] \times [H_3]) \bullet ([H_2] \times [H_4])$
- 4) $([H_1], [H_2]), ([H_3], [H_4]) \in D. \Rightarrow \bar{A}(H_1) = \bar{E}(H_2)$ und $\bar{A}(H_3) = \bar{E}(H_4)$
 $\Rightarrow \bar{A}(H_1) \bullet \bar{A}(H_3) = \bar{E}(H_2) \bullet \bar{E}(H_4) \Rightarrow ([H_1] \times [H_3], [H_2] \times [H_4]) \in D.$

q.e.d.

Schließlich und endlich wird noch eine Abbildung $\| \|$ definiert, die jedem Netzwerk bzw. jeder Äquivalenzklasse die Anzahl seiner Subzentren und Interimknoten als Norm zuordnet.

Satz A2.3.25:

Die Abbildung $\| \| : (N_T/\sim, \times, \bullet_D) \rightarrow (\mathbb{N}_0, +, +)$ mit $\| [H] \| := |S(N)| + |I(N)|$ für $H=(N, \upsilon, \tau)$ ist ein nicht-trivialer Monopolyiden-Homomorphismus und damit $(N_T/\sim, \times, \bullet_D)$ ein natürliches Monopolyid.

Beweis:

Da zum einen Identitäten weder Subzentren noch Interimknoten enthalten, bildet $\| \|$ jede Identität auf die 0 ab. Zum anderen bleiben bei der Bildung des parallelen bzw. seriellen Produkts alle Subzentren und Interimknoten erhalten. $\Rightarrow \| [H_1] \times [H_2] \| = \| [H_1] \| + \| [H_2] \|$ und $\| [H_1] \bullet [H_2] \| = \| [H_1] \| + \| [H_2] \| \Rightarrow \| \|$ ist ein Monopolyiden-Homomorphismus. $\Rightarrow \| \|$ ist ein nicht-trivialer Monopolyiden-Homomorphismus, da es in N_T/\sim sicherlich eine Äquivalenzklasse mit mindestens einem Subzentrum gibt. $\Rightarrow (N_T/\sim, \times, \bullet_D)$ ist ein natürliches Monopolyid.

q.e.d.

Im weiteren Verlauf sind nun verschiedene Untermonopolyide von $(N_T/\sim, \times, \bullet_D)$ interessant, insbesondere solche, die aus einer Teilmenge von N_T/\sim erzeugt werden.

A2.4 Besondere Untermonopolyide und einfache Netzwerke

In diesem Abschnitt werden Untermonopolyide von $(N_T/\sim, \times, \bullet_D)$ untersucht und dazu geeignete einfache Netzwerke als erzeugende Elemente definiert.

Hilfssatz A2.4.1:

Sind $H_1=(N_1, \nu_1, \tau_1)$ und $H_2=(N_2, \nu_2, \tau_2)$ zwei formatierte, disjunkte, (fortlaufend) indizierte Subzentren-Netzwerke, so ist auch $H_1 \times H_2$ formatiert. Ist darüber hinaus $\bar{A}(H_1)=\bar{E}(H_2)$, so ist auch $H_1 \bullet H_2$ formatiert.

Beweis:

Sei $H_1=(N_1, \nu_1, \tau_1)$, $H_2=(N_2, \nu_2, \tau_2)$, $H=(N, \nu, \tau):=(N_1, \nu_1, \tau_1) \times (N_2, \nu_2, \tau_2)$ und $H'=(N', \nu', \tau'):= (N_1, \nu_1, \tau_1) \bullet (N_2, \nu_2, \tau_2)$.

Wegen $K(N)=K(N_1) \cup K(N_2)$ ist sicherlich N bzw. H formatiert.

Ist weiter $\bar{A}(H_1)=\bar{E}(H_2)$, so sind alle virtuellen Verbindungskanten von H_1 nach H_2 und damit auch alle Produktkanten von H_1 nach H_2 formatiert. $\Rightarrow H_1 \bullet H_2$ ist formatiert.

q.e.d.

Satz und Definition A2.4.3:

Die Menge N_T^F/\sim aller Äquivalenzklassen aus N_T/\sim mit einem formatierten Repräsentanten bildet ein Untermonopolyid von $(N_T/\sim, \times, \bullet_D)$. Dementsprechend wird $(N_T^F/\sim, \times, \bullet_D)$ als das **Monopolyid der formatierten Äquivalenzklassen** bezeichnet.

Beweis:

Da je zwei Repräsentanten H und H' einer Äquivalenzklasse $[H]$ eingeschränkt bewertungserhaltend isomorph sind, ist mit H auch H' formatiert. $\Rightarrow N_T^F/\sim$ ist als Teilmenge von N_T/\sim wohldefiniert. Damit können das parallele und serielle Produkt von $(N_T/\sim, \times, \bullet_D)$ auf die Menge N_T^F/\sim übertragen werden. Nach Hilfssatz A2.4.1 ist $(N_T^F/\sim, \times, \bullet_D)$ bzgl. beider Produkte abgeschlossen. Da außerdem nach Definition A2.3.5 die Repräsentanten der Identitäten formatiert sind, folgt: Die Menge aller Identitäten aus $(N_T^F/\sim, \times, \bullet_D)$ ist identisch mit der

Menge aller Identitäten aus $(N_T/\sim, \times, \bullet_D)$. $\Rightarrow (N_T^F/\sim, \times, \bullet_D)$ ist nach [HÜB95] Satz A2.1.7 ein Untermonopolyid von $(N_T/\sim, \times, \bullet_D)$.

q.e.d.

Es muß eigentlich nicht besonders erwähnt werden, daß die Restriktion von $\| \| : (N_T/\sim, \times, \bullet_D) \rightarrow (\mathbb{N}_0, +, +)$ auf die Teilmenge N_T^F/\sim ein nicht-trivialer Monopolyiden-Homomorphismus und somit $(N_T^F/\sim, \times, \bullet_D)$ ein natürliches Monopolyid ist. Damit definiert aber auch die Menge $(N_T^F/\sim)^{\| \|}$ aller Äquivalenzklassen, deren Repräsentanten kein Subzentrum und keinen Interimknoten beinhalten, nach [HÜB95] Satz A2.8.3 ein echtes Untermonopolyid von $(N_T^F/\sim, \times, \bullet_D)$. Nach demselben Satz definiert die Menge aller Identitäten N_T^I ein Untermonopolyid des Untermonopolyids $(N_T^F/\sim)^{-1}$ aller invertierbaren Elemente aus $(N_T^F/\sim, \bullet_D)$, welches wiederum ein Untermonopolyid von $(N_T^F/\sim)^{\| \|}$ ist.

Der nachfolgende Satz beinhaltet neben anderem die Aussage, daß die invertierbaren Elemente aus $(N_T^F/\sim, \bullet_D)$ gerade den Permutationen entsprechen.

Satz A2.4.5:

Es gilt: $N_T^I = 1_{N_T^F/\sim}$, $N_T^P = (N_T^F/\sim)^{-1}$, $N_T^0 = (N_T^F/\sim)^{\| \|}$ und
 $N_T^I \subseteq N_T^P \subseteq N_T^0 \subseteq N_T^F/\sim \subseteq N_T/\sim$.

Beweis:

Nach Definition und Satz A2.3.21 ist $N_T^I = 1_{N_T/\sim}$ und damit $N_T^I = 1_{N_T^F/\sim}$, da jede Identität formatiert ist. Nach Hilfssatz A2.3.17 ist $N_T^0 = N_T^0/\sim$ und damit $N_T^0 = (N_T^F/\sim)^{\| \|}$, da nach Definition A2.3.5 die Repräsentanten einer Äquivalenzklasse aus N_T^0 formatiert sind. Nach [HÜB95] Satz A2.8.3 ist $1_{N_T^F/\sim} = N_T^I \subseteq (N_T^F/\sim)^{-1} \subseteq N_T^0 = (N_T^F/\sim)^{\| \|}$. Natürlich ist $N_T^0 = (N_T^F/\sim)^{\| \|} \subseteq N_T^F/\sim$. Da nach Satz und Definition A2.4.3 $N_T^F/\sim \subseteq N_T/\sim$ ist, bleibt also zu zeigen: $N_T^P = (N_T^F/\sim)^{-1}$.

Sei $[P] \in N_T^P$ eine Permutation mit $P=(N, \nu, \tau)$. Definiere $V' := V(N)$, $K' := \{(u, v) : (v, u) \in K(N)\}$, $G' := (V', K')$, $N' := (G', A(N), \emptyset, E(N))$ und $P' := (N', \nu, \tau)$, dann ist leicht einzusehen, daß $[P']$ das Inverse von $[P]$ ist (und umgekehrt). $\Rightarrow N_T^P \subseteq (N_T^F / \sim)^{-1}$.

Sei $[H] \in (N_T^F / \sim)^{-1}$ mit $H=(N, \nu, \tau)$ und $[H]^{-1}=[H']$ mit $H'=(N', \nu', \tau')$ $\Rightarrow [H], [H]^{-1} \in N_T^0 \Rightarrow N$ und N' sind formatiert und besitzen weder Subzentren noch Interimknoten. Da $[I] := [H] \cdot [H]^{-1} = [H] \cdot [H']$ eine Identität ist, darf H keinen freien äußeren Eingang und H' keinen freien äußeren Ausgang besitzen, da diese bei der Bildung des seriellen Produkts erhalten blieben. Umgekehrt ist auch $[I'] := [H]^{-1} \cdot [H] = [H'] \cdot [H]$ eine Identität, so daß H auch keinen freien äußeren Ausgang und H' auch keinen freien äußeren Eingang besitzen darf.

Für die Typeneingangs- bzw. Typenausgangsvektoren gilt: $\vec{E}(H) = \vec{E}(I) = \vec{A}(I) = \vec{A}(H')$ und $\vec{E}(H') = \vec{E}(I) = \vec{A}(I) = \vec{A}(H)$. \Rightarrow Angenommen H enthält eine Verzweigung, so muß H' zur Auslöschung dieser eine Verjüngung enthalten. Damit wäre aber $[H'] \cdot [H]$ keine Identität mehr. $\Rightarrow H$ enthält keine Verzweigungen und analog auch keine Verjüngungen. $\Rightarrow [H]$ ist eine Permutation. $\Rightarrow (N_T^F / \sim)^{-1} \subseteq N_T^P \Rightarrow$ Behauptung. (Siehe auch Bild A2.13.)

q.e.d.

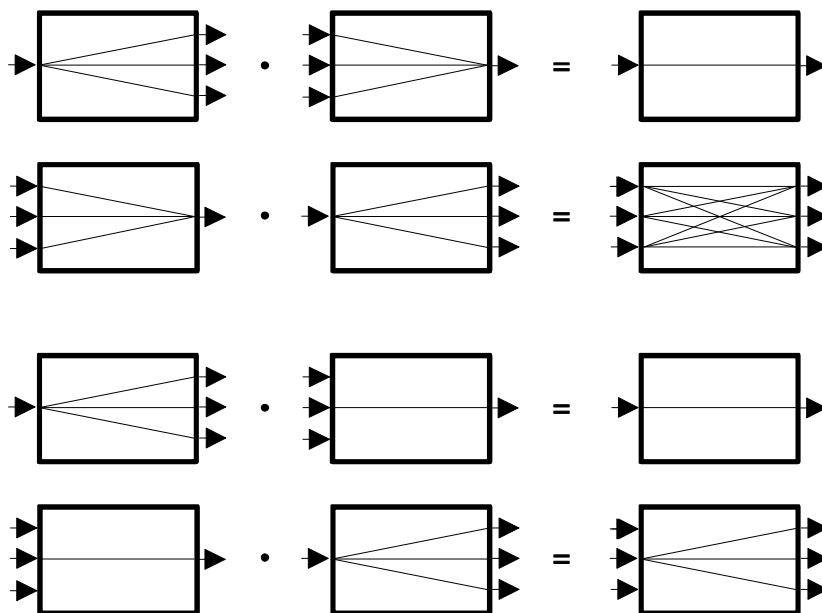


Bild A2.13: Beispiele für Äquivalenzklassen, die keine Inversen besitzen.

Besonders interessant sind Untermonopolyide von $(N_T^F/\sim, \times, \bullet_D)$, die aus einer Teilmenge N' von N_T^F/\sim mit $N_T^I \subseteq N'$ erzeugt bzw. deren Elemente in ein Produkt von Äquivalenzklassen aus N' zerlegt werden können. Das zugehörige Monopolyid der endlichen Produkte von Elementen aus N' sei dann mit $\langle N' \rangle := \langle N', \times, \bullet_D \rangle := \langle N', \times, \bullet_D \rangle_{N_T^F/\sim}$ bezeichnet. (Vgl. [HÜB95] Satz und Definition A2.1.11.)

Um geeignete Teilmengen N' angeben zu können, ist es notwendig vorher noch zwei andere Mengen von Äquivalenzklassen zu definieren. Eine besondere Rolle spielen die einfachen Netzwerke mit Subzentrum und die einfachen Interimknoten. Dabei heißt ein formatiertes, fortlaufend indiziertes Subzentren-Netzwerk ein **einfaches Netzwerk mit Subzentrum**, wenn es genau ein Subzentrum, keinen Interimknoten und genau gleich viele äußere wie innere Ein- bzw. Ausgänge besitzt und von jedem äußeren Eingang zu jedem inneren Eingang, so wie von jedem inneren Ausgang zu jedem äußeren Ausgang genau eine Kante führt, wobei die Endknoten denselben Index besitzen. Je nachdem, ob ein einfaches Netzwerk mit Subzentrum noch zusätzliche, schlaufenbildende Kanten von einem inneren Ausgang zu einem inneren Eingang enthält oder nicht, heißt es ein **einfaches Netzwerk mit** oder **ohne Schlaufen**. (Vgl. Bild A2.15.) Bei einem **einfachen Interimknoten** handelt es sich dagegen um ein formatiertes, fortlaufend indiziertes Subzentren-Netzwerk ohne Subzentrum, mit genau einem Interimknoten, einem äußeren Eingang und einem äußeren Ausgang, wobei ersterer über eine Kante mit dem Interimknoten und dieser mit dem äußeren Ausgang verbunden ist. (Vgl. Bild A2.15.)

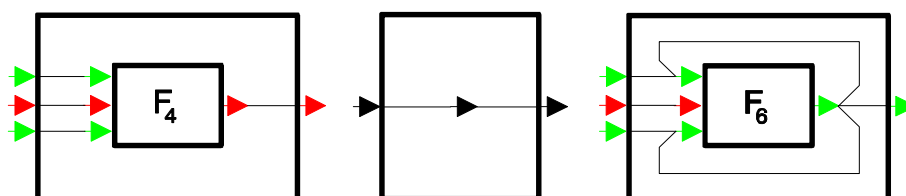


Bild A2.15: Ein einfaches Netzwerk ohne Schlaufen (links), ein einfacher Interimknoten (Mitte) und ein einfaches Netzwerk mit Schlaufen (rechts).

Nachfolgend sei N_T^{1A} eine beliebige Menge von Äquivalenzklassen paarweise zueinander typenindexkonformer, einfacher Netzwerke ohne Schlaufen in denen jedes Subzentrum mindestens einen Ausgang besitzt. Als Erweiterung dazu sei $N_T^{(1)}$ als eine beliebige Menge von Äquivalenzklassen einfacher Interimknoten oder paarweise zueinander typenindexkonformer, einfacher

Netzwerke mit oder ohne Schleifen definiert. Als Krönung dieses Kapitels wird gezeigt werden, daß das von $N'' := N_T^I \cup N_T^{1A}$ bzw. $N' := N_T^0 \cup N_T^{(1)}$ erzeugte Untermonopolyid ein vollkommenes bzw. α -vollkommenes Monopolyid ist. Im Bezug auf das Design elektronischer Schaltkreise bzw. visueller Datenflusssprachen ist dies von größter Bedeutung, da damit jede übertragbare Abbildung von $\langle N'', \times, \bullet_D \rangle$ bzw. jede α -übertragbare Abbildung von $\langle N', \times, \bullet_D \rangle$ in ein anderes Monopolyid zu genau einem Monopolyiden-Homomorphismus fortgesetzt werden kann.

Natürlich liegt die Vermutung nahe, daß es sich auch bei dem von $N' := N_T^0 \cup N_T^{(1)}$ erzeugten Untermonopolyid um ein vollkommenes Untermonopolyid handeln könnte. Dem wird jedoch durch den nächsten Satz sofort und eindeutig widersprochen.

Satz A2.4.7:

Ist U ein Untermonopolyid von N_T^F / \sim mit $N_T^P \subseteq U$, so kann U kein vollkommenes bzw. Hotz'sches Monopolyid sein. Daraus folgt insbesondere, daß auch N_T^F / \sim kein vollkommenes bzw. Hotz'sches Monopolyid sein kann.

Beweis:

Zeige, daß die Voraussetzungen von [HÜB95] Satz A2.4.14 erfüllt sind. Nach Satz A2.4.5 ist $1_{N_T^F / \sim} = N_T^I$, $(N_T^F / \sim)^{-1} = N_T^P$, $(N_T^F / \sim)^{\|\bullet\|} = N_T^0$ und $N_T^I \subseteq N_T^P \subseteq N_T^0$. Sicherlich gibt es zu jedem $[H] \in N_T^0$ ein einfaches Netzwerk ohne Schleifen $[H^*] \in N_T^F / \sim$ mit $\vec{E}(H^*) = \vec{E}(H)$ und $\bar{A}(H^*) = \bar{A}(H)$. (Vgl. Bild A2.17.) Damit ist die links- bzw. rechtsseitige Identität von $[H]$ gleich der links- bzw. rechtsseitigen Identität von $[H^*]$ und $\|[H^*]\| = 1$. Da $N_T^P \subseteq U$ gibt es sicherlich zwei Permutationen aus $[P], [P]^{-1} \in N_T^P \setminus N_T^I$. $\Rightarrow [P], [P]^{-1} \in (N_T^F / \sim)^{\|\bullet\|} \setminus 1_{N_T^F / \sim}$ mit $[P] \bullet [P]^{-1} \in 1_{N_T^F / \sim}$. Damit sind die Voraussetzungen von [HÜB95] Satz A2.4.14 erfüllt.

q.e.d.

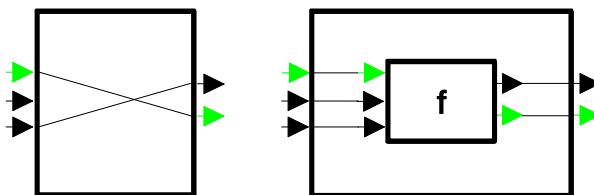


Bild A2.17: Ein fast leeres Netzwerk und ein einfaches Netzwerk ohne Schlaufen mit identischem Typeneingangs- bzw. Typenausgangsvektor.

Für den Beweis der Behauptung, daß $\langle N', \times, \bullet_D \rangle$ ein α -vollkommenes Monopolyid ist, ist es notwendig, auf spezielle Klassen von Permutationen genauer einzugehen.

Definition A2.4.9:

Eine Permutation $P=(N, \nu, \tau)$ heißt **vorwärtszyklisch**, wenn es genau eine Kante $(a, e) \in K(N)$ gibt, für die nicht $\nu(e) = \nu(a) + 1$ gilt. Analog heißt P **rückwärtszyklisch**, wenn es genau eine Kante $(a, e) \in K(N)$ gibt, für die nicht $\nu(e) = \nu(a) - 1$.

Ist P eine vorwärtszyklische Permutation mit $|E(P)| = n$, so ist klar, daß für eine Kante $(a, e) \in K(N)$ mit $\nu(e) \neq \nu(a) + 1$ $\nu(e) = n$ und $\nu(a) = 1$ ist. Ist dagegen P eine rückwärtszyklische Permutation mit $|A(P)| = n$, so ist für eine Kante $(a, e) \in K(N)$ mit $\nu(e) \neq \nu(a) - 1$ $\nu(e) = 1$ und $\nu(a) = n$. (Vgl. Bild A2.42.)

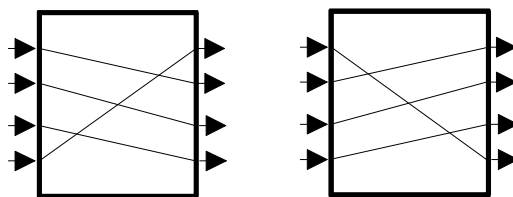


Bild A2.19: Eine vorwärtszyklische Permutation (links), eine rückwärtszyklische Permutation (rechts).

Satz A2.4.11:

Eine vor- bzw. rückwärtszyklische Permutation $[P]$ ist durch ihren Typeneingangs- oder Typenausgangsvektor eindeutig bestimmt.

Beweis:

Eine Permutation $[P]$ besitzt genau soviele äußere Eingänge wie Ausgänge und es führt von jedem äußeren Eingang genau eine

Kante zu einem äußeren Ausgang und umgekehrt. Da $[P]$ formatiert ist, werden damit durch den Typeneingangs- oder Typenausgangsvektor die Typen, sowie die Anzahl aller äußeren Ein- und Ausgänge eindeutig festgelegt. Da das Prädikat "vorwärtszyklisch" bzw. "rückwärtszyklisch" auch die Indizes der äußeren Ein- und Ausgänge festlegt, ist $[P]$ damit eindeutig bestimmt.

q.e.d.

Satz A2.4.13:

Ist $[P]$ eine vorwärtszyklische Permutation, dann ist $[P]^{-1}$ eine rückwärtszyklische Permutation und umgekehrt.

Beweis:

Sei $[P']$ die durch den Typenausgangsvektor von $[P]$ eindeutig bestimmte rückwärtszyklische Permutation. Es ist leicht einzusehen, daß dann $[P] \cdot [P']$ eine Identität ist. $\Rightarrow [P'] = [P]^{-1}$ nach [HÜB95] Satz und Definition A2.3.10.

q.e.d.

Satz A2.4.15:

Ist $[H]$ ein beliebiges Netzwerk, $[I_m]$ eine Identität mit genau einem äußeren Eingang bzw. Ausgang und $[P']$ eine vorwärtszyklische Permutation, dann ist $[P'] \cdot ([I_m] \times [H])$ bzw. $([H] \times [I_m]) \cdot [P']$ genau dann definiert, wenn $[P']^{-1} \cdot ([H] \times [I_m])$ bzw. $([I_m] \times [H]) \cdot [P']^{-1}$ definiert ist. Ist $[P']$ eine rückwärtszyklische Permutation, dann ist $[P'] \cdot ([H] \times [I_m])$ bzw. $([I_m] \times [H]) \cdot [P']$ genau dann definiert, wenn $[P']^{-1} \cdot ([I_m] \times [H])$ bzw. $([H] \times [I_m]) \cdot [P']^{-1}$ definiert ist.

Beweis:

Sei $[P']$ eine vorwärtszyklische Permutation, dann gilt:
 $[P'] \cdot ([I_m] \times [H])$ ist definiert $\Leftrightarrow \bar{A}(P) = \bar{E}(I_m \times H) = \bar{E}(I_m) \cdot \bar{E}(H) \Leftrightarrow \bar{A}(P^{-1}) = \bar{E}(P) = \bar{E}(H) \cdot \bar{E}(I_m) = \bar{E}(H \times I_m)$. (Vgl. Bild A2.19). Der Rest der Behauptung folgt analog.

q.e.d.

Satz A2.4.17:

Ist $[H]$ ein beliebiges Netzwerk, $[P']$ eine vorwärtszyklische und $[P'']$ eine rückwärtszyklische Permutation, $[I_m]$ die durch den Typen des ersten äußeren Ausgangs von $[P']$ eindeutig bestimmte Identität und sind die Produkte $[P'] \cdot ([I_m] \times [H])$ und $([I_m] \times [H]) \cdot [P'']$ definiert, so ist $[P'] \cdot ([I_m] \times [H]) \cdot [P''] = [H] \times [I_m]$.

Beweis:

Sei $[H'] := [I_m] \times [H]$. Wird die vorwärtszyklische Permutation $[P']$ von links mit $[H']$ seriell kombiniert, so werden die äußeren Eingänge von $[H']$ zyklisch vertauscht, so daß der erste Eingang sich danach am unteren Ende befindet. (Vgl. Bild A2.28.) Ansonsten verändert sich an dem Netzwerk nichts. Analog werden die äußeren Ausgänge von $[H']$ zyklisch vertauscht, wenn $[H']$ von rechts mit der rückwärtszyklischen Permutation $[P'']$ seriell kombiniert wird. Da $[I_m]$ gerade die durch den Typen des ersten äußeren Ausgangs von $[P']$ eindeutig bestimmte Identität und $[H'] = [I_m] \times [H]$ ist, kann das Produkt $[P'] \cdot [H'] \cdot [P'']$ in der Form $[H] \times [I_m]$ dargestellt werden. $\Rightarrow [P'] \cdot ([I_m] \times [H]) \cdot [P''] = [P'] \cdot [H'] \cdot [P''] = [H] \times [I_m]$.

q.e.d.

Für rückwärtszyklische Permutation gilt ein analoger Satz.

Satz A2.4.19:

Ist $[H]$ ein beliebiges Netzwerk, $[P']$ eine rückwärtszyklische und $[P'']$ eine vorwärtszyklische Permutation, $[I_m]$ die durch den Typen des letzten äußeren Ausgangs von $[P']$ eindeutig bestimmte Identität und sind die Produkte $[P'] \cdot ([H] \times [I_m])$ und $([H] \times [I_m]) \cdot [P'']$ definiert, so ist $[P'] \cdot ([H] \times [I_m]) \cdot [P''] = [I_m] \times [H]$.

Beweis:

Analog zu Beweis von Satz A2.4.17.

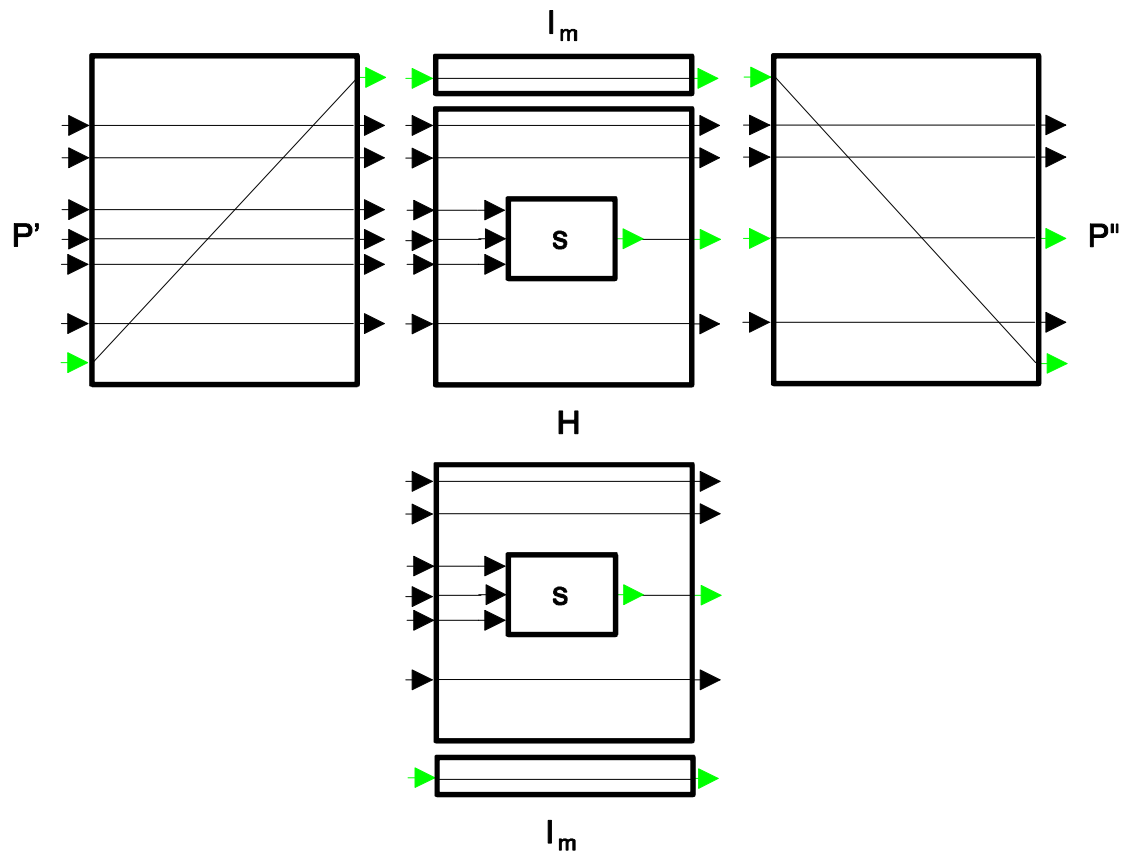


Bild A2.21: Skizze zum Beweis von Satz A2.4.17.

Definition A2.4.21:

Eine Permutation $[P]$ heißt eine **erweitert vorwärtszyklische Permutation**, wenn es eine vorwärtszyklische Permutation $[P']$ und zwei Identitäten $[I_t]$ und $[I_b]$ gibt, mit $[P]=[I_t] \times [P'] \times [I_b]$. Analog heißt $[P]$ eine **erweitert rückwärtszyklische Permutation**, wenn $[P']$ eine rückwärtszyklische Permutation ist.

Satz und Definition A2.4.23:

Ist $[P]$ eine erweitert vorwärts- bzw. rückwärtszyklische Permutation, dann gibt es genau eine vorwärts- bzw. rückwärtszyklische Permutation $[P']$, genau eine Identität $[I_t]$ und genau eine Identität $[I_b]$ derart, daß $[P]=[I_t] \times [P'] \times [I_b]$ ist. $[I_t]$ bzw. $[I_b]$ heißt die **obere bzw. untere Identität von $[P]$** und $[P']$ heißt die **vorwärts- bzw. rückwärtszyklische Permutation von $[P]$** .

Beweis:

- a) Sei $[P]$ eine erweitert vorwärtszyklische Permutation, dann existieren Identitäten $[I_t]$ und $[I_b]$ und eine vorwärtszyklische Permutation $[P']$ so, daß $[P]=$

$[I_t] \times [P'] \times [I_b]$ ist. Angenommen es existieren weitere Identitäten $[I_t'']$ und $[I_b'']$ und eine vorwärtszyklische Permutation $[P'']$ mit $[P] = [I_t''] \times [P''] \times [I_b'']$. Da es weder in P' noch in P'' eine Kante (e, a) gibt, so daß e und a denselben Index besitzen, ist wegen $[I_t] \times [P'] \times [I_b] = [P] = [I_t''] \times [P''] \times [I_b'']$ $[I_t] = [I_t'']$ und $[I_b] = [I_b'']$. $\Rightarrow \bar{A}(P') = \bar{A}(P'')$, da $\bar{A}(I_t) = \bar{A}(I_t'')$, $\bar{A}(I_b) = \bar{A}(I_b'')$ und $\bar{A}(I_t) \cdot \bar{A}(P') \cdot \bar{A}(I_b) = \bar{A}(P) = \bar{A}(I_t'') \cdot \bar{A}(P'') \cdot \bar{A}(I_b'')$. $\Rightarrow [P'] = [P'']$ nach Satz A2.4.11.

- b) Sei $[P]$ eine erweitert rückwärtszyklische Permutation, dann folgt die Behauptung analog zu a).

q.e.d.

Satz A2.4.25:

Ist $[P]$ eine erweitert vorwärtszyklische (rückwärtszyklische) Permutation, $[P']$ die vorwärtszyklische (rückwärtszyklische) Permutation von $[P]$ und $[P] = [I_t] \times [P'] \times [I_b]$, dann ist $[P]^{-1}$ eine erweitert rückwärtszyklische (vorwärtszyklische) Permutation mit $[P]^{-1} = [I_t] \times [P']^{-1} \times [I_b]$, wobei $[P']^{-1}$ die rückwärtszyklische (vorwärtszyklische) Permutation von $[P]^{-1}$ ist.

Beweis:

Sei $[P]$ eine erweitert vorwärtszyklische (rückwärtszyklische) Permutation, dann existieren Identitäten $[I_t]$ und $[I_b]$ und eine vorwärtszyklische (rückwärtszyklische) Permutation $[P']$, so daß $[P] = [I_t] \times [P'] \times [I_b]$ ist. Nach [HÜB95] Satz A2.1.20 (5) ist $[P]^{-1} =$

$([I_t] \times [P'] \times [I_b])^{-1} = [I_t]^{-1} \times [P']^{-1} \times [I_b]^{-1} = [I_t] \times [P']^{-1} \times [I_b]$. Nach Satz A2.4.13 ist $[P']^{-1}$ eine rückwärtszyklische (vorwärtszyklische) Permutation. $\Rightarrow [P]^{-1}$ eine erweitert rückwärtszyklische (vorwärtszyklische) Permutation. Nach Satz und Definition A2.4.23 ist $[P']^{-1}$ die rückwärtszyklische (vorwärtszyklische) Permutation von $[P]^{-1}$.

q.e.d.

Abschließend werden nun noch einige Klassen von (besonders) einfachen Netzwerken definiert.

Definition A2.4.27:

Ein fast leeres Netzwerk (N, ν, τ) ohne freie äußere Ein- oder Ausgänge heißt eine **einfache Verzweigung**, wenn es genau einen äußeren Eingang und mindestens zwei äußere Ausgänge besitzt. Analog heißt das Netzwerk (N, ν, τ) eine **einfache Verjüngung**, wenn es mindestens zwei äußere Eingänge und genau einen äußeren Ausgang besitzt.

Da eine einfache Verzweigung keine Subzentren, Interimkonten oder freie äußere Ein- oder Ausgänge besitzt, muß von dem vorhandenen äußeren Eingang eine Kante zu jedem äußeren Ausgang führen. Analog führt in jeder einfachen Verjüngung von jedem äußeren Eingang eine Kante zum einzig vorhandenen äußeren Ausgang. (Vgl. Bild A2.23.)

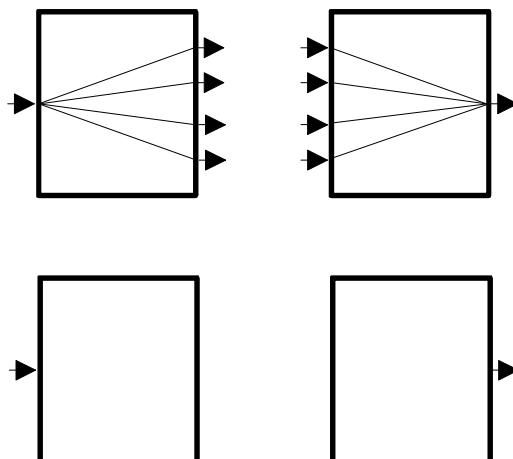


Bild A2.23: Eine einfache Verzweigung (oben/links), eine einfache Verjüngung (oben/rechts), ein einfacher Eingang (unten/links) und ein einfacher Ausgang (unten/rechts).

Definition A2.4.29:

Ein fast leeres Netzwerk (N, ν, τ) mit genau einem äußeren Eingang und ohne äußere Ausgänge heißt ein **einfacher Eingang**. Analog heißt das Netzwerk (N, ν, τ) ein **einfacher Ausgang**, wenn es keinen äußeren Eingang und genau einen äußeren Ausgang besitzt.

Natürlich ist der in einem einfachen Ein- bzw. Ausgang einzig vorhandene Konten ein freier äußerer Ein- bzw. Ausgang. (Vgl. Bild A2.23.)

Satz A2.4.31:

Ein einfacher Eingang bzw. Ausgang $[H]$ ist durch den Typen des einzig vorhandenen äußeren Ein- bzw. Ausgangs von $[H]$ eindeutig bestimmt. Ebenso ist eine einfache Verzweigung bzw. Verjüngung durch den Typen des einzig vorhandenen äußeren Ein- bzw. Ausgangs von $[H]$ und die Anzahl der äußeren Aus- bzw. Eingänge eindeutig bestimmt.

Beweis:

Im Falle eines einfachen Ein- bzw. Ausgangs gilt die Aussage trivialerweise. Bei einer einfachen Verzweigung bzw.

Verjüngung [H] legt die Anzahl der äußeren Aus- bzw. Eingänge und deren Typ der Typenausgangs- bzw. Typeneingangsvektor fest. Da es sich bei einer einfachen Verzweigung bzw. Verjüngung um ein formatiertes Netzwerk mit genau einem äußeren Ein- bzw. Ausgang handelt, zu dem eine Kante führt, folgt die Behauptung.

q.e.d.

A2.5 Bestimmende Abbildungen

Im Zusammenhang mit der Definition von bestimmenden Abbildungen sei daran erinnert, daß nach Definition A2.1.3 $SI(N) = S(N) \cup I(N)$ ist.

Definition A2.5.1:

Sind $H = (N, \nu, \tau)$ und $H' = (N', \nu', \tau')$ zwei fortlaufend indizierte Subzentren-Netzwerke, dann heißt eine Abbildung $\varphi: SI(N) \rightarrow SI(N')$ eine **bestimmende Abbildung**, wenn ein eingeschränkt bewertungserhaltender Isomorphismus $\beta: V(N) \rightarrow V(N')$ existiert, so daß die Restriktion von β auf $SI(N)$ identisch zu φ ist. (Der Allgemeinheit wegen ist dabei für φ auch die idealisierte Abbildung $id: \emptyset \rightarrow \emptyset$ zugelassen.)

Eine bestimmende Abbildung bestimmt auf natürliche Art und Weise einen Isomorphismus, wie der nachfolgende Satz zeigt.

Satz A2.5.3:

Sind $H = (N, \nu, \tau)$ und $H' = (N', \nu', \tau')$ zwei fortlaufend indizierte Subzentren-Netzwerke, dann existiert zu jeder bestimmenden Abbildung $\varphi: SI(N) \rightarrow SI(N')$ genau ein eingeschränkt bewertungserhaltender Isomorphismus $\beta: V(N) \rightarrow V(N')$ mit $\varphi = \beta|_{SI(N)}$ und umgekehrt.

Beweis:

Sei $\varphi: SI(N) \rightarrow SI(N')$ eine bestimmende Abbildung. \Rightarrow Es existiert ein eingeschränkt bewertungserhaltender Isomorphismus $\beta: V(N) \rightarrow V(N')$ mit $\varphi = \beta|_{SI(N)}$. Angenommen $\beta': V(N) \rightarrow V(N')$ ist ein weiterer eingeschränkt bewertungserhaltender Isomorphismus mit $\varphi = \beta'|_{SI(N)}$. Da $\varphi = \beta|_{SI(N)}$ und $\varphi = \beta'|_{SI(N)}$ ist, ist $\beta(u) = \beta'(u) \quad \forall u \in S(N) \cup I(N)$.

Angenommen $u \in A(N)$. $\Rightarrow \beta(u), \beta'(u) \in A(N')$ nach Satz A2.4.5 und $\nu'(\beta(u)) = \nu(u) = \nu'(\beta'(u))$. $\Rightarrow \beta(u) = \beta'(u)$. Analog ist $\beta(u) = \beta'(u) \quad \forall u \in E(N)$.

Angenommen $u \in E(N, S)$. \Rightarrow Es existiert ein $s \in S(N)$ mit $u \in E(N, s)$. $\Rightarrow (u, s) \in K(N)$. $\Rightarrow (\beta(u), \beta(s)) \in K(N')$ und $(\beta'(u), \beta'(s)) \in K(N')$. $\Rightarrow \beta(u) \in E(N', \beta(s))$ und $\beta'(u) \in E(N', \beta'(s)) \Rightarrow \beta(u), \beta'(u) \in E(N', \beta(s))$, da $\beta(s) = \beta'(s)$. $\Rightarrow \beta(u) = \beta'(u)$, wegen $\nu'(\beta(u)) = \nu(u) = \nu'(\beta'(u))$. $\Rightarrow \beta(u) = \beta'(u) \quad \forall u \in E(N, S)$. Analog ist $\beta(u) = \beta'(u) \quad \forall u \in A(N, S)$.

Damit ist $\beta(u)=\beta'(u) \quad \forall u \in V(N)$, da die Mengen $E(N)$, $E(N,S)$, $S(N)$, $I(N)$, $A(N,S)$ und $A(N)$ nach Satz A2.1.17 eine Partition von $V(N)$ bilden. $\Rightarrow \beta=\beta'$.

Die Umkehrung des Satzes gilt trivialerweise. q.e.d.

Satz A2.5.5:

Sind $H=(N,\nu,\tau)$, $H'=(N',\nu',\tau')$ und $H''=(N'',\nu'',\tau'')$ fortlaufend indizierte Subzentren-Netzwerke und $\varphi_1:SI(N) \rightarrow SI(N')$ sowie $\varphi_2:SI(N') \rightarrow SI(N'')$ bestimmende Abbildungen, so ist auch $\varphi_2 \circ \varphi_1:SI(N) \rightarrow SI(N'')$ eine bestimmende Abbildung.

Beweis:

Der Satz ist richtig, da die analoge Aussage für eingeschränkt bewertungserhaltende Isomorphismen gilt.

Satz A2.5.7:

Zwei fortlaufend indizierte Subzentren-Netzwerke $H=(N,\nu,\tau)$ und $H'=(N',\nu',\tau')$ sind genau dann äquivalent, wenn eine bestimmende Abbildung $\varphi:SI(N) \rightarrow SI(N')$ existiert.

Beweis:

Folgt unmittelbar aus Satz A2.5.3 und Definition A2.1.7.

Satz A2.5.9:

Sind $H_1=(N_1,\nu_1,\tau_1)$ und $H_1'=(N_1',\nu_1',\tau_1')$ bzw. $H_2=(N_2,\nu_2,\tau_2)$ und $H_2'=(N_2',\nu_2',\tau_2')$ zwei disjunkte, fortlaufend indizierte Subzentren-Netzwerke, $H_1 \bullet H_2$ ist definiert und $\varphi_1:SI(N_1) \rightarrow SI(N_1')$ bzw. $\varphi_2:SI(N_2) \rightarrow SI(N_2')$ eine bestimmende Abbildung, so ist $\varphi:SI(H_1 \bullet H_2) \rightarrow SI(H_1' \bullet H_2')$ mit $\varphi := \varphi_1 \cup \varphi_2$ ebenfalls eine bestimmende Abbildung.

Beweis:

Zeige zuerst, daß φ wohldefiniert ist. Da $\varphi_1:SI(N_1) \rightarrow SI(N_1')$ bzw. $\varphi_2:SI(N_2) \rightarrow SI(N_2')$ eine bestimmende Abbildung ist, gilt: $H_1 \sim H_1'$ und $H_2 \sim H_2'$ nach Satz A2.5.7. $\Rightarrow \bar{A}(H_1) = \bar{A}(H_1')$ und $\bar{E}(H_2) = \bar{E}(H_2')$. $H_1 \bullet H_2$ ist definiert. $\Rightarrow \bar{A}(H_1) = \bar{E}(H_2) \Rightarrow \bar{A}(H_1') = \bar{A}(H_1) = \bar{E}(H_2) = \bar{E}(H_2') \Rightarrow H_1' \bullet H_2'$ definiert. Da H_1 und H_1' bzw. H_2 und H_2' disjunkt sind, ist $\varphi:SI(H_1 \bullet H_2) \rightarrow SI(H_1' \bullet H_2')$ wohldefiniert.

Sei β_1 bzw. β_2 der nach Satz A2.5.3 durch φ_1 bzw. φ_2 eindeutig bestimmte eingeschränkt bewertungserhaltende Isomorphismus. Definiere $\beta:V(H_1 \bullet H_2) \rightarrow V(H_1' \bullet H_2')$ durch

$$\beta(u) := \begin{cases} \beta_1(u) & \text{für } u \in V(H_1) \\ \beta_2(u) & \text{für } u \in V(H_2) \end{cases} \quad \text{und zeige, daß } \beta \text{ ein eingeschränkt}$$

bewertungserhaltender Isomorphismus ist, dann ist dessen Restriktion auf $SI(H_1 \bullet H_2)$ identisch zu φ und φ somit eine bestimmende Abbildung.

Definiere $H_3 := (N_3, \nu_3, \tau_3) := H_1 \bullet H_2$ und $H_3' := (N_3', \nu_3', \tau_3') := H_1' \bullet H_2'$. Nach Satz und Definition A2.2.7 ist $V(N_3) = (V(N_1) \setminus A(N_1)) \cup (V(N_2) \setminus E(N_2))$ und $V(N_3') = (V(N_1') \setminus A(N_1')) \cup (V(N_2') \setminus E(N_2'))$. $\Rightarrow \beta$ ist eine Bijektion, da β_1 und β_2 Bijektionen und H_1 und H_1' bzw. H_2 und H_2' disjunkt sind. Analog folgt, daß β eine eingeschränkt bewertungserhaltende Abbildung ist. Bleibt also noch zu zeigen: $(u, v) \in K(N_3) \Leftrightarrow (\beta(u), \beta(v)) \in K(N_3')$.

Angenommen $(u, v) \in K(N_3)$ und $u, v \in V(N_1) \Rightarrow (u, v) \in K(N_1) \Rightarrow (\beta(u), \beta(v)) = (\beta_1(u), \beta_1(v)) \in K(N_1') \Rightarrow (\beta(u), \beta(v)) \in K(N_3')$ nach Satz und Definition A2.2.7.

Angenommen $(u, v) \in K(N_3)$ und $u, v \in V(N_2)$, so folgt analog $(\beta(u), \beta(v)) = (\beta_2(u), \beta_2(v)) \in K(N_2')$.

Angenommen $(u, v) \in K(N_3)$, $u \in V(N_1)$ und $v \in V(N_2)$. $\Rightarrow (u, v)$ ist eine Produktkante. \Rightarrow Es existiert ein $a \in A(N_1)$ und $e \in E(N_2)$ mit $\nu_1(a) = \nu_2(e)$ und $(u, a) \in K(N_1)$ sowie $(e, v) \in K(N_2)$. $\Rightarrow \beta_1(a) \in A(N_1')$ und $\beta_2(e) \in E(N_2')$ mit $\nu_1'(\beta_1(a)) = \nu_1(a) = \nu_2(e) = \nu_2'(\beta_2(e))$ und $(\beta_1(u), \beta_1(a)) \in K(N_1')$ sowie $(\beta_2(e), \beta_2(v)) \in K(N_2')$. $\Rightarrow (\beta_1(u), \beta_2(v)) \in K(N_3') \Rightarrow (\beta(u), \beta(v)) = (\beta_1(u), \beta_2(v)) \in K(N_3')$. Damit ist gezeigt: $(u, v) \in K(N_3) \Rightarrow (\beta(u), \beta(v)) \in K(N_3')$. Die umgekehrte Aussage $(u, v) \in K(N_3) \Leftarrow (\beta(u), \beta(v)) \in K(N_3')$ kann analog gezeigt werden, da Isomorphismen auch Bijektionen sind.

q.e.d.

Zu obigem Satz sei abschließend bemerkt, daß $\beta_1 \cup \beta_2$ im allgemeinen keinen Isomorphismus von $H_1 \bullet H_2$ nach $H_1' \bullet H_2'$ definieren kann, da in der Regel $V(H_1 \bullet H_2) \neq V(H_1) \cup V(H_2)$ ist. Dies ist mit ein Grund dafür, gegenüber dem Arbeiten mit eingeschränkt bewertungserhaltenden Isomorphismen das Arbeiten mit bestimmenden Abbildungen vorzuziehen.

Satz A2.5.11:

Sind $H_1 = (N_1, \nu_1, \tau_1)$ und $H_1' = (N_1', \nu_1', \tau_1')$ bzw. $H_2 = (N_2, \nu_2, \tau_2)$ und $H_2' = (N_2', \nu_2', \tau_2')$ zwei disjunkte, fortlaufend indizierte

Subzentren-Netzwerke und $\varphi_1: SI(N_1) \rightarrow SI(N_1')$ bzw. $\varphi_2: SI(N_2) \rightarrow SI(N_2')$ eine bestimmende Abbildung, so ist $\varphi: SI(H_1 \times H_2) \rightarrow SI(H_1' \times H_2')$ mit $\varphi := \varphi_1 \cup \varphi_2$ eine bestimmende Abbildung.

Beweis:

Analog zum Beweis von Satz A2.5.9.

Als nächstes werden einige Spezialfälle aufgezählt, bei denen man die zugehörige bestimmende Abbildung sofort benennen kann.

Satz A2.5.13:

Sind $H=(N, \upsilon, \tau)$ und $H'=(N', \upsilon', \tau')$ zwei äquivalente, fortlaufend indizierte Subzentren-Netzwerke dann gilt:

- (a) Besitzt H weder Subzentren noch Interimknoten, so ist die idealisierte Abbildung $\text{id}: \emptyset \rightarrow \emptyset$ die einzig existierende bestimmende Abbildung von $SI(N)$ nach $SI(N')$.
- (b) Besitzt H genau ein Subzentrum s und keinen Interimknoten, so besitzt H' auch genau ein Subzentrum s' und die Abbildung $\varphi: SI(N) \rightarrow SI(N')$ mit $\varphi(s) := s'$ ist die einzig existierende bestimmende Abbildung.
- (c) Besitzt H kein Subzentrum und genau einen Interimknoten v , so besitzt H' auch genau einen Interimknoten v' und die Abbildung $\varphi: SI(N) \rightarrow SI(N')$ mit $\varphi(v) := v'$ ist die einzig existierende bestimmende Abbildung.
- (d) Besitzt H genau ein Subzentrum s und genau einen Interimknoten v , so besitzt H' auch genau ein Subzentrum s' und genau einen Interimknoten v' die Abbildung $\varphi: SI(N) \rightarrow SI(N')$ mit $\varphi(s) := s'$ und $\varphi(v) := v'$ ist die einzig existierende bestimmende Abbildung.

Beweis:

Da H und H' äquivalent sind, existiert nach Definition A2.1.7 ein eingeschränkt bewertungserhaltender Isomorphismus $\beta: V(N) \rightarrow V(N')$.

Im Fall (a) ist $\varphi := \text{id}$ wegen $SI(N) = \emptyset$ und $\varphi = \beta|_{SI(N)}$ die einzig existierende bestimmende Abbildung. In den Fällen (b)-(d) folgt die Behauptung aus dem Umstand, daß nach Satz A2.4.5 ein Isomorphismus Subzentren auf Subzentren und Interimknoten auf Interimknoten abbildet. Dies gilt damit auch für jede bestimmende Abbildung, da diese die Restriktion eines Isomorphismus' ist. Gibt es nur ein Subzentrum oder nur einen Interimknoten, so ist die Abbildung $\varphi: SI(N) \rightarrow SI(N')$ damit eindeutig festgelegt.

q.e.d.

Für spätere Zwecke werden abschließend noch einige Fälle beschrieben in denen $|SI(H_1)|=2$ und die identische Abbildung eine bestimmende Abbildung ist.

Satz A2.5.15:

Seien $H_1=(N_1, \nu_1, \tau_1)$ und $H_2=(N_2, \nu_2, \tau_2)$ zwei äquivalente, fortlaufend indizierte Subzentren-Netzwerke ohne Verzweigungen mit $SI(H_1)=SI(H_2)$ und $|SI(H_1)|=2$. Gibt es dann sowohl in H_1 als auch H_2 einen Pfad P von einem äußeren Eingang $e_1 \in E(H_1)$ bzw. $e_2 \in E(H_2)$ zu einem Knoten $v \in SI(H_1)$ mit $V(P) \cap SI(H_1) = \{v\}$ und ist $\nu_1(e_1) = \nu_2(e_2)$, so ist die identische Abbildung $id: SI(H_1) \rightarrow SI(H_1)$ die einzig existierende bestimmende Abbildung von H_1 nach H_2 .

Beweis:

H_1 und H_2 sind äquivalent. \Rightarrow Es existiert ein eingeschränkt bewertungserhaltender Isomorphismus $\beta: H_1 \rightarrow H_2$. β bildet den i -ten äußeren Eingang von H_1 auf den i -ten äußeren Eingang von H_2 ab. $\Rightarrow \beta(e_1) = e_2$.

Angenommen $v \in S(H_1)$. Dann ist der gegebene Pfad von der Form $P_1 = (e_1, e_1', v)$ bzw. $P_2 = (e_2, e_2', v)$, wobei $e_1' \in E(H_1, v)$ und $e_2' \in E(H_2, v)$ ist. $(e_1, e_1') \in K(H_1) \Rightarrow (\beta(e_1), \beta(e_1')) \in K(H_2)$, da β ein Isomorphismus ist. $\Rightarrow (e_2, \beta(e_1')) \in K(H_2)$, da $\beta(e_1) = e_2$ ist. $\Rightarrow (e_2, \beta(e_1')) \in K(H_2)$ und $(e_2, e_2') \in K(H_2)$. $\Rightarrow \beta(e_1') = e_2'$, da H_2 keine Verzweigungen besitzt. $\Rightarrow \beta(e_1') \in E(H_2, v)$. Wegen $v \in S(H_1)$ und $e_1' \in E(H_1, v)$ ist $\beta(v) \in S(H_2)$ und $\beta(e_1') \in E(H_2, \beta(v))$. $\Rightarrow \beta(e_1') \in E(H_2, v)$ und $\beta(e_1') \in E(H_2, \beta(v)) \Rightarrow v = \beta(v)$ nach Definition A2.1.1 (2).

Angenommen $v \in I(H_1)$, so ist der gegebene Pfad von der Form $P_1 = (e_1, v)$ bzw. $P_2 = (e_2, v)$. $\Rightarrow (\beta(e_1), \beta(v)) \in K(H_2)$, da $(e_1, v) \in K(H_1)$ und β ein Isomorphismus ist. $\Rightarrow (e_2, \beta(v)) = (\beta(e_1), \beta(v)) \in K(H_2)$ und $(e_1, v) \in K(H_2) \Rightarrow v = \beta(v)$, da H_2 keine Verzweigungen besitzt.

Damit gilt allgemein: $\beta(v) = v$. Da $|SI(H_1)|=2$ und die Restriktion von β auf $SI(H_1)$ eine Bijektion ist, bildet β den zweiten Knoten aus $SI(H_1)$ ebenfalls auf sich selbst ab. \Rightarrow Die Restriktion von β auf $SI(H_1)$ ist identisch zu $id: SI(H_1) \rightarrow SI(H_1)$.

q.e.d.

Satz A2.5.17:

Seien $H_1=(N_1, \nu_1, \tau_1)$ und $H_2=(N_2, \nu_2, \tau_2)$ zwei äquivalente, fortlaufend indizierte Subzentren-Netzwerke ohne Verzüngen mit $SI(H_1)=SI(H_2)$ und $|SI(H_1)|=2$. Gibt es dann sowohl in H_1 als auch in H_2 einen Pfad P von einem Knoten $v \in SI(H_1)$ zu einem äußeren Ausgang $a_1 \in A(H_1)$ bzw. $a_2 \in A(H_2)$ mit $V(P) \cap SI(H_1) = \{v\}$ und ist $\nu_1(a_1) = \nu_2(a_2)$, so ist die identische Abbildung $id: SI(H_1) \rightarrow SI(H_1)$ die einzig existierende bestimmende Abbildung von H_1 nach H_2 .

Beweis:

Analog zu Beweis von Satz A2.5.15.

Satz A2.5.19:

Seien $H_1=(N_1, \nu_1, \tau_1)$ und $H_2=(N_2, \nu_2, \tau_2)$ zwei äquivalente, fortlaufend indizierte Subzentren-Netzwerke ohne Interimknoten, mit genau zwei Subzentren, die weder Ein- noch Ausgänge besitzen. Ist dann $SI(H_1)=SI(H_2)$, so ist die identische Abbildung $id: SI(H_1) \rightarrow SI(H_1)$ eine bestimmende Abbildung von H_1 nach H_2 .

Beweis:

Zeige, daß ein Isomorphismus $\beta: H_1 \rightarrow H_2$ existiert, dessen Restriktion auf H_1 die identische Abbildung ist.

Da H_1 und H_2 äquivalent sind, ist $\bar{E}(H_1) = \bar{E}(H_2)$ und $\bar{A}(H_1) = \bar{A}(H_2)$.

Definiere
$$\beta(v) = \begin{cases} e \in E(N_2) \text{ mit } \nu_2(e) = \nu_1(v) \text{ falls } v \in E(N_1) \\ a \in A(N_2) \text{ mit } \nu_2(a) = \nu_1(v) \text{ falls } v \in A(N_1) \\ v \text{ sonst} \end{cases} \quad \text{Wegen}$$

$SI(H_1)=SI(H_2)$ ist β als Abbildung von H_1 nach H_2 wohldefiniert, bijektiv und eingeschränkt bewertungserhaltend. Außerdem ist die Restriktion β auf H_1 die identische Abbildung. Es muß also nur noch gezeigt werden, daß $(e, a) \in K(H_1) \Leftrightarrow (\beta(e), \beta(a)) \in K(H_2)$.

Da H_1 und H_2 äquivalent sind, existiert ein eingeschränkt bewertungserhaltender Isomorphismus $\beta': H_1 \rightarrow H_2$. Sei $(e, a) \in K(H_1)$.
 $\Rightarrow e \in E(H_1)$ und $a \in A(H_1)$. Außerdem ist $(\beta'(e), \beta'(a)) \in K(H_1)$,
 $\beta'(e) \in E(H_2)$, $\beta'(a) \in A(H_2)$, $\nu_2(\beta'(e)) = \nu_1(e)$ und $\nu_2(\beta'(a)) = \nu_1(a)$.
 Nach der Definition von β ist für $e \in E(H_1)$ $\beta(e) \in E(H_2)$ und $\nu_2(\beta(e)) = \nu_1(e)$, sowie für $a \in A(H_1)$, $\beta(a) \in A(H_2)$ und $\nu_2(\beta(a)) = \nu_1(a)$.
 $\Rightarrow \nu_2(\beta(e)) = \nu_1(e) = \nu_2(\beta'(e))$ und $\nu_2(\beta(a)) = \nu_1(a) = \nu_2(\beta'(a))$
 $\Rightarrow \beta(e) = \beta'(e)$ und $\beta(a) = \beta'(a) \Rightarrow (\beta(e), \beta(a)) = (\beta'(e), \beta'(a)) \in K(H_2)$.
 Da β und β' bijektiv sind, gilt umgekehrt: $(\beta(e), \beta(a)) \in K(H_2) \Rightarrow (e, a) \in K(H_1)$.

q.e.d.

Als Vorbereitung für den nächsten, wichtigen Satz sind eine Definition und zwei Hilfssätze notwendig.

Definition A2.5.21:

Ist N ein Subzentren-Netzwerk, dann heißt ein Knoten $v \in V(N)$ eine **Eingangsverjüngung**, wenn es mindestens zwei verschiedene äußere Eingänge $e, e' \in E(N)$ gibt, mit $(e, v), (e', v) \in K(N)$.

Hilfssatz A2.5.23:

Sind $H_1 = (N_1, \upsilon_1, \tau_1)$ und $H_3 = (N_3, \upsilon_3, \tau_3)$ bzw. $H_2 = (N_2, \upsilon_2, \tau_2)$ und $H_4 = (N_4, \upsilon_4, \tau_4)$ je zwei disjunkte Subzentren-Netzwerke, die Produkte $H_1 \bullet H_3$ und $H_2 \bullet H_4$ definiert und $\beta: H_1 \bullet H_3 \rightarrow H_2 \bullet H_4$ ein Isomorphismus mit $\beta(v) \in SI(N_4) \forall v \in SI(N_3)$, so ist $\beta(v) \in V(N_4) \setminus E(N_4) \forall v \in V(N_3) \setminus E(N_3)$.

Beweis:

Definiere $H_5 = (N_5, \upsilon_5, \tau_5) := H_1 \bullet H_3$ und $H_6 = (N_6, \upsilon_6, \tau_6) := H_2 \bullet H_4$, dann ist nach Satz und Definition A2.2.7 $V(N_5) = (V(N_1) \setminus A(N_1)) \cup (V(N_3) \setminus E(N_3))$, $A(N_5) = A(N_3)$, $V(N_6) = (V(N_2) \setminus A(N_2)) \cup (V(N_4) \setminus E(N_4))$ und $A(N_6) = A(N_4)$. Da φ ein Isomorphismus ist, ist nach Satz A2.4.5 $\beta(v) \in A(N_4) = A(N_6) \forall v \in A(N_3) = A(N_5)$. Nach Voraussetzung ist β ein Isomorphismus mit $\beta(v) \in SI(N_4) \forall v \in SI(N_3) \Rightarrow \beta(s) \in S(N_4) \forall s \in S(N_3)$, $\beta(v) \in E(N_4, s) \forall v \in E(N_3, s)$ und $\beta(v) \in A(N_4, s) \forall v \in A(N_3, s) \Rightarrow \beta(v) \in V(N_4) \setminus E(N_4) \forall v \in V(N_3) \setminus E(N_3)$ nach Satz A2.1.19.

q.e.d.

Hilfssatz A2.5.25:

Sind $H_1 = (N_1, \upsilon_1, \tau_1)$ und $H_3 = (N_3, \upsilon_3, \tau_3)$ bzw. $H_2 = (N_2, \upsilon_2, \tau_2)$ und $H_4 = (N_4, \upsilon_4, \tau_4)$ je zwei disjunkte, fortlaufend indizierte Subzentren-Netzwerke, $\|H_3\| = 1$, die Produkte $H_1 \bullet H_3$ und $H_2 \bullet H_4$ definiert und $\beta'': H_3 \rightarrow H_4$ und $\beta: H_1 \bullet H_3 \rightarrow H_2 \bullet H_4$ eingeschränkt bewertungserhaltende Isomorphismen und $\beta(v) \in SI(N_4) \forall v \in SI(N_3)$, so ist $\beta''(u) = \beta(u) \forall u \in V(N_3) \setminus E(N_3)$.

Beweis:

Definiere $H_5 = (N_5, \upsilon_5, \tau_5) := H_1 \bullet H_3$ und $H_6 = (N_6, \upsilon_6, \tau_6) := H_2 \bullet H_4$, dann ist nach Satz und Definition A2.2.7 $V(N_5) = (V(N_1) \setminus A(N_1)) \cup (V(N_3) \setminus E(N_3))$, $A(N_5) = A(N_3)$, $V(N_6) = (V(N_2) \setminus A(N_2)) \cup (V(N_4) \setminus E(N_4))$ und $A(N_6) = A(N_4)$.

- a) Sei $u \in A(N_3)$. $\Rightarrow \beta''(u) \in A(N_4)$ nach Satz A2.4.5 und $\upsilon_4(\beta''(u)) = \upsilon_3(u)$. Da $A(N_3) = A(N_5)$ ist, ist nach Satz und

Definition A2.2.7 $\beta(u) \in A(N_6) = A(N_4)$ und $v_3(u) = v_5(u) = v_6(\beta(u)) = v_4(\beta(u)) \Rightarrow \beta''(u), \beta(u) \in A(N_4)$ und $v_4(\beta''(u)) = v_3(u) = v_4(\beta(u)) \Rightarrow \beta''(u) = \beta(u)$.

b) Sei $u \in I(N_3)$. $\Rightarrow \beta''(u) \in I(N_4)$ und $\beta(u) \in I(N_4)$. Da $\|H_3\|=1$ und β'' ein Isomorphismus ist, ist $\|H_4\|=1$. $\Rightarrow \{\beta''(u)\} = I(N_4) = \{\beta(u)\} \Rightarrow \beta''(u) = \beta(u)$.

c) Sei $u \in S(N_3)$. $\Rightarrow \beta''(u) \in S(N_4)$ und $\beta(u) \in S(N_4)$. Da $\|H_3\|=1$ und β'' ein Isomorphismus ist, ist $\|H_4\|=1$. $\Rightarrow \{\beta''(u)\} = S(N_4) = \{\beta(u)\} \Rightarrow \beta''(u) = \beta(u)$.

d) Sei $u \in E(N_3, S)$. Wegen $\|H_3\|=1$ ist $S(N_3) = \{s\}$. $\Rightarrow u \in E(N_3, s)$. Nach Fall c) ist $\beta''(s) = \beta(s)$ und $S(N_4) = \{\beta(s)\}$. $\Rightarrow \beta''(u), \beta(u) \in E(N_4, \beta(s)) = E(N_4, \beta''(s))$. Da β'' und β eingeschränkt bewertungserhaltend sind, ist $v_4(\beta''(u)) = v_3(u) = v_4(\beta(u))$. $\Rightarrow \beta''(u) = \beta(u)$.

e) Sei $u \in A(N_3, S)$. Analog zu Fall d) ist $\beta''(u) = \beta(u)$.

$\Rightarrow \beta''(u) = \beta(u) \quad \forall u \in V(N_3) \setminus E(N_3)$ nach Satz A2.1.19.

q.e.d.

Satz A2.5.27:

Sind $H_1 = (N_1, v_1, \tau_1)$ und $H_3 = (N_3, v_3, \tau_3)$ bzw. $H_2 = (N_2, v_2, \tau_2)$ und $H_4 = (N_4, v_4, \tau_4)$ je zwei disjunkte Subzentren-Netzwerke, wobei H_3 und H_4 äquivalent sind und weder freie äußere Eingänge noch Eingangsverjüngungen besitzen und $\|H_3\|=1$ ist. Sind weiter die Produkte $H_1 \bullet H_3$ und $H_2 \bullet H_4$ definiert und $\varphi: SI(H_1 \bullet H_3) \rightarrow SI(H_2 \bullet H_4)$ eine bestimmende Abbildung deren Restriktion φ'' auf $SI(H_3)$ eine bestimmende Abbildung von $SI(H_3)$ nach $SI(H_4)$ ist, so ist die Restriktion φ' von φ auf $SI(H_1)$ eine bestimmende Abbildung von $SI(H_1)$ nach $SI(H_2)$.

Beweis:

Zeige: Es existiert ein eingeschränkt bewertungserhaltender Isomorphismus $\beta': (N_1, v_1, \tau_1) \rightarrow (N_2, v_2, \tau_2)$, dessen Restriktion auf $SI(H_1)$ identisch zu φ' ist.

Definiere $H_5 = (N_5, v_5, \tau_5) := H_1 \bullet H_3$ und $H_6 = (N_6, v_6, \tau_6) := H_2 \bullet H_4$. Da $\varphi: SI(N_5) \rightarrow SI(N_6)$ eine bestimmende Abbildung ist, existiert nach Satz A2.5.3 genau ein eingeschränkt bewertungserhaltender Isomorphismus $\beta: V(N_5) \rightarrow V(N_6)$ mit $\varphi = \beta|_{SI(N_5)}$. Wegen $H_5 = H_1 \bullet H_3$ und $H_6 = H_2 \bullet H_4$ ist nach Satz und Definition A2.2.7 $V(N_5) = (V(N_1) \setminus A(N_1)) \cup (V(N_3) \setminus E(N_3))$ und $V(N_6) = (V(N_2) \setminus A(N_2)) \cup (V(N_4) \setminus E(N_4))$. Nach Hilfssatz A2.5.23 ist $\beta(v) \in V(N_4) \setminus E(N_4) \quad \forall v \in V(N_3) \setminus E(N_3)$, da $\beta(v) = \varphi(v) \in SI(N_4) \quad \forall v \in SI(N_3)$. $\Rightarrow \beta(v) \in V(N_2) \setminus A(N_2) \quad \forall v \in$

$V(N_1) \setminus A(N_1)$, da φ als Isomorphismus eine Bijektion ist und die beteiligten Mengen endlich sind.

Definiere $\beta' : (N_1, \nu_1, \tau_1) \rightarrow (N_2, \nu_2, \tau_2)$ durch

$$\beta'(v) := \begin{cases} a \in A(N_2) \text{ mit } \nu_2(a) = \nu_1(v) \text{ falls } v \in A(N_1) \\ \beta(v) \text{ sonst} \end{cases}.$$

Da $H_1 \bullet H_3$ bzw. $H_2 \bullet H_4$ definiert ist, ist $\bar{A}(H_1) = \bar{E}(H_3)$ bzw. $\bar{A}(H_2) = \bar{E}(H_4)$. H_3 und H_4 sind äquivalent. $\Rightarrow \bar{E}(H_3) = \bar{E}(H_4) \Rightarrow \bar{A}(H_1) = \bar{A}(H_2)$. $\Rightarrow \beta'$ ist wohldefiniert und bijektiv, da zu jedem $v \in A(N_1)$ genau ein $a \in A(N_2)$ existiert mit $\nu_2(a) = \nu_1(v)$ und die Restriktionen von β' und β auf $V(N_1) \setminus A(N_1)$ identisch sind. Aus denselben Gründen ist β' auch eingeschränkt bewertungserhaltend und die Restriktion von β' auf $SI(H_1)$ identisch zu φ' . Außerdem ist für beliebige $v, v' \in V(N_1) \setminus A(N_1)$ $(v, v') \in K(N_1) \Leftrightarrow (\beta'(v), \beta'(v')) = (\beta(v), \beta(v')) \in K(N_2)$, da β ein Isomorphismus ist. Um zu zeigen, daß auch β' ein eingeschränkt bewertungserhaltender Isomorphismus ist, muß also noch gezeigt werden, daß gilt: Ist $v \in V(N_1) \setminus A(N_1)$ und $a \in A(N_1)$, so ist $(v, a) \in K(N_1) \Leftrightarrow (\beta'(v), \beta'(a)) \in K(N_2)$.

Sei $v \in V(N_1) \setminus A(N_1)$, $a \in A(N_1)$ und $(v, a) \in K(N_1)$. \Rightarrow In N_3 existiert ein äußerer Eingang $e \in E(N_3)$ mit $\nu_3(e) = \nu_1(a)$, da $H_1 \bullet H_3$ definiert ist. (Vgl. Bild A2.25.) N_3 besitzt keine freien äußeren Eingänge. \Rightarrow In N_3 existiert eine Kante $(e, u) \in K(N_3)$ mit $u \in V(N_3) \setminus E(N_3)$. $\Rightarrow (v, u) \in K(N_5) \Rightarrow (\beta(v), \beta(u)) \in K(N_6)$, da β ein Isomorphismus ist. Außerdem ist nach Hilfssatz A2.5.23 $\beta(u) \in V(N_4) \setminus E(N_4)$. Gemäß der Definition von β' ist $\beta(v) = \beta'(v)$, da $v \in V(N_1) \setminus A(N_1)$. $\Rightarrow (\beta'(v), \beta(u)) = (\beta(v), \beta(u)) \in K(N_6) \Rightarrow$ In N_2 existiert ein äußerer Ausgang $a' \in A(N_2)$ mit $(\beta'(v), a') \in K(N_2)$ und in N_4 existiert ein äußerer Eingang $e' \in E(N_4)$ mit $\nu_2(a') = \nu_4(e')$ und $(e', \beta(u)) \in K(N_4)$.

Da $(e, u) \in K(N_3)$ und $H_3 = (N_3, \nu_3, \tau_3)$ und $H_4 = (N_4, \nu_4, \tau_4)$ äquivalent sind, existiert ein eingeschränkt bewertungserhaltender Isomorphismus $\beta'' : (N_3, \nu_3, \tau_3) \rightarrow (N_4, \nu_4, \tau_4)$ mit $(\beta''(e), \beta''(u)) \in K(N_4)$. Nach Hilfssatz A2.5.25 ist $\beta''(u) = \beta(u)$, da $u \in V(N_3) \setminus E(N_3)$. $\Rightarrow (\beta''(e), \beta(u)) \in K(N_4)$ und $(e', \beta(u)) \in K(N_4)$. $\Rightarrow \beta''(e) = e'$, da es in N_4 keine Eingangsverjüngungen gibt. $\Rightarrow \nu_4(e') = \nu_4(\beta''(e)) \Rightarrow \nu_2(a') = \nu_4(e') = \nu_4(\beta''(e)) = \nu_3(e) = \nu_1(a) \Rightarrow a' = \beta'(a) \Rightarrow (\beta'(v), \beta'(a)) = (\beta'(v), a') \in K(N_2)$.

Die umgekehrte Aussage $(v, a) \in K(N_1) \Leftrightarrow (\beta'(v), \beta'(a)) \in K(N_2)$ folgt analog, da die beteiligten Isomorphismen auch Bijektionen sind.

q.e.d.

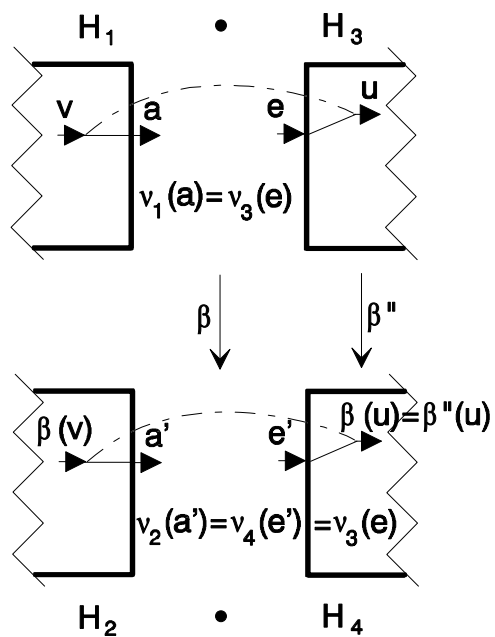


Bild A2.25: Skizze zum Beweis von Satz A2.5.27.

Die bestimmenden Abbildungen spielen im übernächsten Abschnitt eine bedeutende Rolle, wenn der Beweis für vollkommene bzw. α -vollkommene Monopolyide geführt wird. Doch zuvor sind noch einige Sätze über sequentielle Darstellungen vorzubereiten.

5.6 Sequentielle Darstellungen und symmetrische Substitutionsmengen

Um beweisen zu können, daß $\langle N'', \times, \bullet_D \rangle$ bzw. $\langle N', \times, \bullet_D \rangle$ ein vollkommenes bzw. α -vollkommenes Monopolyid ist, ist es notwendig, genauer auf die sogenannten sequentiellen Darstellungen eines fortlaufend indizierten Subzentren-Netzwerkes einzugehen.

A2.6.1 Grundlegende Definitionen

Nach [HÜB95] Definition A2.2.15 versteht man unter einer **sequentuellen Darstellung** eine $3 \times n$ -Matrix der Form

$$S = \begin{pmatrix} [I_{t1}] & [I_{tn}] \\ [H_1] & \dots & [H_n] \\ [I_{b1}] & & [I_{bn}] \end{pmatrix}, \text{ wobei } [I_{ti}], [I_{bi}] \text{ für } 1 \leq i \leq n \text{ Identitäten sind und}$$

das Produkt $([I_{ti}] \times [H_i] \times [I_{bi}]) \bullet ([I_{t_{i+1}}] \times [H_{i+1}] \times [I_{b_{i+1}}])$ für $1 \leq i \leq n-1$ definiert ist. Die Menge **Kern(S)** := $\{[H_i] : 1 \leq i \leq n\}$ heißt dann der **Kern von S**, **L(S)** := n heißt die Länge von S und das Produkt $\omega(S)$:= $([I_{t1}] \times [H_1] \times [I_{b1}]) \bullet \dots \bullet ([I_{tn}] \times [H_n] \times [I_{bn}])$ heißt der **Wert von S**. Ist $\omega(S) = [H]$, dann heißt S auch eine **sequentielle Darstellung von [H]**. Damit definiert jede Zerlegung von [H] eine sequentielle Darstellung von [H] und umgekehrt. Auch ist jede zusammenhängende Folge von Spalten aus S wieder eine sequentielle Darstellung.

Der Einfachheit halber soll nachfolgend statt $S = \begin{pmatrix} [I_{t1}] & [I_{tn}] \\ [H_1] & \dots & [H_n] \\ [I_{b1}] & & [I_{bn}] \end{pmatrix}$

stets die Schreibweise $S = \begin{bmatrix} I_{t1} & I_{tn} \\ H_1 & \dots & H_n \\ I_{b1} & & I_{bn} \end{bmatrix}$ verwendet werden.

Ist $N' \subseteq N_T^F / \sim$ mit $N_T^I \subseteq N'$, so sei **SEQ(N')** als die Menge aller sequentiellen Darstellungen S mit $\text{Kern}(S) \subseteq N'$ definiert. Auf **SEQ(N')** ist für $S, S' \in \text{SEQ}(N')$ das Produkt **S•S'** genau dann als die Konkatenation von S und S' definiert, wenn das Produkt $[I_{tn}] \times [H_n] \times [I_{bn}] \bullet ([I_{t1'}] \times [H_{1'}] \times [I_{b1'}])$ definiert ist, d.h. die letzte Spalte von S ist passend zur ersten Spalte von S'. (Vgl. [HÜB95] Definition und Satz A2.2.6.) Damit kann jede zusammenhängende Folge von Spalten von S in der Form $S^{(i)} \bullet S^{(i+1)} \bullet \dots \bullet S^{(k)}$ dargestellt werden, wenn man **S^(j)** als die j-te Spalte von S definiert.

Weiter ist es notwendig auch auf die Begriffe "symmetrische Substitutionsmenge" und "Substitutionsbasis" einzugehen. Dabei heißt nach [HÜB95] Definition A2.4.2 eine Teilmenge ρ von Paaren aus $SEQ(N') \times SEQ(N')$ eine **symmetrische Substitutionsmenge von $SEQ(N')$** , wenn aus $(S, S') \in \rho$ folgt: $(S', S) \in \rho$ und $\omega(S) = \omega(S')$. Das heißt insbesondere auch, das es sich bei S und S' um zwei (in der Regel verschiedene) sequentielle Darstellungen derselben Äquivalenzklasse handelt.

Ist eine symmetrische Substitutionsmenge ρ von $SEQ(N')$ gegeben, so heißen nach [HÜB95] Definition A2.4.4 zwei sequentielle Darstellungen S_1 und S_2 aus $SEQ(N')$ **bzgl. ρ direkt ineinander überführbar**, wenn sich S_1 und S_2 nur in einer zusammenhängenden Folge von Spalten S_1' bzw. S_2' unterscheiden und das Paar (S_1', S_2') Element von ρ ist. Als nächstes wird der Begriff der Überführbarkeit von sequentiellen Darstellungen dahingehend erweitert, daß S und S' aus $SEQ(N')$ **bzgl. ρ ineinander überführbar** heißen (in Zeichen: $S \rightarrow_{\rho} S'$), wenn eine endliche Folge von sequentiellen Darstellungen S_1, \dots, S_m existiert mit $S = S_1$, $S' = S_m$ und S_j und S_{j+1} sind für $1 \leq j \leq m-1$ bzgl. ρ direkt ineinander überführbar. (Vgl. [HÜB95] Definition A2.4.6.) Sind zwei sequentielle Darstellungen bzgl. ρ ineinander überführbar, so besitzen sie nach [HÜB95] Satz A2.4.8 (g) denselben Wert. Sind umgekehrt je zwei sequentielle Darstellungen mit demselben Wert bzgl. ρ ineinander überführbar, so nennt man ρ eine **Substitutionsbasis von $SEQ(N')$** . (Vgl. [HÜB95] Definition A2.4.10.) ρ ist also genau dann eine Substitutionsbasis von $SEQ(N')$, wenn man je zwei sequentielle Darstellungen einer Äquivalenzklasse $[H]$ bzgl. ρ durch iteratives Substituieren zusammenhängender Folgen von Spalten ineinander überführen kann.

Trivialerweise ist $SEQ(N') \times SEQ(N')$ eine Substitutionsbasis von $SEQ(N')$. Im Normalfall ist man jedoch an einer möglichst "kleinen" bzw. "einfachen" Substitutionsbasis von $SEQ(N')$ interessiert. Nachfolgend werden nun einige symmetrische Substitutionsmengen vorgestellt, die unter gewissen Umständen zu einer Substitutionsbasis von $SEQ(N')$ vereinigt werden können. Dabei wird als bekannt vorausgesetzt, daß die Vereinigung endlich vieler symmetrischer Substitutionsmengen von $SEQ(N')$ wieder eine symmetrische Substitutionsmenge von $SEQ(N')$ ist.

A2.6.2 Spezielle symmetrische Substitutionsmengen

Sind S, S', S'' sequentielle Darstellungen aus $SEQ(N')$ und von

der Form $S = \begin{bmatrix} I_{t1} & I_{t2} \\ H_1 & H_2 \\ I_{b1} & I_{b2} \end{bmatrix}$, $S' = \begin{bmatrix} I_{t1} \\ H_1 \\ I_{b1} \end{bmatrix}$ und $S'' = \begin{bmatrix} I_{t2} \\ H_2 \\ I_{b2} \end{bmatrix}$, dann heißt das Paar

(S, S') bzw. (S', S) eine **Rechtskürzung** bzw. **Rechtserweiterung in $SEQ(N')$** , wenn $[H_2]$ eine Identität ist. Umgekehrt heißt das Paar (S, S'') bzw. (S'', S) eine **Linkskürzung** bzw. **Linkserweiterung in $SEQ(N')$** , wenn $[H_1]$ eine Identität ist. (Vgl. [HÜB95] Definition A2.7.18.) Es ist leicht einzusehen, daß die Menge $\rho_x(N')$ aller Rechts- und Linkskürzungen bzw. -erweiterungen in $SEQ(N')$ eine symmetrische Substitutionsmenge von $SEQ(N')$ ist.

Sind S und S' zwei sequentielle Darstellungen aus $SEQ(N')$, dann heißt das Paar (S, S') nach [HÜB95] Definition A2.7.24 eine **Vertauschung in $SEQ(N')$** , wenn S und S' in der Form (a) oder (b) dargestellt werden können:

$$(a) \quad S = \begin{bmatrix} I_{t1} & I_{t2} \\ H_1 & H_2 \\ I_{b1} & I_{b2} \end{bmatrix}, \quad S' = \begin{bmatrix} I_{t2} & I_{t1}' \\ H_2 & H_1 \\ I_{b1}' & I_{b1} \end{bmatrix} \quad \text{und es existiert eine}$$

Identität $[I_m]$ mit der Eigenschaft

$$[I_{t1}] = [I_{t2}] \times 1_1([H_2]) \times [I_m], \quad [I_{b2}] = [I_m] \times 1_r([H_1]) \times [I_{b1}],$$

$$[I_{t2}'] = [I_{t2}] \times 1_r([H_2]) \times [I_m] \quad \text{und} \quad [I_{b1}'] = [I_m] \times 1_1([H_1]) \times [I_{b1}].$$

$$(b) \quad S = \begin{bmatrix} I_{t1} & I_{t2} \\ H_1 & H_2 \\ I_{b1} & I_{b2} \end{bmatrix}, \quad S' = \begin{bmatrix} I_{t1}' & I_{t1} \\ H_2 & H_1 \\ I_{b2} & I_{b2}' \end{bmatrix} \quad \text{und es existiert eine}$$

Identität $[I_m]$ mit der Eigenschaft

$$[I_{t2}] = [I_{t1}] \times 1_r([H_1]) \times [I_m], \quad [I_{b1}] = [I_m] \times [1_1([H_2])] \times [I_{b2}],$$

$$[I_{t1}'] = [I_{t1}] \times 1_1([H_1]) \times [I_m] \quad \text{und} \quad [I_{b2}'] = [I_m] \times 1_r([H_2]) \times [I_{b2}].$$

Da die Bedingungen (a) und (b) symmetrisch formuliert sind und nach Beweis von [HÜB95] Satz A2.7.26 für eine Vertauschung (S, S')

$\omega(S) = \omega(S')$ ist, ist die Menge $\rho_v(N')$ aller Vertauschungen in $SEQ(N')$ eine symmetrische Substitutionsmenge von $SEQ(N')$. (Bild A2.27 zeigt in anschaulicher Form ein Beispiel für eine Vertauschung.)

Sind S und S' zwei sequentielle Darstellungen aus $SEQ(N')$ und existiert ein echtes Untermonopolyid U von $\langle N', \times, \bullet_D \rangle$ mit

$N_T^I \subseteq U \subseteq N'$, $\text{Kern}(S) \subseteq U$ und $S' = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega(S) \\ 0 \end{bmatrix}$, dann heißt das Paar (S, S')

nach [HÜB95] Definition A2.7.28 eine **Verschmelzung in $\text{SEQ}(N')$** . Analog heißt das Paar (S', S) eine **Zerlegung in $\text{SEQ}(N')$** . (Obwohl diese Definition für beliebige Untermonopolyide U mit $N_T^I \subseteq U \subseteq N'$ gilt, ist nachfolgend allerdings nur der Fall $U = N_T^0$ interessant.) Da die Definitionen für Verschmelzungen und Zerlegungen symmetrisch formuliert sind, bildet die Menge $\rho_Z(N')$ aller Zerlegungen und Verschmelzungen in $\text{SEQ}(N')$ wieder eine symmetrische Substitutionsmenge von $\text{SEQ}(N')$.

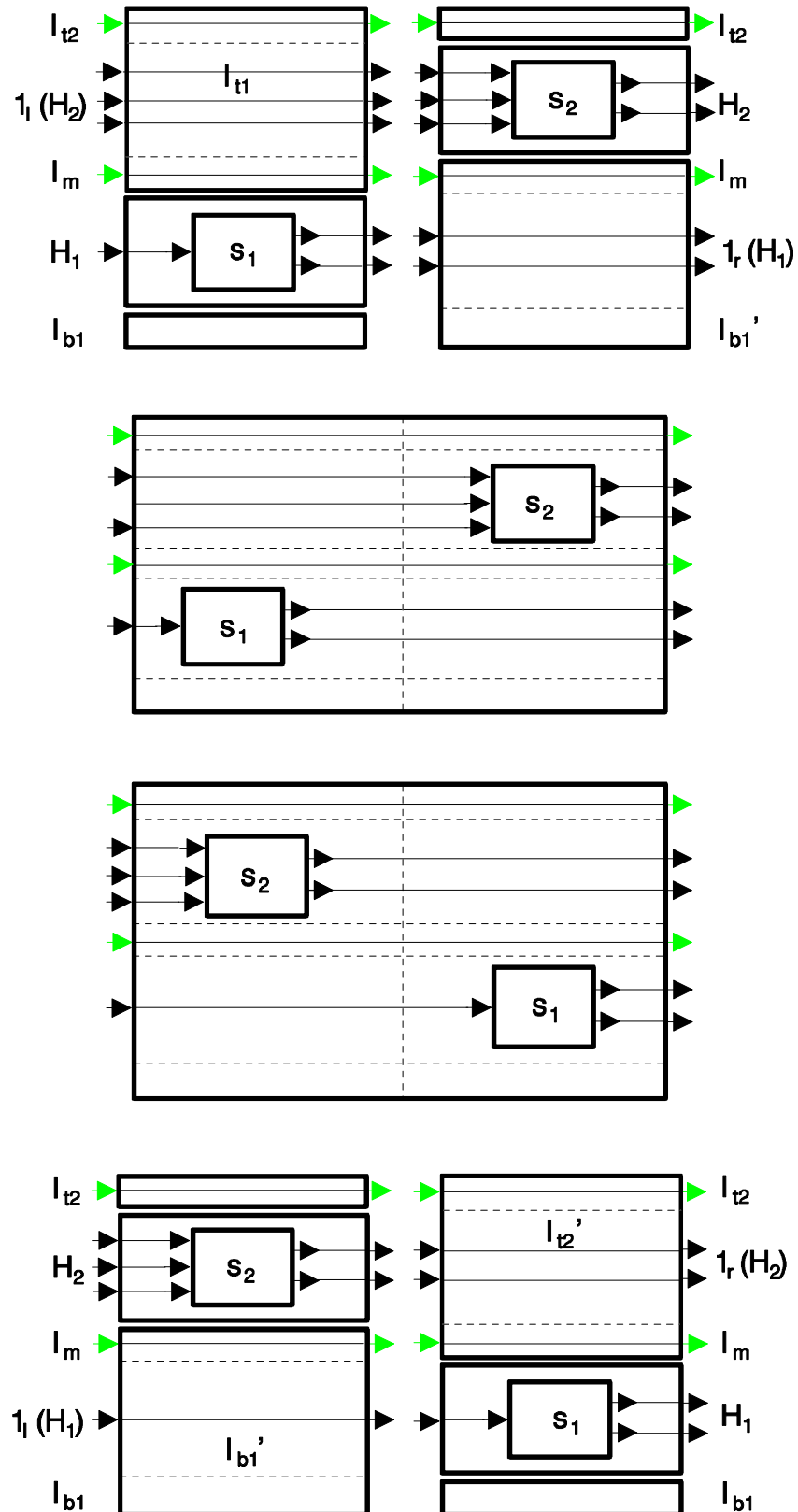


Bild A2.27: Die sequentiellen Darstellungen S (oben) und S' (unten) definieren zusammen die Vertauschung (S, S') . An den Netzwerken in der Mitte kann man sehen, daß beide denselben Wert besitzen.

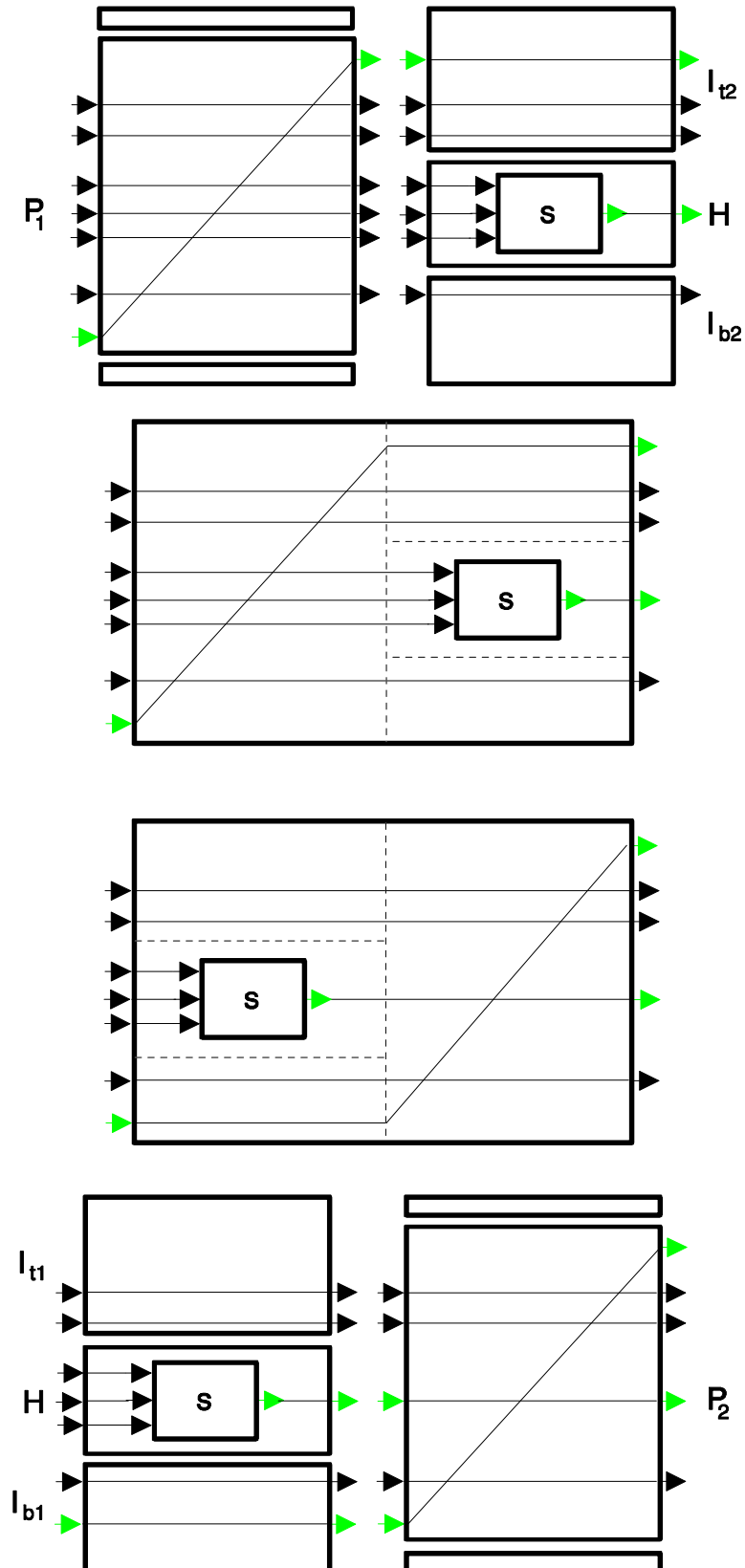


Bild A2.29: Die sequentiellen Darstellungen S (oben) und S' (unten) definieren zusammen die Überbrückung (S, S') . An den Netzwerken in der Mitte kann man sehen, daß beide denselben Wert besitzen.

Sind S und S' zwei sequentielle Darstellungen aus $SEQ(N')$ und $N_T^P \subseteq N'$, dann heißt das Paar (S, S') nach [HÜB95] Definition A2.7.34 eine **Überbrückung in $SEQ(N')$** , wenn S und S' in der Form (a) oder (b) dargestellt werden können:

$$(a) \quad S = \begin{bmatrix} 0 & I_{t2} \\ P_1 & H \\ 0 & I_{b2} \end{bmatrix}, \quad S' = \begin{bmatrix} I_{t1} & 0 \\ H & P_2 \\ I_{b1} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und } [P_1] \text{ und } [P_2] \text{ sind Permutationen}$$

mit $[P_1] \bullet ([I_{t2}] \times [H] \times [I_{b2}]) = ([I_{t1}] \times [H] \times [I_{b1}]) \bullet [P_2]$.

$$(b) \quad S = \begin{bmatrix} I_{t1} & 0 \\ H & P_2 \\ I_{b1} & 0 \end{bmatrix}, \quad S' = \begin{bmatrix} 0 & I_{t2} \\ P_1 & H \\ 0 & I_{b2} \end{bmatrix} \quad \text{und } [P_1] \text{ und } [P_2] \text{ sind Permutationen}$$

mit $([I_{t1}] \times [H] \times [I_{b1}]) \bullet [P_2] = [P_1] \bullet ([I_{t2}] \times [H] \times [I_{b2}])$.

Da die Bedingungen (a) und (b) symmetrisch formuliert sind, ist die Menge $\rho_B(N')$ aller Überbrückungen in $SEQ(N')$ eine symmetrische Substitutionsmenge von $SEQ(N')$. (Bild A2.29 zeigt in anschaulicher Form ein Beispiel für eine Überbrückung.)

Obige symmetrische Substitutionsmengen wurden selbstverständlich nicht in beliebiger Art und Weise definiert, vielmehr wurden sie so ausgewählt, daß im Fall $N'' = N_T^I \cup N_T^{1A}$ bzw. $N' = N_T^0 \cup N_T^{(1)}$ die symmetrische Substitutionsmenge $\rho'' := \rho_X(N'') \cup \rho_V(N'')$ bzw. $\rho' := \rho_X(N') \cup \rho_V(N') \cup \rho_Z(N') \cup \rho_B(N')$ eine Substitutionsbasis von $SEQ(N')$ bzw. $SEQ(N'')$ ist. Dies wird in den nachfolgenden Abschnitten implizit bewiesen.

A2.6.3 Kriterien für Vertauschungen und Überbrückungen

Das nachfolgende Kriterium für Vertauschungen ist sehr wichtig, da es immer dann angewendet werden kann, wenn es von einem Subzentrum keinen Pfad zu einem anderen Subzentrum gibt.

Satz A2.6.1:

Ist $S = \begin{bmatrix} I_{t1} & I_{t2} \\ H_1 & H_2 \\ I_{b1} & I_{b2} \end{bmatrix} \in \text{SEQ}(N')$ eine sequentielle Darstellung und gibt

es von $I_{t1} \times H_1 \times I_{b1}$ nach $I_{t2} \times H_2 \times I_{b2}$ keine virtuelle Verbindungskante (a, e) mit $a \in A(H_1)$ und $e \in E(H_2)$, so existieren Identitäten

$[I_{t1}']$, $[I_{b1}']$, $[I_{t2}']$ und $[I_{b2}']$ derart, daß für $S' = \begin{bmatrix} I_{t1}' & I_{t2}' \\ H_2 & H_1 \\ I_{b1}' & I_{b2}' \end{bmatrix}$ das

Paar (S, S') eine Vertauschung aus $\rho_V(N')$ ist.

Beweis:

Definiere $H_3 := (N_3, \nu_3, \tau_3) := I_{t1} \times H_1 \times I_{b1}$ und $H_4 := (N_4, \nu_4, \tau_4) := I_{t2} \times H_2 \times I_{b2}$. Da es von H_3 nach H_4 keine virtuelle Verbindungskante (a, e) mit $a \in A(H_1)$ und $e \in E(H_2)$ gibt, ist entweder $\nu_3(a) > \nu_4(e) \forall a \in A(H_1)$ und $e \in E(H_2)$ oder $\nu_3(a) < \nu_4(e) \forall a \in A(H_1)$ und $e \in E(H_2)$.

a) Sei $\nu_3(a) > \nu_4(e) \forall a \in A(H_1)$ und $e \in E(H_2)$. Unterteile die äußeren Ausgänge aus $A(H_3)$ in 5 Gruppen:

$$\begin{aligned} G1 &:= \{a' \in A(H_3) : \nu_3(a') < \nu_4(e) \forall e \in E(H_2)\} \\ G2 &:= \{a' \in A(H_3) : \min(\{\nu_4(e) : e \in E(H_2)\}) \leq \nu_3(a') \leq \max(\{\nu_4(e) : e \in E(H_2)\})\} \\ G3 &:= \{a' \in A(H_3) : \max(\{\nu_4(e) : e \in E(H_2)\}) < \nu_3(a') < \min(\{\nu_3(a) : a \in A(H_1)\})\} \\ G4 &:= \{a' \in A(H_3) : \min(\{\nu_3(a) : a \in A(H_1)\}) \leq \nu_3(a') \leq \max(\{\nu_3(a) : a \in A(H_1)\})\} \\ G5 &:= \{a' \in A(H_3) : \max(\{\nu_3(a) : a \in E(H_1)\}) < \nu_3(a')\}. \end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung $\nu_3(a) > \nu_4(e) \forall a \in A(H_1)$ und $e \in E(H_2)$, sind die Mengen $G1$ - $G5$ paarweise disjunkt. (Vgl. Bild A2.27 oben.) Jede dieser Gruppen definiert nun auf eindeutige Art und Weise eine Identität $[I_i]$ mit $1 \leq i \leq 5$. Es ist leicht einzusehen, daß $[I_2] = 1_l([H_2])$ und $[I_4] = 1_r([H_1])$ ist. Außerdem ist $[I_1] \times [I_2] \times [I_3] = [I_{t1}]$ und $[I_5] = [I_{b1}]$, sowie $[I_1] = [I_{t2}]$ und $[I_3] \times [I_4] \times [I_5] = [I_{b2}]$. Definiert man nun $[I_{t1}'] := [I_1]$, $[I_{b1}'] := [I_3] \times [I_4] \times [I_5]$, $[I_{t1}'] := [I_1] \times [I_2] \times [I_3]$, $[I_{t1}'] := [I_5]$, und $[I_m] := [I_3]$, so erfüllt das Paar (S, S') die Bedingung (a) für Vertauschungen.

- b) Sei $v_3(a) < v_4(e) \forall a \in A(H_1)$ und $e \in E(H_2)$. Dann kann analog zu a) eine sequentielle Darstellung S' definiert werden, so daß das Paar (S, S') die Bedingung (b) für Vertauschungen erfüllt.

q.e.d.

Zwei vergleichbare Sätze für Überbrückungen erhält man, wenn es sich bei $[H_2]$ oder $[H_1]$ um eine vorwärts- oder rückwärtszyklische Permutation handelt.

Satz A2.6.3:

Ist $S = \begin{bmatrix} I_{t1} & 0 \\ H & P \\ I_{b1} & 0 \end{bmatrix} \in \text{SEQ}(N')$ eine sequentielle Darstellung, $[P]$ eine

vorwärtszyklische Permutation und $[I_{b1}] \neq 0$, oder $[P]$ eine rückwärtszyklische Permutation und $[I_{t1}] \neq 0$, so existieren Identitäten $[I_{t2}]$ und $[I_{b2}]$ und eine Permutation P' derart, daß

für $S' = \begin{bmatrix} 0 & I_{t2} \\ P' & H \\ 0 & I_{b2} \end{bmatrix}$ das Paar (S, S') eine Überbrückung aus $\rho_B(N')$

ist. (Vgl. Bild A2.29 unten.)

Beweis:

- a) Sei $[P]$ eine vorwärtszyklische Permutation mit $P=(N, \nu, \tau)$ und $[I_{b1}] \neq 0$. Ist $\tau(e)$ der Typ der äußeren Eingangs e von P mit dem höchsten Index $\nu(e)$, dann definiert der Typeneingangsvektor $(\tau(e))$ eindeutig eine Identität $[I_m]$. Da $[I_{b1}] \neq 0$ und das Produkt $([I_{t1}] \times [H] \times [I_{b1}]) \cdot [P]$ definiert ist, existiert eine weitere Identität $[I_{b1}']$ mit $[I_{b1}] = [I_{b1}'] \times [I_m]$. (Vgl. Bild A2.29 unten.) Definiere $[I_{b2}] := [I_{b1}']$, $[I_{t2}] := [I_m] \times [I_{t1}]$ und $[P']$ bzw. $[P'']$ als die nach Satz A2.4.11 durch den Typeneingangsvektor bzw. Typenausgangsvektor von $[I_{t2}] \times [H] \times [I_{b2}]$ eindeutig bestimmte vorwärts- bzw. rückwärtszyklische Permutation, dann sind die Produkte $[P'] \cdot ([I_{t2}] \times [H] \times [I_{b2}])$ und $([I_{t2}] \times [H] \times [I_{b2}]) \cdot [P']$ definiert und nach Satz A2.4.17 $[P'] \cdot ([I_{t2}] \times [H] \times [I_{b2}]) \cdot [P''] = [P'] \cdot ([I_m] \times ([I_{t1}] \times [H] \times [I_{b2}])) \cdot [P''] = ([I_{t1}] \times [H] \times [I_{b2}]) \times [I_m] = [I_{t1}] \times [H] \times ([I_{b1}'] \times [I_m]) = [I_{t1}] \times [H] \times [I_{b1}] \Rightarrow [P'] \cdot ([I_{t2}] \times [H] \times [I_{b2}]) = [P'] \cdot ([I_{t2}] \times [H] \times [I_{b2}]) \cdot [P''] \cdot [P'']^{-1} = ([I_{t1}] \times [H] \times [I_{b1}]) \cdot [P'']^{-1}$. Nach Satz A2.4.13 ist $[P'']^{-1}$ eine vorwärtszyklische Permutation, da $[P'']$ eine rückwärtszyklische Permutation ist. Damit sind $[P'']^{-1}$ und $[P]$ zwei vorwärtszyklische Permutationen. Da nach Voraussetzung auch das Produkt $([I_{t1}] \times [H] \times [I_{b1}]) \cdot [P]$ definiert ist, besitzen $[P'']^{-1}$ und $[P]$ denselben Typeneingangsvektor und sind somit nach Satz A2.4.11 identisch. $\Rightarrow [P'] \cdot ([I_{t2}] \times [H] \times [I_{b2}]) = ([I_{t1}] \times [H] \times [I_{b1}]) \cdot [P'']^{-1} = ([I_{t1}] \times [H] \times [I_{b1}]) \cdot [P]$. \Rightarrow Das Paar

(S, S') erfüllt die Voraussetzung (b) für eine Überbrückung aus $\rho_B(N')$.

b) Analog zu a) unter Verwendung von Satz A2.4.19. q.e.d.

Ohne besondere Anstrengungen können die oben gegebenen Kriterien für erweitert vorwärts- oder rückwärtszyklische Permutationen verallgemeinert werden.

Satz A2.6.5:

Ist $S = \begin{bmatrix} 0 & I_{t_2} \\ P_1 & H \\ 0 & I_{b_2} \end{bmatrix} \in \text{SEQ}(N')$ eine sequentielle Darstellung und $[P_1]$

eine erweitert vorwärtszyklische (rückwärtszyklische) Permutation mit $[P_1'] := [(N_1', \nu_1', \tau_1')]$ als vorwärtszyklische (rückwärtszyklische) Permutation und gibt es zu jedem äußeren Eingang e von $[H]$ eine virtuelle Verbindungskante (a, e) von einem äußeren Ausgang a von $[P_1']$ mit $\nu_1'(a) \neq 1$ ($\nu_1'(a) \neq |A(P_1')|$), so existieren Identitäten $[I_{t_1}]$ und $[I_{b_1}]$ sowie eine erweitert vorwärtszyklische (rückwärtszyklische)

Permutation $[P_2]$ derart, daß für $S' = \begin{bmatrix} I_{t_1} & 0 \\ H & P_2 \\ I_{b_1} & 0 \end{bmatrix}$ das Paar (S, S')

eine Überbrückung aus $\rho_B(N')$ ist. (Vgl. Bild A2.29.)

Beweis:

a) Sei $[P_1]$ eine erweitert vorwärtszyklische Permutation und $[I_{t_1}']$ bzw. $[I_{b_1}']$ die obere bzw. untere Identität von $[P_1]$. Da es zu jedem äußeren Eingang e von $[H]$ eine virtuelle Verbindungskante (a, e) von einem äußeren Ausgang a von $[P_1']$ mit $\nu_1'(a) \neq 1$ gibt, existieren Identitäten $[I_{t_2}']$, $[I_{b_2}']$ und $[I_m]$, mit $[I_{t_2}] = [I_{t_1}'] \times [I_m] \times [I_{t_2}']$ bzw. $[I_{b_2}] = [I_{b_2}'] \times [I_{b_1}']$, wobei $[I_m]$ die durch den ersten äußeren Ausgang von $[P_1']$ definierte Identität ist. (Vgl. Bild A2.29.) Definiere $[H'] = [I_{t_2}'] \times [H] \times [I_{b_2}']$ und $[P_2']$ die durch den Typenausgangsvektor von $[H'] \times [I_m]$ eindeutig definierte vorwärtszyklische Permutation. \Rightarrow $([H'] \times [I_m]) \bullet [P_2']$ ist definiert. \Rightarrow $([I_{t_1}'] \times [H'] \times [I_m] \times [I_{b_1}']) \bullet ([I_{t_1}'] \times [P_2'] \times [I_{b_1}'])$ ist definiert. Definiere weiter $[I_{t_1}] := [I_{t_1}'] \times [I_{t_2}']$, $[I_{b_1}] := [I_{b_2}'] \times [I_m] \times [I_{b_1}']$ und $[P_2] := [I_{t_1}'] \times [P_2'] \times [I_{b_1}']$. \Rightarrow $[P_2]$ ist eine erweitert vorwärtszyklische Permutation und das Produkt $([I_{t_1}] \times [H] \times [I_{b_1}]) \bullet [P_2]$ ist definiert, da $[I_{t_1}'] \times [H'] \times [I_m] \times [I_{b_1}'] = [I_{t_1}'] \times ([I_{t_2}'] \times [H] \times [I_{b_2}']) \times [I_m] \times [I_{b_1}'] = ([I_{t_1}] \times [H] \times [I_{b_1}])$ und $[P_2] = [I_{t_1}'] \times [P_2'] \times [I_{b_1}']$ ist. Bleibt also noch zu zeigen: $[P_1] \bullet ([I_{t_2}] \times [H] \times [I_{b_2}]) = ([I_{t_1}] \times [H] \times [I_{b_1}]) \bullet [P_2]$, dann ist (S, S') mit obiger

Definition von S' nach Fall (a) eine Überbrückung.
 Natürlich sind die Produkte $[P_1'] \bullet ([I_m] \times [H'])$ und $([H'] \times [I_m]) \bullet [P_2']$ definiert. Nach Satz A2.4.15 ist damit auch das Produkt $([I_m] \times [H']) \bullet [P_2']^{-1}$ definiert. \Rightarrow
 $[P_1'] \bullet ([I_m] \times [H']) \bullet [P_2']^{-1} = [H'] \times [I_m]$ nach Satz A2.4.17. \Rightarrow

$[P_1'] \bullet ([I_m] \times [H']) = [H'] \times [I_m] \bullet [P_2'] \Rightarrow$
 $([I_{t_1}'] \times [P_1'] \times [I_{b_1}']) \bullet ([I_{t_1}'] \times [I_m] \times [H'] \times [I_{b_1}']) =$
 $[I_{t_1}'] \times [H'] \times [I_m] \times [I_{b_1}'] \bullet [I_{t_1}'] \times [P_2'] \times [I_{b_1}']$ nach [HÜB95] Satz
 A2.1.20 (6). Wegen $[P_1] = [I_{t_1}'] \times [P_1'] \times [I_{b_1}']$, $[P_2] =$
 $[I_{t_1}'] \times [P_2'] \times [I_{b_1}']$ und $[H'] = [I_{t_2}'] \times [H] \times [I_{b_2}']$ folgt weiter
 $[P_1] \bullet ([I_{t_1}'] \times [I_m] \times [I_{t_2}'] \times [H] \times [I_{b_2}'] \times [I_{b_1}']) =$
 $[I_{t_1}'] \times [I_{t_2}'] \times [H] \times [I_{b_2}'] \times [I_m] \times [I_{b_1}'] \bullet [P_2]$. Schließlich folgt
 mit $[I_{t_2}] = [I_{t_1}'] \times [I_m] \times [I_{t_2}']$, $[I_{b_2}] = [I_{b_2}'] \times [I_{b_1}']$,
 $[I_{t_1}] = [I_{t_1}'] \times [I_{t_2}']$ und $[I_{b_1}] = [I_{b_2}'] \times [I_m] \times [I_{b_1}']$ die
 Behauptung $[P_1] \bullet ([I_{t_2}] \times [H] \times [I_{b_2}]) = ([I_{t_1}] \times [H] \times [I_{b_1}]) \bullet [P_2]$.

b) Sei $[P]$ eine erweitert rückwärtszyklische Permutation und $v_1'(a) \neq |A(P)|$, so folgt die Behauptung analog zu a).

q.e.d.

Satz A2.6.7:

Ist $S = \begin{bmatrix} I_{t_1} & 0 \\ H & P_2 \\ I_{b_1} & 0 \end{bmatrix} \in \text{SEQ}(N')$ eine sequentielle Darstellung und $[P_2]$

eine erweitert rückwärtszyklische (vorwärtszyklische) Permutation mit $[P_2'] := (N_2', v_2', \tau_2')$ als rückwärtszyklische (vorwärtszyklische) Permutation und gibt es zu jedem äußeren Ausgang a von $[H]$ eine virtuelle Verbindungskante (a, e) zu einem äußeren Eingang e von $[P_2']$ mit $v_2'(e) \neq 1$ ($v_2'(e) \neq |E(P_2')|$), so existieren Identitäten $[I_{t_2}]$ und $[I_{b_2}]$ sowie eine erweitert rückwärtszyklische (vorwärtszyklische)

Permutation $[P_1]$ derart, daß für $S' = \begin{bmatrix} 0 & I_{t_2} \\ P_1 & H \\ 0 & I_{b_2} \end{bmatrix}$ das Paar (S, S')

eine Überbrückung aus $\rho_B(N')$ ist. (Vgl. Bild A2.29 unten.)

Beweis:

Analog zum Beweis von Satz A2.6.5.

Die oben gegebenen Kriterien für Vertauschungen und Überbrückungen können nun dazu verwendet werden, ein Verfahren herzuleiten, wie innerhalb einer sequentiellen Darstellung zwei nebeneinander stehende, einfache Netzwerke in ihren Positionen vertauscht werden können, auch wenn sich zwischen beiden Faktoren noch ein fast leeres Netzwerk $[H]$ befindet.

5.7 Vollkommene Untermonopolyide

Um nun beweisen zu können, daß das von $N := N_T^I \cup N_T^{1A}$ erzeugte Untermonopolyid ein vollkommenes ist, sind noch einige wenige Vorarbeiten notwendig. Dabei werden einige Sätze allgemeiner gehalten, als es zunächst notwendig wäre. Sie werden jedoch weiter unten in dieser Form noch einmal benötigt.

Als erstes ist es notwendig darauf einzugehen, wie sich bestimmende Abbildungen verhalten, wenn zwei sequentielle Darstellungen desselben Netzwerks ineinander überführt werden.

Satz A2.7.1:

Ist $N' \subseteq N_T^F / \sim$ mit $N_T^I \subseteq N'$, $S = \begin{bmatrix} I_{t1} & I_{tn} \\ H_1 & \dots & H_n \\ I_{b1} & & I_{bn} \end{bmatrix} \in \text{SEQ}(N')$ und $\omega(S) = [H]$, so existieren für die Äquivalenzklassen $[H], [H_1], \dots, [H_n]$ paarweise disjunkte Repräsentanten derart, daß $SI(H) = \bigcup_{i=1}^n SI(H_i)$ ist.

Beweis:

Wähle für die Äquivalenzklassen $[H_1], \dots, [H_n]$ beliebige, paarweise disjunkte Repräsentanten. Da $\omega(S)$ als das Produkt $([I_{t1}] \times [H_1] \times [I_{b1}]) \cdot \dots \cdot ([I_{tn}] \times [H_n] \times [I_{bn}])$ definiert ist und das serielle bzw. parallele Produkt zweier Äquivalenzklassen über deren Repräsentanten festgelegt ist, ist für das Netzwerk $H := (I_{t1} \times H_1 \times I_{b1}) \cdot \dots \cdot (I_{tn} \times H_n \times I_{bn})$ $[H] = \omega(S)$. Gemäß der Definition des seriellen bzw. parallelen Produkts ist dann $SI(H) = \bigcup_{i=1}^n SI(H_i)$.

q.e.d.

Satz A2.7.3:

Ist $N' \subseteq N_T^F / \sim$ mit $N_T^I \subseteq N'$, $S = \begin{bmatrix} I_{t1} & I_{tn} \\ H_1 & \dots & H_n \\ I_{b1} & & I_{bn} \end{bmatrix}, S' \in \text{SEQ}(N')$ und geht S'

durch schrittweise durchgeführte Kürzungen, Erweiterungen, Vertauschungen, Zerlegungen, Verschmelzungen oder Überbrückungen aus S hervor, so gibt es für $[H] := \omega(S)$ und $[H'] := \omega(S')$ Repräsentanten derart, daß $SI(H) = SI(H')$ ist.

Beweis:

Wähle für die Äquivalenzklassen $[H_1], \dots, [H_n]$ beliebige, paarweise disjunkte Repräsentanten. Da S' durch schrittweise durchgeführte Kürzungen, Erweiterungen, Vertauschungen oder Überbrückungen aus S hervorgeht, können nach den Definitionen für diese elementaren Substitutionen die Repräsentanten der neu hinzukommenden Spalten gerade so gewählt werden, daß die Netzwerke aus dem Kern von S die mindestens einen Interimknoten oder ein Subzentrum enthalten auch wieder im Kern

von S' auftreten. Damit gibt es nach Satz A2.7.1 für $[H] := \omega(S)$ und $[H'] := \omega(S')$ paarweise disjunkte Repräsentanten derart, daß $SI(H) = \bigcup_{i=1}^n SI(H_i)$ und $SI(H') = \bigcup_{i=1}^n SI(H_i)$. $\Rightarrow SI(H) = SI(H')$.

q.e.d.

Satz A2.7.5:

Sei $N_T^{1A} \subseteq N_T^F / \sim$ eine beliebige, nicht leere Menge von Äquivalenzklassen einfacher Netzwerke ohne Schleifen, in denen jedes Subzentrum mindestens einen Ausgang besitzt, $N'' = N_T^I \cup N_T^{1A}$, $S \in \text{SEQ}(N')$ mit $\|\omega(S)\| \geq 1$ und geht $S' \in \text{SEQ}(N')$ durch schrittweise durchgeführte Kürzungen, Erweiterungen oder Vertauschungen aus S hervor, so existieren Repräsentanten H und H' von $[H] := \omega(S)$ bzw. $[H'] := \omega(S')$ derart, daß $SI(H) = SI(H')$ und die identische Abbildung $\text{id}: SI(H) \rightarrow SI(H)$ eine bestimmende Abbildung ist.

Beweis:

Der Beweis ist vollkommen analog zum Beweis des nächsten Satzes, wobei auf Zerlegungen, Verschmelzungen und Überbrückungen nicht eingegangen werden muß.

Satz A2.7.7:

Sei $N_T^{(1)} \subseteq N_T^F / \sim$ eine beliebige nicht leere Menge von Äquivalenzklassen einfacher Interimknoten oder einfacher Netzwerke mit oder ohne Schleifen, $N' = N_T^0 \cup N_T^{(1)}$, $S \in \text{SEQ}(N')$ mit $\|\omega(S)\| \geq 1$ und geht $S' \in \text{SEQ}(N')$ durch schrittweise durchgeführte Kürzungen, Erweiterungen, Vertauschungen, Überbrückungen, Zerlegungen oder Verschmelzungen aus S hervor, so existieren Repräsentanten H und H' von $[H] := \omega(S)$ bzw. $[H'] := \omega(S')$ derart, daß $SI(H) = SI(H')$ und die identische Abbildung $\text{id}: SI(H) \rightarrow SI(H)$ eine bestimmende Abbildung ist.

Beweis:

a) Sei an den durchzuführenden Überführungsschritten stets mindestens ein Subzentrum oder ein Interimknoten beteiligt. (Insbesondere sind damit Zerlegungen oder Verschmelzungen zunächst ausgeschlossen.)

Betrachte zunächst den Fall, daß $L(S) \leq 2$, $L(S') \leq 2$, $\|\omega(S)\| \geq 1$ und S' durch genau eine Kürzung, Erweiterung, Vertauschung oder Überbrückung aus S hervorgeht. \Rightarrow Für $\rho := \rho_X(N') \cup \rho_Y(N') \cup \rho_Z(N') \cup \rho_B(N')$ ist dann $S \xrightarrow{\rho} S'$. $\Rightarrow \omega(S) = \omega(S')$ nach [HÜB95] Satz A2.4.8 (g). Nach Satz A2.7.3 gibt es Repräsentanten von $[H] = \omega(S)$ bzw. $[H] = \omega(S')$ derart, daß $SI(H) = SI(H')$ ist. Wegen $[H] = \omega(S) =$

$\omega(S') = [H']$ sind H und H' äquivalent.

Angenommen S' geht durch eine Kürzung, Erweiterung, oder Überbrückung aus S hervor, dann ist $|SI(H)| = 1$, da $L(S) \leq 2$, $L(S') \leq 2$ und $\|\omega(S)\| \geq 1$ vorausgesetzt wird. \Rightarrow Die identische Abbildung $\text{id}: SI(H) \rightarrow SI(H)$ ist nach Satz A2.5.13 (b) und (c) die einzig existierende bestimmende Abbildung.

Angenommen S' geht durch eine Vertauschung aus S hervor, dann sind die folgenden fünf Fälle zu unterscheiden.

- i) Ist $|SI(H)| = 1$, dann ist wieder nach Satz A2.5.13 (b) und (c) die identische Abbildung $\text{id}: SI(H) \rightarrow SI(H)$ die einzig existierende bestimmende Abbildung.
- ii) Ist $|SI(H)| = 2$, $|S(H)| = 1$ und $|I(H)| = 1$, dann ist nach Satz A2.5.13 (d) die identische Abbildung $\text{id}: SI(H) \rightarrow SI(H)$ die einzig existierende bestimmende Abbildung.
- iii) Ist $|SI(H)| = 2$ und $|I(H)| = 2$, dann sind die Voraussetzungen von Satz A2.5.15 erfüllt und die identische Abbildung $\text{id}: SI(H) \rightarrow SI(H)$ die einzig existierende bestimmende Abbildung. (Vergleiche dazu auch Bild A2.27 mitte.)
- iv) Ist $|SI(H)| = 2$, $|S(H)| = 2$ und besitzt mindestens ein Subzentrum aus $S(H)$ einen Ein- oder Ausgang, dann sind die Voraussetzungen von Satz A2.5.15 oder Satz A2.5.17 erfüllt und die identische Abbildung $\text{id}: SI(H) \rightarrow SI(H)$ ist die einzig existierende bestimmende Abbildung. (Vergleiche dazu auch mit Bild A2.27 mitte.)
- v) Ist $|SI(H)| = 2$, $|S(H)| = 2$ und besitzt jedes Subzentrum aus $S(H)$ weder einen Ein- noch eine Ausgang, dann sind die Voraussetzungen von Satz A2.5.19 erfüllt und die identische Abbildung $\text{id}: SI(H) \rightarrow SI(H)$ ist eine bestimmende Abbildung.

Geht im allgemeinen Fall $S' \in \text{SEQ}(N')$ durch schrittweise durchgeführte Kürzungen, Erweiterungen, Vertauschungen, Überbrückungen, Zerlegungen oder Verschmelzungen aus S hervor,

so kann in jedem Schritt S bzw. S' zerlegt werden in die Produkte $S=S_1 \bullet S_0 \bullet S_2$ bzw. $S'=S_1 \bullet S_0' \bullet S_2$ oder $S=S_1 \bullet S_0$ bzw. $S'=S_1 \bullet S_0'$ oder $S=S_0 \bullet S_2$ bzw. $S'=S_0' \bullet S_2$, wobei $L(S_0) \leq 2$, $L(S_0') \leq 2$ und (S_0, S_0') eine Kürzung, Erweiterung, Vertauschung, Überbrückung, Zerlegung oder Verschmelzung ist. Nachfolgend wird nun nur der Fall $S=S_1 \bullet S_0 \bullet S_2$ bzw. $S'=S_1 \bullet S_0' \bullet S_2$ weiterbehandelt, da für die anderen Fälle analoge Aussagen gelten. Nach der Definition des seriellen Produkts und Satz A2.7.3 können die Repräsentanten von $[H] := \omega(S)$, $[H'] := \omega(S')$, $[H_1] := \omega(S_1)$, $[H_0] := \omega(S_0)$, $[H_0'] := \omega(S_0')$ und $[H_2] := \omega(S_2)$ so gewählt werden, daß $H=H_1 \bullet H_0 \bullet H_2$, $H'=H_1 \bullet H_0' \bullet H_2$ und $SI(H_0)=SI(H_0')$ ist. $\Rightarrow SI(H)=SI(H')$. Nach obigen Ausführungen ist $id_0:SI(H_0) \rightarrow SI(H_0')$ eine bestimmende Abbildung. Selbstverständlich sind $id_1:SI(H_1) \rightarrow SI(H_1)$ und $id_2:SI(H_2) \rightarrow SI(H_2)$ als identische oder idealisierte Abbildungen ebenfalls bestimmende Abbildungen. Wegen $SI(H)=SI(H_1) \cup SI(H_0) \cup SI(H_2)=SI(H_1) \cup SI(H_0) \cup SI(H_2)$ ist nach Satz A2.5.9 $id_1 \cup id_0 \cup id_2$ eine bestimmende Abbildung von $SI(H)$ nach $SI(H')=SI(H)$. Ist $id:SI(H) \rightarrow SI(H)$ (wegen $\|\omega(S)\| \geq 1$) die identische Abbildung, so ist $id=id_1 \cup id_0 \cup id_2$ und damit eine bestimmende Abbildung vom $SI(H)$ nach $SI(H')$. Da dies für jeden Schritt gilt, ist damit die Behauptung bewiesen.

b) Sind als Überführungsschritte auch solche gestattet, bei denen kein Subzentrum und kein Interimknoten beteiligt ist, wie zum Beispiel bei Zerlegungen oder Verschmelzungen, so erhält man in den elementaren Schritten nach Satz A2.5.13 (a) die idealisierte Abbildung $id_0:\emptyset \rightarrow \emptyset$ als bestimmende Abbildung. Da diese bei der Bildung der Vereinigung $id=id_1 \cup id_0 \cup id_2$ keinen Einfluß zeigt, folgt damit analog zu Fall a) die Behauptung.

q.e.d.

Um die zwei Spalten aus verschiedenen sequentiellen Darstellungen als identisch identifizieren zu können, ist der folgende Satz notwendig.

Satz A2.7.9:

Sind $[I_{t1}]$, $[I_{b1}]$, $[I_{t2}]$ und $[I_{b2}]$ Identitäten, $[H]$ ein einfacher Interimknoten oder ein einfaches Netzwerk mit Subzentrum das mindestens einen äußeren Ausgang hat und ist für

$[H_1] := [I_{t1}] \times [H] \times [I_{b1}]$ und $[H_2] := [I_{t2}] \times [H] \times [I_{b2}]$ $\bar{A}(H_1) = \bar{A}(H_2)$ und der Index des ersten äußeren Ausgangs zu dem eine Kante von einem inneren Ausgang oder Interimknoten führt derselbe, so ist $[I_{t1}] = [I_{t2}]$, $[I_{b1}] = [I_{b2}]$ und $[H_1] = [H_2]$.

Beweis:

Sei $[H]$ ein einfaches Netzwerk mit Subzentrum, das mindestens einen äußeren Ausgang hat und $H_1 := (N_1, \nu_1, \tau_1) := I_{t1} \times H \times I_{b1}$, sowie

$H_2 := (N_2, \nu_2, \tau_2) := I_{t_2} \times H \times I_{b_2}$. Da $[H]$ ein einfaches Netzwerk mit Subzentrum ist, das mindestens einen äußeren Ausgang besitzt, besitzt das Subzentrum von H mindestens einen (inneren) Ausgang und es gibt in H von i -ten inneren Ausgang genau eine Kante zum i -ten äußeren Ausgang und umgekehrt. Ist n_{t_1} bzw. n_{b_1} bzw. n_{t_2} bzw. n_{b_2} die Anzahl der äußeren Ausgänge von I_{t_1} bzw. I_{b_1} bzw. I_{t_2} bzw. I_{b_2} und n die Anzahl der äußeren Ausgänge von H , so gibt es in H_1 von i -ten inneren Ausgang von s genau eine Kante zum $(n_{t_1}+i)$ -ten äußeren Ausgang. Analog gibt es in H_2 von i -ten inneren Ausgang von s genau eine Kante zum $(n_{t_2}+i)$ -ten äußeren Ausgang. Da für $[H_1]$ und $[H_2]$ der Index des ersten äußeren Ausgangs zu dem eine Kante von einem inneren Ausgang oder Interimknoten führt derselbe ist, folgt: $n_{t_1}+1 = n_{t_2}+1 \Rightarrow n_{t_1} = n_{t_2}$. $\bar{A}(H_1) = \bar{A}(H_2) \Rightarrow n_1 = n_2$ und $n_{t_1} + n + n_{b_1} = n_1 = n_2 = n_{t_2} + n + n_{b_2} \Rightarrow n_{b_1} = n_{b_2}$. Da $\bar{A}(I_{t_1}) \cdot \bar{A}(H) \cdot \bar{A}(I_{b_1}) = \bar{A}(H_1) = \bar{A}(H_2) = \bar{A}(I_{t_2}) \cdot \bar{A}(H) \cdot \bar{A}(I_{b_2})$, $n_{t_1} = n_{t_2}$ und $n_{b_1} = n_{b_2}$ ist, ist $\bar{A}(I_{t_1}) = \bar{A}(I_{t_2})$ und $\bar{A}(I_{b_1}) = \bar{A}(I_{b_2})$. $\Rightarrow [I_{t_1}] = [I_{t_2}]$ und $[I_{b_1}] = [I_{b_2}]$ nach Satz A2.3.9. $\Rightarrow [H_1] = [I_{t_1}] \times [H] \times [I_{b_1}] = [I_{t_2}] \times [H] \times [I_{b_2}] = [H_2]$.

Ist $[H]$ eine einfacher Interimknoten, so kann man analog argumentieren, da es dann in H_1 bzw. H_2 vom einzig vorhandenen Interimknoten eine Kante zu einem äußeren Ausgang gibt.

q.e.d.

Damit kann bereits ein erstes, schon oft zitiertes Ergebnis dieser Publikation vorgestellt werden.

Satz A2.7.11: (1. Hauptsatz)

Ist $N_T^{1A} \subseteq N_T^F / \sim$ eine beliebige nicht leere Menge von Äquivalenzklassen einfacher Netzwerke ohne Schleifen, in denen jedes Subzentrum mindestens einen Ausgang besitzt und $N'' := N_T^I \cup N_T^{1A}$, so ist $\rho := \rho_X(N'') \cup \rho_Y(N'')$ eine vollkommene Substitutionsbasis von $SEQ(N'')$ und $\langle N'', \times, \bullet_D \rangle$ ein vollkommenes Monopolyid mit N'' als vollkommenem Erzeugendensystem.

Beweis:

Zeige, daß die Voraussetzungen von [HÜB95] Satz A2.8.13 gegeben sind.

Wegen $N_T^I \subseteq N''$ bildet $\langle N'', \times, \bullet_D \rangle$ nach [HÜB95] Satz und Definition A2.1.11 ein Monopolyid, wobei natürlich N'' ein Erzeugendensystem von $\langle N'', \times, \bullet_D \rangle$ ist. Die Restriktion von $\| \cdot \| : (N_T / \sim, \times, \bullet_D) \rightarrow (\mathbb{N}_0, +, +)$ auf die Teilmenge $\langle N'', \times, \bullet_D \rangle$ ist ein nicht-trivialer Monopolyiden-Homomorphismus, da $N_T^{1A} \neq \emptyset$ ist. Nach Satz A2.4.5 ist $(N_T^F / \sim)^{\| \cdot \|} = N_T^0$ und somit $(\langle N'', \times, \bullet_D \rangle)^{\| \cdot \|} \subseteq N_T^I$. \Rightarrow

$(\langle N^n, \times, \bullet_D \rangle)^{\|\bullet\|} = N_T^I$, da $N_T^I \subseteq N^n$. Analog folgt: $1_{\langle N^n, \times, \bullet_D \rangle} = N_T^I$. \Rightarrow
 $(\langle N^n, \times, \bullet_D \rangle)^{\|\bullet\|} = N_T^I = 1_{\langle N^n, \times, \bullet_D \rangle}$ und $1_{\langle N^n, \times, \bullet_D \rangle} \subseteq N^n$. Kann man nun zeigen,
daß $\rho := \rho_X(N^n) \cup \rho_V(N^n)$ die Bedingung (1) von [HÜB95] Satz A2.8.13
erfüllt, so ist von ρ eine vollkommene Substitutionsbasis von
 $SEQ(N^n)$, N^n ein vollkommenes Erzeugendensystem von $\langle N^n, \times, \bullet_D \rangle$
und $\langle N^n, \times, \bullet_D \rangle$ ein vollkommenes Monopolyid.

Sei $S_1, S_2 \in SEQ(N^n)$, $\|\omega(S_1)\| \geq 1$ und $\omega(S_1) = \omega(S_2)$. O.B.d.A. sei

$$S_1 = \begin{bmatrix} I_{t1,1} & I_{t1,n} \\ H_{l,1} & \dots & H_{l,n} \\ I_{b1,1} & I_{b1,n} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad S_2 = \begin{bmatrix} I_{t2,1} & I_{t2,m} \\ H_{2,1} & \dots & H_{2,m} \\ I_{b2,1} & I_{b2,m} \end{bmatrix}. \quad \text{Definiere } [H_1] := \omega(S_1) \text{ und}$$

$[H_2] := \omega(S_2)$. $\Rightarrow [H_1] = [H_2]$. Nach Satz A2.7.1 existieren
paarweise disjunkte Repräsentanten derart, daß
 $SI(H_1) = \bigcup_{i=1}^n SI(H_{1,i})$ und $SI(H_2) = \bigcup_{j=1}^m SI(H_{2,j})$. Da $S_1, S_2 \in SEQ(N^n)$ ist

nach Definition $Kern(S_1) \subseteq N^n$ und $Kern(S_1) \subseteq N^n$. \Rightarrow
 $[H_{1,i}], [H_{2,j}] \in N_T^I \cup N_T^{1A}$. Damit handelt es sich bei den Faktoren
 $[H_{1,i}]$ bzw. $[H_{2,j}]$ ausnahmslos um Identitäten oder einfache
Netzwerke ohne Schleifen, in denen jedes Subzentrum mindestens
einen Ausgang besitzt.

Wegen $\|H_1\| = \|\omega(S_1)\| \geq 1$ ist mindestens ein Faktor $[H_{1,i}]$ ein
einfaches Netzwerk mit Subzentrum. Da weder das serielle noch
das parallele Produkt Zykel erzeugt, gibt es damit in H_1 ein
Subzentrum s^* von dem kein Pfad zu einem anderen Subzentrum
führt. Da $[H_1] = [H_2]$ ist, sind H_1 und H_2 äquivalent und nach
Satz A2.5.7 existiert damit eine bestimmende Abbildung
 $\varphi: SI(H_1) \rightarrow SI(H_2)$. Diese bildet s^* auf $\varphi(s^*) \in SI(H_2)$ ab, womit φ
 (s^*) ein Subzentrum aus $S(H_2)$ ist, von dem es in H_2 ebenfalls
keinen Pfad zu einem anderen Subzentrum gibt.

Da alle Repräsentanten $H_{1,i}$ paarweise disjunkt sind und
 $SI(H_1) = \bigcup_{i=1}^n SI(H_{1,i})$ ist, bestimmt jedes Subzentrum s aus $SI(H_1)$
genau ein $H_{1,i}$ mit $s \in S(H_{1,i})$. Analog bestimmt jedes Subzentrum
 $\varphi(s)$ aus $SI(H_2)$ genau ein $H_{2,j}$ mit $\varphi(s) \in S(H_{2,j})$. O.B.d.A. sei
 $s^* \in S(H_{1,k})$ und $\varphi(s^*) \in S(H_{2,h})$.

Als nächstes soll nun die sequentielle Darstellung S_1 bzw. S_2
durch Vertauschungen, Kürzungen und eventuell Erweiterungen
überführt werden in eine sequentielle Darstellung S_1'' bzw. S_2''
derart, daß in S_1'' bzw. S_2'' der Faktor $[H_{1,k}]$ bzw. $[H_{2,h}]$ ganz
rechts steht und $L(S_1'') \geq 2$ bzw. $L(S_2'') \geq 2$ ist.

Betrachte zunächst S_1 .

Angenommen es ist $k=n$, so steht der Faktor $[H_{1,k}]$ bereits ganz
rechts. Ist nun auch noch $L(S_1'') \geq 2$, so kann $S_1'' := S_1$ definiert

werden. Ist $L(S_1)=1$ und $I:=1_1([H_1])=1_1(\omega(S_1))$ so ist für

$S_1'' := \begin{bmatrix} 0 & I_{t1,1} \\ I & H_{1,1} \\ 0 & I_{b1,1} \end{bmatrix}$ das Paar (S_1, S_1'') eine Linkserweiterung aus

$\rho_X(N'') \subseteq \rho \Rightarrow S_1 \xrightarrow{\rho} S_1''$ und $L(S_1'') \geq 2$.

Angenommen es ist $k \neq n$, so gibt es unmittelbar rechts von $[H_{1,k}]$ einen Faktor $[H_{1,k+1}]$. Angenommen bei $[H_{1,k+1}]$ handelt es sich um eine Identität, dann definieren die Spalten $S_1^{(k)}$ und $S_1^{(k+1)}$ eine Rechtskürzung $(S_1^{(k)} \cdot S_1^{(k+1)}, S_1^{(k)})$ aus $\rho_X(N'') \subseteq \rho$. Definiere $S_1''' := S_1^{(1)} \cdot \dots \cdot S_1^{(k)} \cdot S_1^{(k+2)} \cdot \dots \cdot S_1^{(n)}$ bzw. $S_1''' := S_1^{(1)} \cdot \dots \cdot S_1^{(k)}$ falls $k=n-1$ ist, dann ist $S_1 \xrightarrow{\rho} S_1'''$, wobei der Faktor $[H_{1,k}]$ in S_1''' eine Position weiter rechts steht.

Angenommen bei $[H_{1,k+1}]$ handelt es sich um keine Identität, so ist $H_{1,k+1}$ ein einfaches Netzwerk ohne Schleifen. Da es in H_1 von s^* keinen Pfad zu einem anderen Subzentrum gibt, gibt es auch keinen Pfad zum Subzentrum von $[H_{1,k+1}]$. \Rightarrow Es gibt von $I_{t1,k} \times H_{1,k} \times I_{b1,k}$ nach $I_{t1,k+1} \times H_{1,k+1} \times I_{b1,k+1}$ keine virtuelle Verbindungskante (a,e) mit $a \in A(H_{1,k})$ und $e \in E(H_{1,k+1})$. Nach Satz A2.6.1 existieren damit Identitäten $[I_{t1,k}']$, $[I_{b1,k}']$, $[I_{t1,k+1}']$

und $[I_{b1,k+1}']$ derart, daß für $S' := \begin{bmatrix} I_{t1,k}' & I_{t1,k+1}' \\ H_{1,k+1} & H_{1,k} \\ I_{b1,k}' & I_{b1,k+1}' \end{bmatrix}$ das Paar

$(S_1^{(k)} \cdot S_1^{(k+1)}, S')$ eine Vertauschung aus $\rho_V(N'') \subseteq \rho$ ist. Definiere $S_1'''' := S_1^{(1)} \cdot \dots \cdot S_1^{(k-1)} \cdot S' \cdot S_1^{(k+2)} \cdot \dots \cdot S_1^{(n)}$ bzw. $S_1'''' := S_1^{(1)} \cdot \dots \cdot S_1^{(k-1)} \cdot S'$ falls $k=n-1$ bzw. $S_1'''' := S' \cdot S_1^{(k+2)} \cdot \dots \cdot S_1^{(n)}$ falls $k=1$ bzw. $S_1'''' := S'$ falls $1=k=n-1$ ist. Dann ist $S_1 \xrightarrow{\rho} S_1''''$, wobei der Faktor $[H_{1,k}]$ in S_1'''' eine Position weiter rechts steht. Dieses Verfahren, des Anwenden von Kürzungen und Vertauschungen kann nun solange angewandt werden, bis der Faktor $[H_{1,k}]$ ganz rechts steht. Verkürzt sich dabei die Länge der sequentiellen Darstellung auf 1, so kann sie wie oben durch eine Linkserweiterung auf die Länge 2 gebracht werden.

Da mit der sequentiellen Darstellung S_2 ebenso verfahren werden kann, existieren also zwei sequentielle Darstellungen S_1'' bzw. S_2'' derart, daß in S_1'' bzw. S_2'' der Faktor $[H_{1,k}]$ bzw. $[H_{2,h}]$ ganz rechts steht, $L(S_1'') \geq 2$ bzw. $L(S_2'') \geq 2$ und $S_1 \xrightarrow{\rho} S_1''$ bzw. $S_2 \xrightarrow{\rho} S_2''$ ist.

Definiere $n'' := L(S_1'')$, $m'' := L(S_2'')$, $S_1' := S_1^{(1)} \cdot \dots \cdot S_1^{(n''-1)}$, $S_0' := S_1^{(n'')}$, $S_2' := S_2^{(1)} \cdot \dots \cdot S_2^{(m''-1)}$ und $S_0'' := S_2^{(m'')}$, dann sind die Produkte $S_1' \cdot S_0'$ und $S_2' \cdot S_0''$ definiert, $\|\omega(S_0')\|=1$, $S_1 \xrightarrow{\rho} S_1' \cdot S_0' = S_1''$ und $S_2 \xrightarrow{\rho} S_2' \cdot S_0'' = S_2''$. Bleibt also noch zu zeigen: $S_0' = S_0''$ und $\omega(S_1') = \omega(S_2')$.

Sei $[H_1'] := \omega(S_1')$ und $[H_2'] := \omega(S_2')$. O.B.d.A. kann nach Satz A2.7.5 angenommen werden, daß $SI(H_1') = SI(H_1)$ bzw. $SI(H_2') = SI(H_2)$ und die identische Abbildung $id_1: SI(H_1) \rightarrow SI(H_1')$ bzw.

$id_2: SI(H_2) \rightarrow SI(H_2')$ eine bestimmende Abbildung ist. Da auch $\varphi: SI(H_1) \rightarrow SI(H_2)$ eine bestimmende Abbildung und wegen $SI(H_1') = SI(H_1)$ bzw. $SI(H_2') = SI(H_2)$ $\varphi = id_2 \circ \varphi \circ id_1^{-1}$ ist, ist $\varphi: SI(H_1') \rightarrow SI(H_2')$ eine bestimmende Abbildung. $\Rightarrow H_1'$ und H_2' sind nach Satz A2.5.7 äquivalent. $\Rightarrow \bar{A}(H_1') = \bar{A}(H_2')$.

Betrachte nun $[H_0'] := \omega(S_0')$ und $[H_0''] := \omega(S_0'')$. $\Rightarrow [H_0'] = [I_{t1,n'}] \times [H_{1,k}] \times [I_{b1,n'}]$ und $[H_0''] = [I_{t2,m''}] \times [H_{2,h}] \times [I_{b2,m''}] = [I_{t2,m''}] \times [H_{1,k}] \times [I_{b2,m''}]$, da s^* bzw. $\varphi(s^*)$ das Subzentrum von $H_{1,k}$ bzw. $H_{2,h}$ ist und somit $[H_{1,k}] = [H_{2,h}]$ ist. S_0' bzw. S_0'' ist identisch zur letzten Spalte von S_1' bzw. S_2'' . $\Rightarrow \bar{A}(H_0') = \bar{A}(H_1')$ bzw. $\bar{A}(H_0'') = \bar{A}(H_2'')$. $\Rightarrow \bar{A}(H_0') = \bar{A}(H_1') = \bar{A}(H_2'') = \bar{A}(H_0'')$. Da sowohl s^* als auch $\varphi(s^*)$ mindestens einen Ausgang besitzt, S_0' bzw. S_0'' identisch zur letzten Spalte von S_1' bzw. S_2'' ist und H_1' und H_2'' äquivalent sind, ist in beiden Netzwerken der Index des ersten äußeren Ausgangs, zu dem eine Kante von einem inneren Ausgang führt, derselbe. Dies gilt dann aber auch für die Netzwerke H_0' und H_0'' . $\Rightarrow [I_{t1,n'}] = [I_{t2,m''}]$, $[I_{b1,n'}] = [I_{b2,m''}]$ und $[H_0'] = [H_0'']$ nach Satz A2.7.9. $\Rightarrow S_0' = S_0''$.

Sei $[H_1'] := \omega(S_1')$ und $[H_2'] := \omega(S_2')$, dann sind wegen $S_1' \bullet S_0' = S_1'$ und $S_2' \bullet S_0' = S_2' \bullet S_0' = S_2'$ die Produkte $H_1' \bullet H_0' = H_1'$ und $H_2' \bullet H_0' = H_2'$ definiert und $\varphi: SI(H_1' \bullet H_0') \rightarrow SI(H_2' \bullet H_0')$ eine bestimmende Abbildung. H_0' und H_0'' sind äquivalent und φ bildet das einzige Subzentrum s^* von H_0' auf das einzige Subzentrum $\varphi(s^*)$ von H_0'' ab. \Rightarrow Die Restriktion von φ auf $SI(H_0') = \{s^*\}$ ist nach Satz A2.5.13 (b) eine bestimmende Abbildung von $SI(H_0')$ nach $SI(H_0'')$. Wegen $\|H_0'\| = 1$ sind damit die Voraussetzungen von Satz A2.5.27 erfüllt und somit die Restriktion von φ auf $SI(H_1')$ eine bestimmende Abbildung von $SI(H_1')$ nach $SI(H_2')$. $\Rightarrow [H_1'] = [H_2']$ nach Satz A2.5.7. $\Rightarrow \omega(S_1') = [H_1'] = [H_2'] = \omega(S_2')$.

q.e.d.

Da die Vorgehensweise im Beweis zu obigem Satz auch charakteristisch für einen weiteren Satz ist, sollen die wesentlichen Schritte und Voraussetzungen daraus noch einmal hervorgehoben werden.

- (1) Die Repräsentanten einer sequentiellen Darstellung können so gewählt werden, daß ein Subzentrum einen Faktor bzw. ein einfaches Netzwerk mit Subzentrum daraus eindeutig identifiziert.
- (2) Da die Werte der beiden sequentiellen Darstellungen S_1 und S_2 gleich sind, existiert eine bestimmende Abbildung φ ,

die die Subzentren der zugehörigen Repräsentanten bijektiv einander zuordnet.

- (3) In beiden sequentiellen Darstellungen S_1 und S_2 existiert ein Subzentrum s^* bzw. $\varphi(s^*)$ das kein anderes Subzentrum als Nachfolger besitzt.
- (4) Die zu s^* bzw. $\varphi(s^*)$ gehörenden einfachen Netzwerke mit Subzentrum können mittels Kürzungen und Vertauschungen an das rechte Ende der jeweiligen sequentiellen Darstellung verschoben werden, wobei φ in jedem Schritt als bestimmende Abbildung bestehen bleibt.
- (5) Die so neu entstandenen sequentiellen Darstellungen S_1'' und S_2'' können so zerlegt werden, daß die beiden rechten Enden identisch und die beiden linken Enden äquivalent sind.

In Schritt (4) ist dabei unbedingt zu beachten, daß zwar φ als bestimmende Abbildung erhalten bleibt, sich der zugehörige eingeschränkt bewertungserhaltende Isomorphismus im allgemeinen aber ändert, da sich die äußeren Ausgänge der zugehörigen Netzwerke ändern. Dies war mit ein wichtiger Grund bestimmende Abbildungen einzuführen, da an dieser Stelle nicht mit Isomorphismen gearbeitet werden kann.

Die Diskussion abschließend, sei zu obigem Satz noch bemerkt, daß G. Hotz in [HOT72] bzw. [HOT74] eine Beweisskizze für einen ähnlichen Satz über geometrisch, topologische Netzwerke gab. Die in obigem Beweis wesentliche Idee, einen Faktor durch Vertauschungen bzw. Kürzungen an das rechte Ende einer sequentiellen Darstellung zu überführen und dann abzuspalten, wurde dieser Beweisskizze entnommen. G. Hotz gab aber keine mathematisch konkrete Definitionen für sequentielle Darstellungen oder Vertauschungen. Auch geht aus seiner Beweisskizze nicht hervor, daß an einigen Stellen statt eingeschränkt bewertungserhaltender Isomorphismen bestimmende Abbildungen verwendet werden müssen. Diese Anmerkungen sollen jedoch nicht als Kritik an der großartigen Pionierleistung von G. Hotz verstanden werden. Vielmehr soll dies deutlich machen, warum die von Hotz vorgestellte Beweisskizze nicht einfach für den als nächstes zu beweisenden Satz, über α -vollkommene Monopolyide, verallgemeinert werden konnte.

Werden nun als erzeugende Elemente, statt einfacher Netzwerke ohne Schleifen, auch solche mit Schleifen und einfache Interimknoten zugelassen, so liegt auch weiterhin ein vollkommenes Monopolyid vor. Dies kann sofort und ohne Schwierigkeiten nachvollzogen werden, da die im Beweis zu obigem Satz verwendeten Sätze diese Fälle bereits mit berücksichtigen.

Anders verhält es sich, wenn wie im Fall $N' := N_T^0 \cup N_T^{(1)}$ auch Permutationen als erzeugende Elemente zugelassen sind. Daß dann kein vollkommenes Monopolyid mehr vorliegen kann wurde bereits mit Satz A2.4.7 gezeigt.

5.8 Alpha-vollkommene Untermonopolyide

In diesem Abschnitt soll nun auf ähnliche Art und Weise, wie im letzten Satz des im vorherigen Abschnitts, bewiesen werden, daß das von $N' := N_T^0 \cup N_T^{(1)}$ erzeugte Untermonopolyid ein α -vollkommenes Monopolyid ist. Daß dabei kein vollkommenes Monopolyid mehr vorliegen kann, wurde bereits mit Satz A2.4.7 gezeigt.

Wie bereits erwähnt, kann sofort nachvollzogen werden, daß statt einfacher Netzwerke ohne Schleifen auch solche mit Schleifen und einfache Interimknoten als erzeugende Elemente zugelassen werden können, ohne daß irgend welche Probleme auftreten. Anders verhält es sich, wenn wie im Fall $N' := N_T^0 \cup N_T^{(1)}$, auch Permutationen als erzeugende Elemente zugelassen sind. Es ergibt sich dann die Schwierigkeit, daß sich in einer sequentiellen Darstellung zwischen zwei Faktoren die Subzentren oder Interimknoten beinhalten auch noch solche befinden können die aus fast leeren Netzwerken bestehen. Es ist also unter anderem ein Verfahren notwendig, mit dem es möglich ist, innerhalb einer sequentiellen Darstellung zwei nebeneinander stehende einfache Netzwerke mit Subzentrum in ihren Positionen zu vertauschen, auch wenn sich zwischen beiden Faktoren noch ein fast leeres Netzwerk [H] befindet. Wenn nachfolgend ein solches Verfahren erarbeitet wird, wird zunächst angenommen, daß es sich bei [H] um eine Permutation handelt. In den weiteren Schritten werden für [H] dann auch Verzweigungen und Verjüngungen und schließlich auch freie, äußere Ein- und Ausgänge zugelassen.

Um den Beweis zum nächsten Satz etwas zu vereinfachen, sei folgende Sprechweise definiert:

Definition A2.8.1:

Ist $S = \begin{bmatrix} I_{t1} & I_{t2} \\ H_1 & H_2 \\ I_{b1} & I_{b2} \end{bmatrix} \in \text{SEQ}(N')$ eine sequentielle Darstellung, dann wird

eine Kante (e, a) aus $[H_1]$ als **von $[H_1]$ ausgehend** bezeichnet, wenn ein äußerer Ausgang a_1 von $[H_1]$ existiert, so daß (a_1, e) eine virtuelle Kante von $[H_1]$ nach $[H_2]$ ist. Analog heißt eine Kante (e, a) aus $[H_1]$ **zu $[H_2]$ führend**, wenn ein äußerer Eingang e_2 von $[H_2]$ existiert, so daß (a, e_2) eine virtuelle Kante von $[H_1]$ nach $[H_2]$ ist.

Satz A2.8.3:

Ist $S = \begin{bmatrix} I_{t1} & 0 & I_{t2} \\ H_1 & P & H_2 \\ I_{b1} & 0 & I_{b2} \end{bmatrix} \in \text{SEQ}(N')$ eine sequentielle Darstellung, wobei

[P] eine Permutation ist und es keine Kante (e,a) von [P] gibt, die sowohl von $[H_1]$ ausgeht, als auch zu $[H_2]$ führt, so existieren Identitäten $[I_{t2}']$, $[I_{b2}']$, $[I_{t3}']$, $[I_{b3}']$ und Permutationen $[P_1']$ und $[P_2']$ derart, daß

$S' = \begin{bmatrix} 0 & I_{t2}' & I_{t3}' & 0 \\ P_1' & H_2 & H_1 & P_2' \\ 0 & I_{b2}' & I_{b3}' & 0 \end{bmatrix} \in \text{SEQ}(N')$ und S durch Erweiterungen,

Kürzungen, Zerlegungen, Verschmelzungen, Vertauschungen und Überbrückungen in S' überführbar ist.

Beweis:

Je nach dem, ob [P] eine Identität ist oder nicht, fällt der Beweis einfach oder kompliziert aus.

a) Angenommen [P] ist eine Identität, so kann S durch Kürzungen und Erweiterungen überführt werden in

$S'' := \begin{bmatrix} 0 & I_{t1} & I_{t2} & 0 \\ P_1' & H_1 & H_2 & P_2' \\ 0 & I_{b1} & I_{b2} & 0 \end{bmatrix} \in \text{SEQ}(N')$, wobei $[P_1']$ bzw. $[P_2']$ die

links- bzw. rechtsseitige Identität von $[I_{t1}] \times [H_1] \times [I_{b1}]$ bzw. $[I_{t2}] \times [H_2] \times [I_{b2}]$ ist. Nach Voraussetzung gibt es keine virtuelle Verbindungskante (a_1, e_2) mit $a_1 \in A(H_1)$ und $e_2 \in E(H_2)$, womit die Voraussetzungen von Satz A2.6.1 erfüllt sind und damit Identitäten $[I_{t1}']$, $[I_{b1}']$, $[I_{t2}']$ und

$[I_{b2}']$ derart existieren, daß das Paar $\left(\begin{bmatrix} I_{t1} & I_{t2} \\ H_1 & H_2 \\ I_{b1} & I_{b2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I_{t1}' & I_{t2}' \\ H_2 & H_1 \\ I_{b1}' & I_{b2}' \end{bmatrix} \right)$

eine Vertauschung aus $\rho_V(N')$ ist. Durch diese Vertauschung

ist S'' überführbar in $S' := \begin{bmatrix} 0 & I_{t2}' & I_{t3}' & 0 \\ P_1' & H_2 & H_1 & P_2' \\ 0 & I_{b2}' & I_{b3}' & 0 \end{bmatrix}$.

b) Angenommen [P] ist keine Identität, so ist es das Ziel S durch Erweiterungen, Kürzungen, Zerlegungen, Verschmelzungen, Vertauschungen und Überbrückungen in eine sequentielle Darstellung S'' zu überführen, so daß sich wie im Fall a) zwischen der Spalte mit $[H_1]$ und der Spalte mit $[H_2]$ lediglich eine Identität befindet. Dann kann wie im Fall a) durch eine Kürzung und Vertauschung das gewünschte Ergebnis herbeigeführt werden.

Bei der Überführung von S in S'' wird prinzipiell wie folgt vorgegangen:

S ist durch eine Erweiterung überführbar in

$$S_1 := \begin{bmatrix} I_{t1} & 0 & 0 & I_{t2} \\ H_1 & P & I & H_2 \\ I_{b1} & 0 & 0 & I_{b2} \end{bmatrix} \in \text{SEQ}(N'), \text{ wobei } [I] \text{ die Identität ist,}$$

die durch den Typenausgangsvektor von $[P]$ definiert ist. Ist $[P'']$ eine erweitert vorwärts- oder rückwärtszyklische Permutation derart, daß $[P] \bullet [P'']$ definiert und $[I] = [P''] \bullet [P'']^{-1}$ ist, so S_1 kann durch eine Zerlegung überführt

$$\text{werden in } S_2 := \begin{bmatrix} I_{t1} & 0 & 0 & 0 & I_{t2} \\ H_1 & P & P'' & P''^{-1} & H_2 \\ I_{b1} & 0 & 0 & 0 & I_{b2} \end{bmatrix} \in \text{SEQ}(N'). \text{ Anschließend}$$

kann S_2 durch eine Verschmelzung überführt werden in

$$S_3 := \begin{bmatrix} I_{t1} & 0 & 0 & I_{t2} \\ H_1 & P' & P''^{-1} & H_2 \\ I_{b1} & 0 & 0 & I_{b2} \end{bmatrix} \in \text{SEQ}(N'), \text{ wobei } [P'] := [P] \bullet [P''] \text{ ist.}$$

Sei $[I_{t''}]$ bzw. $[I_{b''}]$ bzw. $[P'''] := [(N, \nu, \tau)]$ die nach Satz und Definition A2.4.23 eindeutig bestimmte obere bzw. untere Identität bzw. rückwärtszyklische (vorwärtszyklische) Permutation von $[P'']^{-1}$.

Angenommen $[P'']$ und damit $[P'']^{-1}$ ist so definiert, daß es zu jedem äußeren Eingang e von $[H_2]$ eine virtuelle Verbindungskante (a, e) von einem äußeren Ausgang a von $[P''']$ mit $\nu(a) \neq |A(N)|$ ($\nu(a) \neq 1$) gibt, so existieren nach Satz A2.6.5 Identitäten $[I_{t3}]$ und $[I_{b3}]$, sowie eine erweitert rückwärtszyklische (vorwärtszyklische)

$$\text{Permutation } [P_3] \text{ derart, daß das Paar } \left(\begin{bmatrix} 0 & I_{t2} \\ P''^{-1} & H_2 \\ 0 & I_{b2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I_{t3} & 0 \\ H_2 & P_3 \\ I_{b3} & 0 \end{bmatrix} \right)$$

eine Überbrückung aus $\rho_B(N')$ ist. Damit kann S_3 überführt werden in

$$S_4 := \begin{bmatrix} I_{t1} & 0 & I_{t3} & 0 \\ H_1 & P' & H_2 & P_3 \\ I_{b1} & 0 & I_{b3} & 0 \end{bmatrix} \in \text{SEQ}(N').$$

Angenommen $[P''']$ und damit $[P''']^{-1}$ ist so definiert, daß es von $[P''']^{-1} = [I_{t''}] \times [P'''] \times [I_{b''}]$ nach $[I_{t2}] \times [H_2] \times [I_{b2}]$ keine virtuelle Verbindungskante (a, e) mit $a \in A(H_1)$ und $e \in E(H_2)$ gibt, so existieren nach Satz A2.6.1 Identitäten $[I_{t3}], [I_{b3}], [I_{t4}]$ und $[I_{b4}]$ derart, daß das Paar

$$\left(\begin{bmatrix} I_{t''} & I_{t2} \\ P''' & H_2 \\ I_{b''} & I_{b2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I_{t3} & I_{t4} \\ H_2 & P''' \\ I_{b3} & I_{b4} \end{bmatrix} \right) \text{ eine Vertauschung aus } \rho_V(N') \text{ ist.}$$

Damit kann S_3 durch eine Zerlegung in $S_3' := \begin{bmatrix} I_{t1} & 0 & I_t''' & I_{t2} \\ H_1 & P' & P''' & H_2 \\ I_{b1} & 0 & I_b''' & I_{b2} \end{bmatrix} \in$

$SEQ(N')$ und anschließend durch obige Vertauschung in

$S_3'' := \begin{bmatrix} I_{t1} & 0 & I_{t3} & I_{t4} \\ H_1 & P' & H_2 & P''' \\ I_{b1} & 0 & I_{b3} & I_{b4} \end{bmatrix} \in SEQ(N')$ überführt werden. Definiert

man $[P_3] := [I_{t4}] \times [P'''] \times [I_{b4}]$, so kann S_3'' durch eine Verschmelzung wiederum überführt werden in

$S_4 := \begin{bmatrix} I_{t1} & 0 & I_{t3} & 0 \\ H_1 & P' & H_2 & P_3 \\ I_{b1} & 0 & I_{b3} & 0 \end{bmatrix} \in SEQ(N')$.

Analog kann man rechts neben $[H_1]$ durch Erweiterung eine Spalte mit einer Identität einfügen und diese in eine erweitert vorwärtszyklische (rückwärtszyklische) Permutation und ihr Inverses zerlegen ($[I] = [P]^{-1} \cdot [P]$). Wird $[P]$ bzw. $[P]^{-1}$ dabei so gewählt, daß die Voraussetzungen von Satz A2.6.7 bzw. Satz A2.6.1 erfüllt sind, so kann der Faktor mit $[P]^{-1}$ durch eine Überbrückung bzw. Vertauschung rechts von $[H_1]$ entfernt werden. Durch geeignete Verschmelzungen gelangt man dann zu einer sequentiellen Darstellung von der Form

$S_5 := \begin{bmatrix} 0 & I_{t1}'' & 0 & I_{t2}'' & 0 \\ P_4 & H_1 & P_5 & H_2 & P_6 \\ 0 & I_{b1}'' & 0 & I_{b2}'' & 0 \end{bmatrix} \in SEQ(N')$, wobei $[P_4]$, $[P_5]$ und $[P_6]$

Permutationen sind.

Das Ziel ist es also, bei der Zerlegung der durch Erweiterung eingefügten Identitäten in erweitert vorwärts- bzw. rückwärtszyklische Permutationen diese so zu wählen, daß stets Satz A2.6.1, Satz A2.6.5 oder Satz A2.6.7 angewandt werden kann, um $[P]^{-1}$ durch Vertauschung oder Überbrückung nach links bzw. rechts zu verschieben. Wird außerdem darauf geachtet, daß ab einem gewissen Zeitpunkt $[P]$ immer so gewählt wird, daß bei der Verschmelzung $[P] \cdot [P]$ bzw. $[P] \cdot [P]$ eine Permutation entsteht, die mindestens eine Kante (e, a) mit $v(e) \neq v(a)$ weniger besitzt als $[P]$, so kann man durch wiederholtes Anwenden obiger Verfahrensschritte erreichen, daß die sich zwischen $[H_1]$ und $[H_2]$ befindende Permutation zur Identität wird und durch eine Kürzung entfernt werden kann. (Vgl. Bild A2.31 unten.)

- c) Um den Beweis zu diesem Satz nun abschließen zu können genügt es also zu zeigen, daß die einzufügenden Permutationen gerade so gewählt werden können, daß sie obige Bedingungen erfüllen. Dies soll anschaulich anhand von Bild A2.31 beschrieben werden, wobei in drei Etappen vorgegangen wird. Nach der gegebenen Voraussetzung gibt es keine von $[H_1]$ ausgehende Kante, die zu $[H_2]$ führt.

In einem ersten Schritt werden die von $[H_1]$ ausgehenden Kanten so sortiert, daß die von i -ten äußeren Ausgang von $[H_1]$ gerade zum i -ten äußeren Ausgang von $[P]$ führt. Durchlaufe dazu die äußeren Ausgänge von $[H_1]$ der Reihe nach und prüfe, ob die davon ausgehende Kante (a,e) zu einem äußeren Ausgang von $[P]$ mit demselben Index führt.

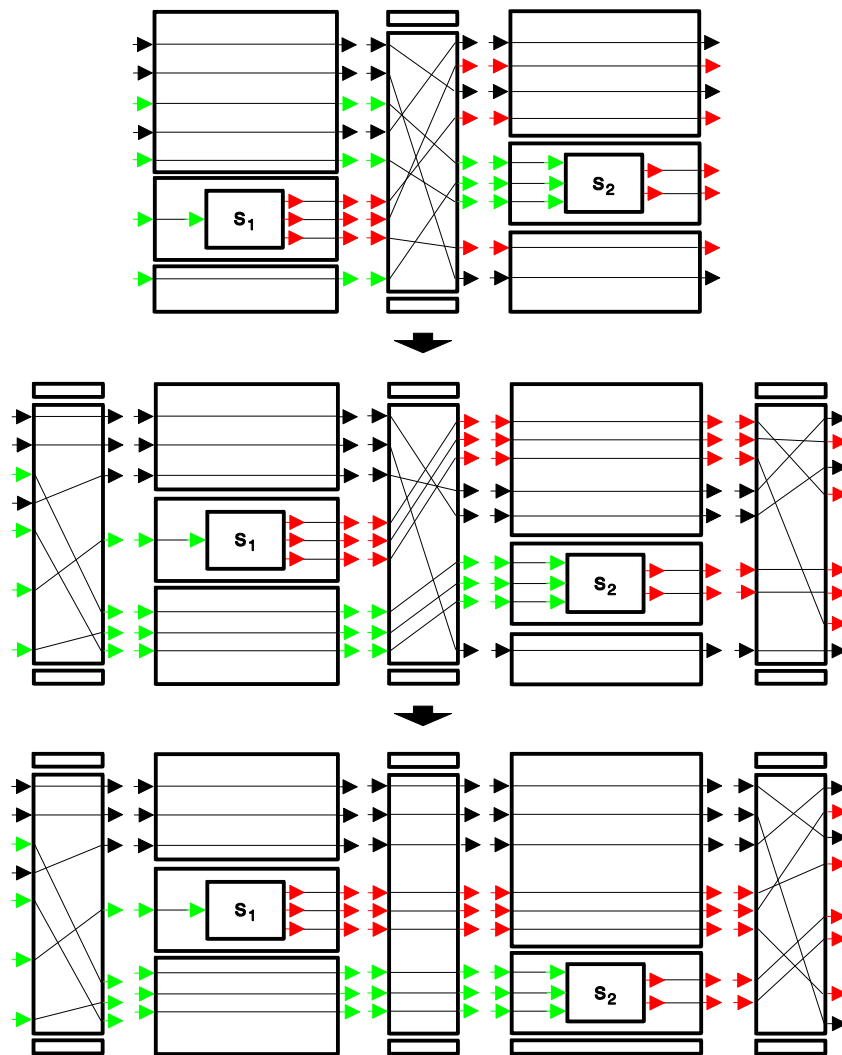


Bild A2.31: Eine Skizze zu Beweis von Satz A2.8.3, die das Eliminieren von Permutationen zwischen zwei einfachen Netzwerken zeigt.

Angenommen dies ist nicht der Fall und i bzw. j der Index des äußeren Ausgangs von $[H_1]$ bzw. $[P]$. Dann sei $[P'']$ die durch den Typenausgangsvektor von $[P]$ eindeutig definierte, erweitert vorwärtszyklische Permutation, mit einer Kante von j -ten äußeren Eingang zum i -ten äußeren Ausgang. (Vgl. Bild A2.33.)

Damit ist sicher gestellt, daß im Falle der Ersetzung von $[P]$ durch $[P] \cdot [P'']$ die erste bis i -te von $[H_1]$ ausgehende

Kante zum ersten bzw. i -ten äußeren Ausgang von $[P] \bullet [P'']$ führt. Da es nach Voraussetzung keine von $[H_1]$ ausgehende Kante gibt, die zu $[H_2]$ führt, liegt der j -te äußere Ausgang von $[P]$ entweder ober- oder unterhalb aller äußeren Ausgänge von $[P]$, von denen es eine virtuelle Kante zu einem äußeren Eingang von $[H_2]$ gibt. (Vgl. Bild A2.33.) Damit erfüllt $[P'']^{-1}$ als erweiterte

rückwärtszyklische Permutation entweder die Voraussetzungen für Satz A2.6.1 oder von Satz A2.6.5, so daß $[P'']^{-1}$ wie oben beschrieben entweder durch eine Vertauschung oder Überbrückung nach links verschoben werden kann.

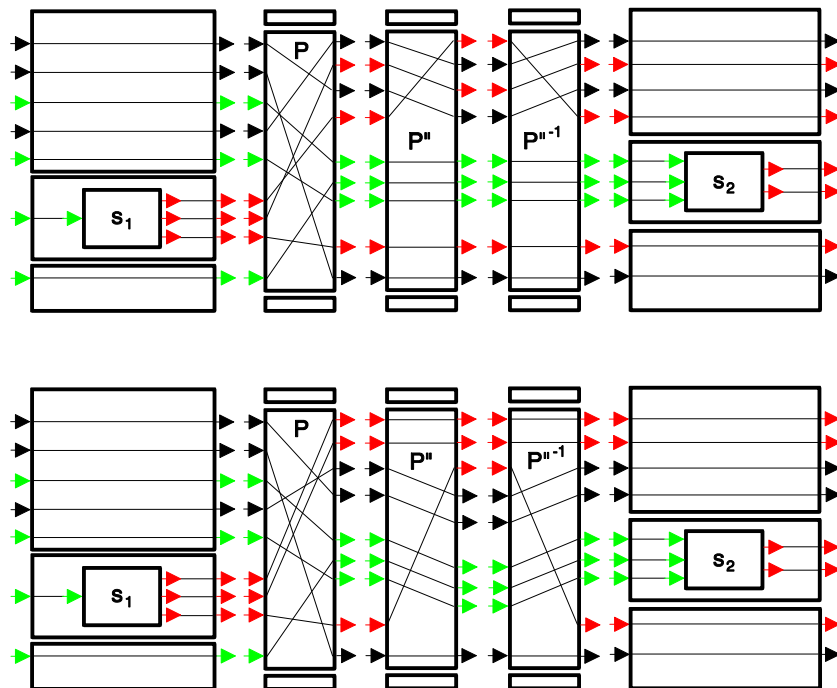


Bild A2.33: Eine Skizze zu Beweis von Satz A2.8.3, die das geeignete Zerlegen von Identitäten zeigt.

Sind die von $[H_1]$ ausgehenden Kanten so sortiert, daß die vom i -ten äußeren Ausgang von $[H_1]$ ausgehende Kante gerade zum i -ten äußeren Ausgang von $[P]$ führt, so können auf ähnliche Art und Weise zusätzlich die von $[P]$ zu $[H_2]$ führenden Kanten so sortiert werden, daß die vom letzten äußeren Eingang von $[P]$ ausgehende Kante zum letzten äußeren Eingang von $[H_2]$ führt; die vom vorletzten äußeren Eingang von $[P]$ ausgehende Kante zum vorletzten äußeren Eingang von $[H_2]$ führt; usw. Dazu müssen lediglich die von $[P]$ zu $[H_2]$ führenden Kanten in entsprechender Reihenfolge überprüft werden und bei Nichtübereinstimmung der Reihenfolge entsprechend obig beschriebenem Verfahren

vertauscht werden, wobei die Identität zwischen $[H_1]$ und $[P]$ eingeschoben wird.

Sind die von $[H_1]$ ausgehenden bzw. zu $[H_2]$ führenden Kanten entsprechend eben beschriebenem Verfahren sortiert, (vgl. Bild A2.31 Mitte,) so kann $[P]$ wie folgt in eine Identität überführt werden. Durchlaufe die äußeren Eingänge von $[P]$ der Reihe nach und prüfe ob beide Knoten

der davon ausgehenden Kante (a,e) denselben Index besitzen. Ist dies nicht der Fall, so kann es sich bei (a,e) weder um eine von $[H_1]$ ausgehende noch um eine zu $[H_2]$ führende Kante handeln. (Vgl. Bild A2.31 Mitte.) Damit kann, wie oben bereits schon einmal beschrieben, rechts neben $[P]$ eine vorwärtszyklische Permutation $[P']$ (und ihr Inverses) eingefügt werden, so daß im Produkt $[P] \cdot [P']$ in der von a ausgehenden Kante beide Knoten denselben Index besitzen.

Zum Schluß sei noch angemerkt, daß es bei dem angegebenen Verfahren unbedingt notwendig ist, beim Sortieren der Kanten von $[P]$, in der angegebenen Reihenfolge vorzugehen, da nur so über die obere bzw. untere Identität der einzufügenden erweiterten vorwärts- oder rückwärtszyklischen Permutation sicher gestellt ist, daß nachfolgende Transformationen die bereits hergestellte Ordnung nicht wieder zerstören.

q.e.d.

Satz A2.8.5:

Ist $S = \begin{bmatrix} I_{t1} & 0 & I_{t2} \\ H_1 & H & H_2 \\ I_{b1} & 0 & I_{b2} \end{bmatrix} \in \text{SEQ}(N')$ eine sequentielle Darstellung, wobei

$[H]$ ein fast leeres Netzwerk ohne freie äußere Ein- oder Ausgänge ist und es gibt keine Kante (e,a) von $[H]$, die sowohl von $[H_1]$ ausgeht, als auch zu $[H_2]$ führt, so existieren Identitäten $[I_{t1}']$, $[I_{b1}']$, $[I_{t2}']$, $[I_{b2}']$, fast leere Netzwerke $[H_1']$ und $[H_2']$ und eine Permutation $[P']$ derart, daß

$S' = \begin{bmatrix} 0 & I_{t1}' & 0 & I_{t2}' & 0 \\ H_1' & H_1 & P' & H_2 & H_2' \\ 0 & I_{b1}' & 0 & I_{b2}' & 0 \end{bmatrix} \in \text{SEQ}(N')$ und S durch Erweiterungen,

Kürzungen, Zerlegungen, Verschmelzungen, Vertauschungen und Überbrückungen in S' überführbar ist.

Beweis:

S kann durch je eine einfache Links- und Rechtserweiterung

überführt werden in $S_1 := \begin{bmatrix} 0 & I_{t1} & 0 & I_{t2} & 0 \\ I_1 & H_1 & H & H_2 & I_2 \\ 0 & I_{b1} & 0 & I_{b2} & 0 \end{bmatrix} \in \text{SEQ}(N')$, wobei $[I_1]$

und $[I_2]$ entsprechende Identitäten sind. Angenommen $[H]$ besitzt keine Verzweigungen oder Verzweigungen, so kann $S'=S_1$ definiert werden.

Angenommen $[H]$ besitzt mindestens eine Verzweigung e von der m Kanten ausgehen. Da $[H]$ keine Subzentren und Interimknoten besitzt, muß e ein äußerer Eingang von $[H]$ sein. Der Index von e sei gleich k . Unterscheide nun die beiden Fälle, daß entweder eine oder keine virtuelle Verbindungskante (a_1, e) mit $a_1 \in A(H_1)$ existiert.

Angenommen es gibt keine virtuelle Verbindungskante (a_1, e) mit $a_1 \in A(H_1)$. Sei $[I_{t'}]$ bzw. $[I_{b'}]$ die durch die äußeren Eingänge von $[H]$ mit einem Index kleiner bzw. größer k eindeutig definierte Identität. Weiter sei $[H']$ die durch den Typen von e eindeutig definierte einfache Verzweigung mit m äußeren Ausgängen und $[H'']$ das Netzwerk, das aus $[H]$ hervorgeht, wenn e durch m äußere Eingänge mit demselben Typ wie e ersetzt wird und jeder dieser neuen äußeren Eingänge durch genau eine Kante mit einem äußeren Ausgang a verbunden wird, der in $[H]$ durch eine Kante mit e verbunden war, dann ist $\bar{E}(H'') = \bar{A}(I_{t'} \times H' \times I_{b'})$ und $[H] = ([I_{t'}] \times [H'] \times [I_{b'}]) \bullet [H'']$. (Vgl. Bild A2.35 oben.) Damit kann S durch eine Zerlegung überführt werden in

$S_2 := \begin{bmatrix} 0 & I_{t1} & I_{t'} & 0 & I_{t2} & 0 \\ I_1 & H_1 & H' & H'' & H_2 & I_2 \\ 0 & I_{b1} & I_{b'} & 0 & I_{b2} & 0 \end{bmatrix}$. So wie e gewählt wurde, gibt es von

$I_{t1} \times H_1 \times I_{b1}$ nach $I_{t'} \times H' \times I_{b'}$ keine virtuelle Verbindungskante (a_1, e') mit $a_1 \in A(H_1)$ und $e' \in E(H')$. Damit existieren nach Satz A2.6.1 Identitäten $[I_{t1}''], [I_{b1}''], [I_{t2}'']$ und $[I_{b2}'']$ derart, daß

das Paar $\left(\begin{bmatrix} I_{t1} & I_{t'} \\ H_1 & H' \\ I_{b1} & I_{b'} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I_{t1}'' & I_{t2}'' \\ H' & H_1 \\ I_{b1}'' & I_{b2}'' \end{bmatrix} \right)$ eine Vertauschung aus $\rho_V(N')$ ist.

Damit kann S_2 überführt werden in $S_3 := \begin{bmatrix} 0 & I_{t1}'' & I_{t2}'' & 0 & I_{t2} & 0 \\ I_1 & H' & H_1 & H'' & H_2 & I_2 \\ 0 & I_{b1}'' & I_{b2}'' & 0 & I_{b2} & 0 \end{bmatrix}$.

Definiert man $[H_3''] := [I_2] \bullet ([I_{t1}''] \times [H'] \times [I_{b1}''])$, so wird aus S_3

durch eine Verschmelzung $S_4 := \begin{bmatrix} 0 & I_{t2}'' & 0 & I_{t2}'' & 0 \\ H_3'' & H_1 & H'' & H_2 & I_2 \\ 0 & I_{b2}'' & 0 & I_{b2}'' & 0 \end{bmatrix} \in \text{SEQ}(N')$, wobei

weder $[H'']$ noch $[H_3'']$ Subzentren, Interimknoten oder freie Ein- oder Ausgänge besitzen und $[H'']$ genau eine Verzweigung weniger hat als $[H]$.

Dieses Verfahren kann nun solange angewandt werden, bis $[H'']$ keine Verzweigungen mehr besitzt, zu denen es keine virtuelle Verbindungskante von einem äußeren Ausgang von $[H_1]$ gibt.

Bevor die Verzweigungen entfernt werden können, für die dies nicht gilt, sind als nächstes die Verjüngungen a zu entfernen, von denen keine virtuelle Verbindungskante (a, e_2) ausgeht mit $e_2 \in E(H_2)$. Dazu kann analog wie eben vorgegangen werden, (vgl. Bild A2.37 oben), wobei S_4 durch Zerlegungen, Vertauschungen und Verschmelzungen überführt wird in

$$S_5 := \begin{bmatrix} 0 & I_{b_2}'' & 0 & I_{b_2}''' & 0 \\ H_3'' & H_1 & H''' & H_2 & H_4'' \\ 0 & I_{b_2}'' & 0 & I_{b_2}''' & 0 \end{bmatrix} \in \text{SEQ}(N').$$

In den beiden nächsten Etappen sollen nun die restlichen Verzweigungen und Verjüngungen von $[H''']$ abgespalten werden.

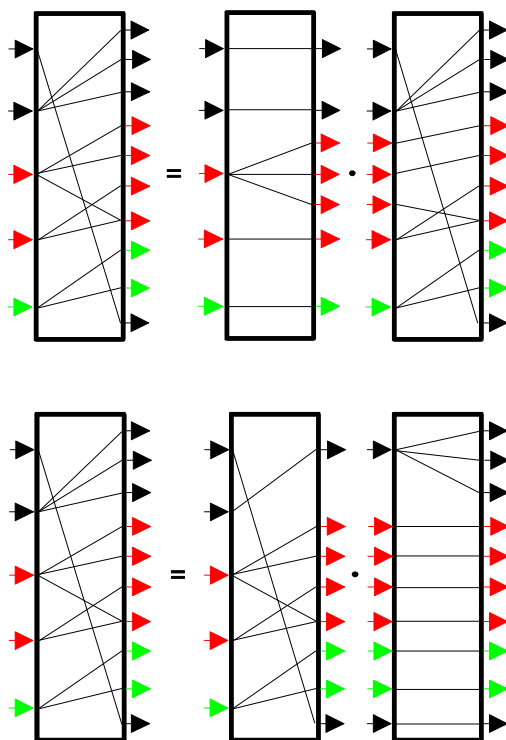


Bild A2.35: Zwei Möglichkeiten für das Abspalten einer einfachen Verzweigung.

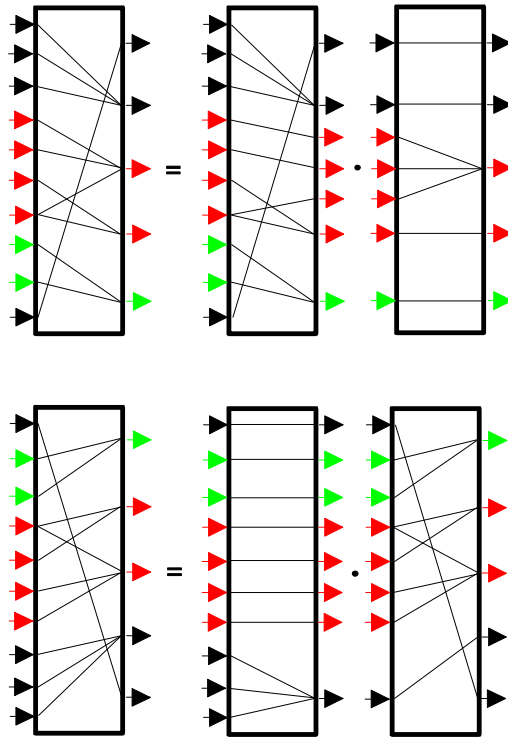


Bild A2.37: Zwei Möglichkeiten für das Abspalten einer einfachen Verzüngung.

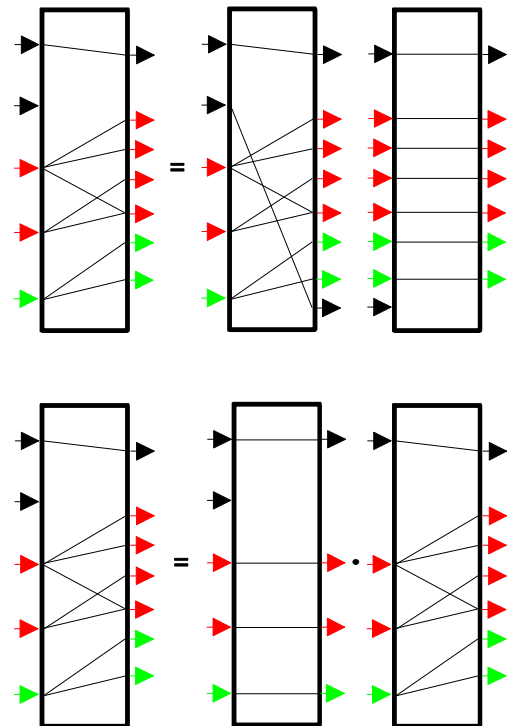


Bild A2.39: Zwei Möglichkeiten für das Abspalten eines einfachen (äußeren) Eingangs.

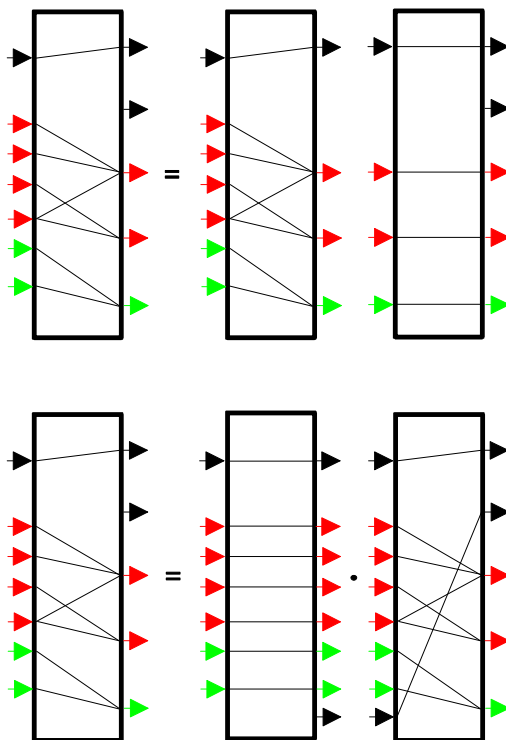


Bild A2.41: Zwei Möglichkeiten für das Abspalten eines einfachen (äußeren) Ausgangs.

Angenommen e ist eine Verzweigung von $[H''']$ und es existiert eine virtuelle Verbindungskante (a_1, e) mit $a_1 \in A(H_1)$, dann existiert nach Voraussetzung zu keiner von e ausgehenden Kante (e, a) eine virtuelle Verbindungskante (a, e_1) mit $e_1 \in E(H_2)$. Damit kann es sich bei a um keine Verzweigung von $[H''']$ handeln, da derartige Verzweigungen bereits entfernt wurden. Damit können, wie in der ersten Etappe vom Beweis zu Satz A2.8.3, die äußeren Ausgänge von $[H''']$, zu denen eine Kante von e führt, unter Verwendung erweiterter, vorwärts- und rückwärtszyklischer Permutation so sortiert werden, daß sie nebeneinander und vor den anderen äußeren Ausgängen liegen. (Vgl. Bild A2.35 unten.) O.B.d.A. kann also angenommen werden, daß die gegebene sequentielle Darstellung bereits Mittels Erweiterungen, Kürzungen, Zerlegungen, Verschmelzungen, Vertauschungen und Überbrückungen überführt wurde in eine

sequentielle Darstellung $S_5 := \begin{bmatrix} 0 & I_{a_1} & 0 & I_{a_2} & 0 \\ H_3 & H_1 & H & H_2 & H_4 \\ 0 & I_{b_1} & 0 & I_{b_2} & 0 \end{bmatrix}$ so, daß die

äußeren Ausgänge von $[H]$ geeignet sortiert sind.

Sei nun $[I_b']$ die durch die Typen der äußeren Ausgänge von $[H]$, zu denen keine Kante von e führt, eindeutig definierte Identität und $[H']$ die durch den Typen von e und die Anzahl m , der von e ausgehenden Kanten eindeutig bestimmte einfache Verzweigung. Weiter sei $[H'']$ das Netzwerk, das aus $[H]$ hervorgeht, wenn alle äußeren Ausgänge, zu denen eine Kante

von e führt, bis auf eine entfernt werden. Dann ist $\bar{A}(H'') = \bar{E}(0 \times H' \times I_{b'})$ und $[H] = [H''] \bullet ([0] \times [H'] \times [I_{b'}])$. (Vgl. Bild A2.35 unten.) Damit kann S_5 durch eine Zerlegung überführt werden in

$$S_6 := \begin{bmatrix} 0 & I_{t1} & 0 & 0 & I_{t2} & 0 \\ H_3 & H_1 & H'' & H' & H_2 & H_4 \\ 0 & I_{b1} & 0 & I_{b'} & I_{b2} & 0 \end{bmatrix}. \text{ So wie } e \text{ gewählt wurde, gibt es von}$$

$0 \times H' \times I_{b'}$ nach $I_{t2} \times H_2 \times I_{b2}$ keine virtuelle Verbindungskante (a', e') mit $a' \in A(H')$ und $e_2 \in E(H_2)$. Damit existieren nach Satz A2.6.1 Identitäten $[I_{t1}'']$, $[I_{b1}'']$, $[I_{t2}'']$ und $[I_{b2}'']$ derart, daß das

$$\text{Paar } \left(\begin{bmatrix} 0 & I_{t2} \\ H' & H_2 \\ I_{b'} & I_{b2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I_{t1}'' & I_{t2}'' \\ H_2 & H' \\ I_{b1}'' & I_{b2}'' \end{bmatrix} \right) \text{ eine Vertauschung aus } \rho_V(N') \text{ ist. Damit}$$

$$\text{kann } S_6 \text{ überführt werden in } S_7 := \begin{bmatrix} 0 & I_{t1} & 0 & I_{t1}'' & I_{t2}'' & 0 \\ H_3 & H_1 & H'' & H_2 & H' & H_4 \\ 0 & I_{b1} & 0 & I_{b1}'' & I_{b2}'' & 0 \end{bmatrix}.$$

Definiert man $[H'''] := ([I_{t2}'''] \times [H'] \times [I_{b2}''']) \bullet [H_4]$, so wird aus S_7

$$\text{durch eine Verschmelzung } S_8 := \begin{bmatrix} 0 & I_{t1} & 0 & I_{t1}'' & 0 \\ H_3 & H_1 & H'' & H_2 & H''' \\ 0 & I_{b1} & 0 & I_{b1}'' & 0 \end{bmatrix} \in \text{SEQ}(N'), \text{ wobei}$$

weder $[H'']$ noch $[H''']$ Subzentren, Interimknoten oder freie Ein- oder Ausgänge besitzen und $[H'']$ genau eine Verzweigung weniger hat als $[H]$.

Dieses Verfahren kann nun solange angewandt werden bis $[H'']$ (auch) keine Verzweigungen mehr besitzt, zu denen es eine virtuelle Verbindungskante von einem äußeren Ausgang von $[H_1]$ gibt.

Mit einem analogen Verfahren (vgl. Bild A2.37 unten) können alle noch vorhandenen Verjüngungen von $[H'']$ nach rechts verschoben werden, so daß $[H'']$ dann keine Verzweigungen und Verjüngungen mehr besitzt. Da $[H'']$ dann auch keine Subzentren, Interimknoten oder freie äußere Ein- und Ausgänge besitzt, handelt es sich bei $[H'']$ schließlich um eine Permutation.

q.e.d.

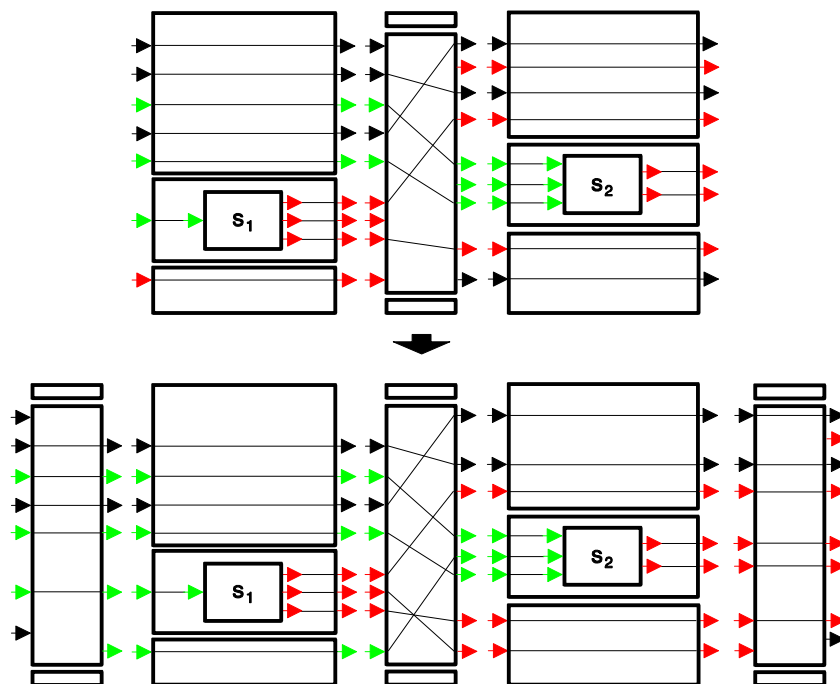


Bild A2.43: Eine Skizze zu Beweis von Satz A2.8.7, die das Entfernen freier äußerer Ein- und Ausgänge zeigt.

Satz A2.8.7:

Ist $S = \begin{bmatrix} I_{t1} & 0 & I_{t2} \\ H_1 & H & H_2 \\ I_{b1} & 0 & I_{b2} \end{bmatrix} \in \text{SEQ}(N')$ eine sequentielle Darstellung, wobei

[H] ein fast leeres Netzwerk ist, so existieren Identitäten $[I_{t1}']$, $[I_{b1}']$, $[I_{t2}']$, $[I_{b2}']$ und fast leere Netzwerke $[H_1']$, $[H_2']$ und $[H']$ derart, daß $[H']$ keine freien äußeren Ein- oder

Ausgänge besitzt, $S' = \begin{bmatrix} 0 & I_{t1}' & 0 & I_{t2}' & 0 \\ H_1' & H_1 & H' & H_2 & H_2' \\ 0 & I_{b1}' & 0 & I_{b2}' & 0 \end{bmatrix} \in \text{SEQ}(N')$ und S durch

Erweiterungen, Kürzungen, Zerlegungen, Verschmelzungen und Vertauschungen in S' überführbar ist. (Vgl. Bild A2.43.)

Beweis:

S kann durch je eine einfache Links- und Rechtserweiterung

überführt werden in $S_1 := \begin{bmatrix} 0 & I_{t1} & 0 & I_{t2} & 0 \\ I_1 & H_1 & H & H_2 & I_2 \\ 0 & I_{b1} & 0 & I_{b2} & 0 \end{bmatrix} \in \text{SEQ}(N')$, wobei $[I_1]$

und $[I_2]$ entsprechende Identitäten sind. Angenommen [H] besitzt keine freien äußeren Ein- oder Ausgänge, so kann $S'=S_1$ definiert werden.

Angenommen $[H]$ besitzt mindestens einen freien äußeren Eingang e . Sei $[I_t']$ die durch den Typenausgangsvektor von $[H]$ eindeutig definierte Identität und $[H_e]$ der durch den Typen von e eindeutig definierte einfache Eingang. Weiter sei $[H'']$, das Netzwerk, das aus $[H]$ entsteht, wenn ein äußerer Ausgang a mit demselben Typen wie e und die Kante (e,a) hinzugefügt wird. Dann ist $\bar{A}(H'') = \bar{E}(I_t' \times H_e \times 0)$ und $[H] = [H''] \bullet ([I_t'] \times [H_e] \times [0])$. (Vgl. Bild A2.39 oben.) Damit kann S_1 durch eine Zerlegung überführt

werden in $S_2 := \begin{bmatrix} 0 & I_{t1} & 0 & I_t' & I_{t2} & 0 \\ I_1 & H_1 & H'' & H_e & H_2 & I_2 \\ 0 & I_{b1} & 0 & 0 & I_{b2} & 0 \end{bmatrix} \in \text{SEQ}(N')$. Natürlich gibt es

keine virtuelle Verbindungskante (a', e') von $I_t' \times H_e \times 0$ nach $I_{t2} \times H_2 \times I_{b2}$ mit $a' \in A(H_e)$ und $e' \in E(H_2)$. Damit existieren Identitäten $[I_{t1}''], [I_{b1}''], [I_{t2}'']$ und $[I_{b2}'']$ derart, daß das Paar

$\left(\begin{bmatrix} I_t' & I_{t2} \\ H_e & H_2 \\ 0 & I_{b2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I_{t1}'' & I_{t2}'' \\ H_2 & H_e \\ I_{b1}'' & I_{b2}'' \end{bmatrix} \right)$ eine Vertauschung aus $\rho_V(N')$ ist. Damit

kann S_2 überführt werden in $S_3 := \begin{bmatrix} 0 & I_{t1} & 0 & I_{t1}'' & I_{t2}'' & 0 \\ I_1 & H_1 & H'' & H_2 & H_e & I_2 \\ 0 & I_{b1} & 0 & I_{b1}'' & I_{b2}'' & 0 \end{bmatrix}$.

Definiert man $[H'''] := ([I_{t2}''] \times [H_e] \times [I_{b2}'']) \bullet [I_2]$, so wird aus S_3

durch eine Verschmelzung $S_4 := \begin{bmatrix} 0 & I_{t1} & 0 & I_{t1}'' & 0 \\ I_1 & H_1 & H'' & H_2 & H''' \\ 0 & I_{b1} & 0 & I_{b1}'' & 0 \end{bmatrix} \in \text{SEQ}(N')$, wobei

weder $[H'']$ noch $[H''']$ Subzentren oder Interimknoten besitzen und $[H'']$ genau einen freien äußeren Eingang weniger besitzt als $[H]$.

Dieses Verfahren kann nun solange angewandt werden bis $[H'']$ keinen freien äußeren Eingang mehr besitzt. Mit einem analogen Verfahren können alle äußeren Ausgänge von $[H'']$ nach links verschoben werden, so daß $[H'']$ dann keine freien äußeren Ein- oder Ausgänge mehr besitzt.

q.e.d.

Die drei vorausgegangenen Verfahren werden nun zu einem zusammengefaßt.

Satz A2.8.9:

Ist $S = \begin{bmatrix} I_{t1} & 0 & I_{t2} \\ H_1 & H & H_2 \\ I_{b1} & 0 & I_{b2} \end{bmatrix} \in \text{SEQ}(N')$ eine sequentielle Darstellung, wobei

$[H]$ ein Netzwerk ohne Subzentren und Interimknoten ist und gibt es keine Kante (e,a) von $[H]$, die sowohl von $[H_1]$ ausgeht,

als auch zu $[H_2]$ führt, so existieren Identitäten $[I_{t2}']$, $[I_{b2}']$, $[I_{t3}']$, $[I_{b3}']$ und fast leere Netzwerke $[H_3']$ und $[H_4']$

derart, daß $S' = \begin{bmatrix} 0 & I_2' & I_3' & 0 \\ H_3' & H_2 & H_1 & H_4' \\ 0 & I_{b2}' & I_{b3}' & 0 \end{bmatrix} \in \text{SEQ}(N')$ und S durch

Erweiterungen, Kürzungen, Zerlegungen, Verschmelzungen, Vertauschungen und Überbrückungen in S' überführbar ist.

Beweis:

Nach Satz A2.8.7 existieren Identitäten $[I_{t2}''], [I_{b2}''], [I_{t3}''], [I_{b3}'']$ und fast leere Netzwerke $[H_3''], [H_4'']$ und $[H']$ derart, daß $[H'']$ keine freien äußeren Ein- oder Ausgänge besitzt,

$S'' = \begin{bmatrix} 0 & I_{t1}'' & 0 & I_{t2}'' & 0 \\ H_3'' & H_1 & H'' & H_2 & H_4'' \\ 0 & I_{b1}'' & 0 & I_{b2}'' & 0 \end{bmatrix} \in \text{SEQ}(N')$ und S durch Erweiterungen,

Kürzungen, Zerlegungen, Verschmelzungen und Vertauschungen in S'' überführbar ist. Dabei gilt weiterhin die Bedingung:

(*) Es gibt keine Kante (e,a) von $[H]$, die sowohl von $[H_1]$ ausgeht, als auch zu $[H_2]$ führt.

Nach Satz A2.8.5 existieren damit Identitäten $[I_{t1}'''], [I_{b1}'''], [I_{t2}'''], [I_{b2}''']$, fast leere Netzwerke $[H_3'''], [H_4''']$ und eine Permutation $[P]$ derart, daß

$S''' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_{t1}''' & 0 & I_{t2}''' & 0 & 0 \\ H_3''' & H_3''' & H_1 & P & H_2 & H_4''' & H_4'' \\ 0 & 0 & I_{b1}''' & 0 & I_{b2}''' & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \text{SEQ}(N')$ und S'' durch

Erweiterungen, Kürzungen, Zerlegungen, Verschmelzungen, Vertauschungen und Überbrückungen in S' überführbar ist.

Da auch für $[P]$ weiterhin die Bedingung (*) gilt, existieren nach Satz A2.8.3 Identitäten $[I_{t2}'], [I_{b2}'], [I_{t3}'], [I_{b3}']$ und Permutationen $[P_1']$ und $[P_2']$ derart, daß

$S'''' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & I_2' & I_3' & 0 & 0 & 0 \\ H_3'' & H_3''' & P_1' & H_2 & H_1 & P_2' & H_4''' & H_4'' \\ 0 & 0 & 0 & I_{b2}' & I_{b3}' & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \text{SEQ}(N')$ und S durch

Erweiterungen, Kürzungen, Zerlegungen, Verschmelzungen, Vertauschungen und Überbrückungen in S' überführbar ist.

Definiert man nun $[H_3'] := [H_3''] \bullet [H_3'''] \bullet [P_1']$ und $[H_4'] :=$

$[P_2'] \bullet [H_4'''] \bullet [H_4'']$, so ist $S' := \begin{bmatrix} 0 & I_2' & I_3' & 0 \\ H_3' & H_2 & H_1 & H_4' \\ 0 & I_{b2}' & I_{b3}' & 0 \end{bmatrix} \in \text{SEQ}(N')$ und S'''

durch zwei Verschmelzungen überführbar in S' . Nach [HÜB95] Satz A2.4.8 (c) ist damit S durch Erweiterungen, Kürzungen, Zerlegungen, Verschmelzungen, Vertauschungen und Überbrückungen in S' überführbar, wobei $[H_3']$ und $[H_4']$ Netzwerke sind, die weder Subzentren noch Interimknoten beinhalten.

q.e.d.

Da mit obigem Verfahren Faktoren in zwei verschiedenen sequentiellen Darstellungen nach rechts verschoben werden können, benötigt man jetzt noch ein Kriterium, mit dem die rechten Seiten dieser neuen sequentiellen Darstellungen als identisch erkannt werden können. Dabei ist zu beachten, daß rechts neben dem äußersten Faktor mit Subzentrum oder Interimknoten noch ein Faktor ohne Subzentrum und Interimknoten stehen kann. Durch geeignete Überführungen können für diesen Faktor allerdings bestimmte Eigenschaften erzwungen werden.

Satz A2.8.11:

Ist $S = \begin{bmatrix} I_{t1} & 0 \\ H_1 & H \\ I_{b1} & 0 \end{bmatrix} \in \text{SEQ}(N')$ eine sequentielle Darstellung, wobei $[H]$

ein fast leeres Netzwerk ist, so existieren Identitäten $[I_{t1}']$ und $[I_{b1}']$ und zwei Netzwerke $[H_2']$ und $[H']$ ohne Subzentren und Interimknoten derart, daß S durch Erweiterungen, Zerlegungen, Verschmelzungen und Vertauschungen überführbar

ist in $S' := \begin{bmatrix} 0 & I_{t1}' & 0 \\ H_2' & H_1 & H' \\ 0 & I_{b1}' & 0 \end{bmatrix} \in \text{SEQ}(N')$ und es zu jedem äußeren Ausgang

von $[H']$ eine nicht von $[H_1]$ ausgehende Kante gibt. (Vgl. Bild A2.45.)

Beweis:

Es kann wie im Beweis von Satz A2.8.7 vorgegangen werden. Durch eine einfache Linkserweiterung kann S überführt werden

in $S_1 := \begin{bmatrix} 0 & I_{t1} & 0 \\ I & H_1 & H \\ 0 & I_{b1} & 0 \end{bmatrix} \in \text{SEQ}(N')$, wobei $[I]$ eine geeignete Identität

ist. Angenommen $[H]$ besitzt einen äußeren Ausgang a , der entweder ein freier äußerer Ausgang ist oder dessen eingehende Kanten alle von $[H_1]$ ausgehen. Sei $[I_t']$ die durch den Typeneingangsvektor von $[H]$ eindeutig definierte Identität und $[H_a]$ der durch den Typen von a eindeutig definierte einfache

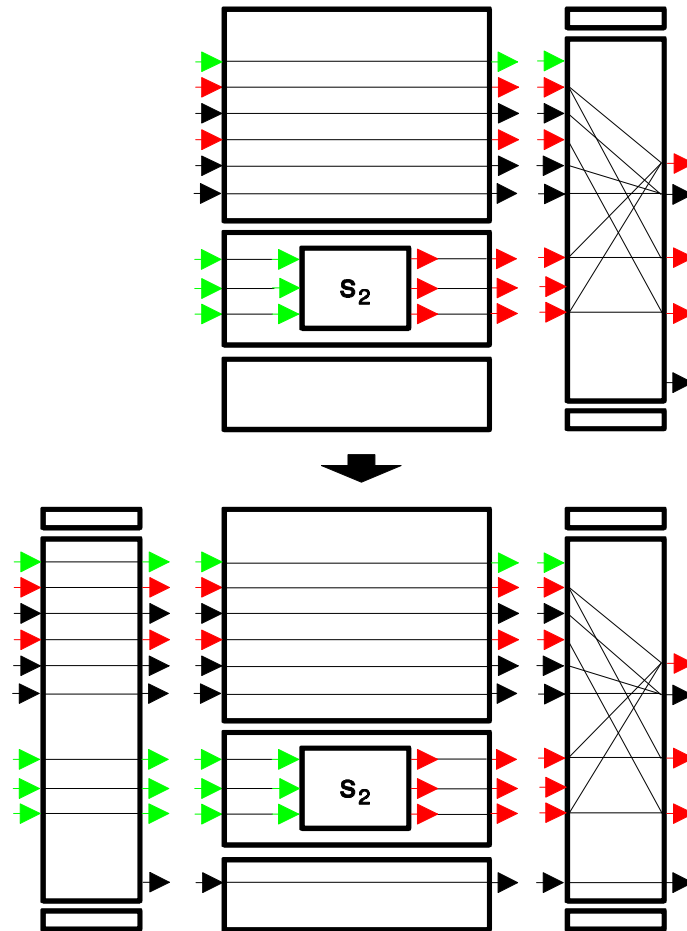


Bild A2.45: Eine Skizze zu Beweis von Satz A2.8.11, die das Entfernen freier äußerer Eingänge zeigt.

Ausgang. Weiter sei $[H'']$ das Netzwerk, das aus $[H]$ entsteht, wenn ein äußerer Eingang e mit demselben Typen wie a und die Kante (e, a) hinzugefügt wird. Dann ist $\bar{E}(H'') = \bar{A}(I_t' \times H_a \times 0)$ und $[H] = ([I_t'] \times [H_a] \times [0]) \bullet [H'']$. (Vgl. Bild A2.41 unten.) Damit kann

S_1 durch eine Zerlegung überführt werden in $S_2 := \begin{bmatrix} 0 & I_{t1} & I_t' & 0 \\ I & H_1 & H_a & H'' \\ 0 & I_{b1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \in$

$SEQ(N')$. Natürlich gibt es keine virtuelle Verbindungskante (a', e') von $I_{t1} \times H_1 \times I_{b1}$ nach $I_t' \times H_a \times 0$ mit $a' \in A(H_1)$ und $e' \in E(H_a)$. Damit existieren Identitäten $[I_{t1}''], [I_{b1}''], [I_{t2}'']$ und $[I_{b2}'']$

derart, daß das Paar $\left(\begin{bmatrix} I_{t1} & I_t' \\ H_1 & H_a \\ I_{b1} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I_{t1}'' & I_{t2}'' \\ H_a & H_1 \\ I_{b1}'' & I_{b2}'' \end{bmatrix} \right)$ eine Vertauschung aus

$\rho_V(N')$ ist. Damit kann S_2 überführt werden in

$$S_3 := \begin{bmatrix} 0 & I_{t1}'' & I_{t2}'' & 0 \\ I & H_a & H_1 & H'' \\ 0 & I_{b1}'' & I_{b2}'' & 0 \end{bmatrix}.$$

Definiert man $[H_2''] := [I] \bullet ([I_{t_1}''] \times [H_a] \times [I_{b_1}''])$, so wird aus S_3

durch eine Verschmelzung $S_4 := \begin{bmatrix} 0 & I_2'' & 0 \\ H_2'' & H_1 & H'' \\ 0 & I_{b_2}'' & 0 \end{bmatrix} \in \text{SEQ}(N')$, wobei weder

$[H_2'']$ noch $[H'']$ Subzentren oder Interimknoten besitzen und $[H'']$ genau einen äußeren Ausgang mehr besitzt als $[H]$, zu dem eine nicht von $[H_1]$ ausgehende Kante führt.

Dieses Verfahren kann nun solange angewandt werden bis zu jedem äußeren Ausgang eine Kante führt, die nicht von $[H_1]$ ausgeht.

q.e.d.

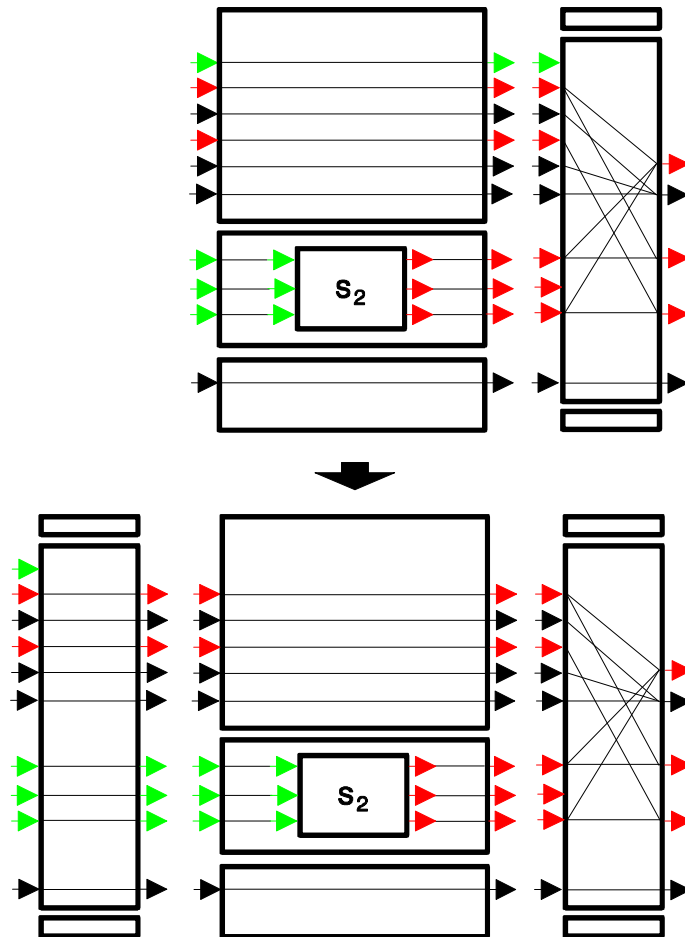


Bild A2.47: Eine Skizze zu Beweis von Satz A2.8.7, die das Hinzufügen geeigneter virtueller Verbindungskanten zeigt.

Unter gewissen Umständen, (die der nachfolgende Satz genauer benennt), kann neben den freien äußeren Ausgängen auch ein Teil der freien äußeren Eingänge von $[H]$ entfernt werden.

Satz A2.8.7:

Ist $S = \begin{bmatrix} I_{t1} & 0 \\ H_1 & H \\ I_{b1} & 0 \end{bmatrix} \in \text{SEQ}(N')$ eine sequentielle Darstellung, wobei $[H]$

ein fast leeres Netzwerk ist, so existieren Identitäten $[I_{t1}']$ und $[I_{b1}']$ und zwei fast leere Netzwerke $[H_2']$ und $[H']$ derart, daß S durch Erweiterungen, Zerlegungen, Verschmelzungen und

Vertauschungen überführbar ist in $S' := \begin{bmatrix} 0 & I_{t1}' & 0 \\ H_2' & H_1 & H' \\ 0 & I_{b1}' & 0 \end{bmatrix} \in \text{SEQ}(N')$,

wobei zu jedem freien, äußeren Eingang von $[H']$ eine virtuelle Verbindungskante von einem äußeren Ausgang von $[H_1]$ führt. (Vgl. Bild A2.47.)

Beweis:

Freie, äußere Eingänge von $[H']$, zu denen es keine virtuelle Verbindungskante von einem äußeren Ausgang von $[H_1]$ gibt, können wie im Beweis von Satz A2.8.7 gezeigt, durch Erweiterungen, Zerlegungen, Verschmelzungen und Vertauschungen auf die Seite links von $[H_1]$ gebracht werden.

q.e.d.

Satz A2.8.9:

Ist $S = \begin{bmatrix} I_{t1} & 0 \\ H_1 & H \\ I_{b1} & 0 \end{bmatrix} \in \text{SEQ}(N')$ eine sequentielle Darstellung, wobei $[H]$

ein fast leeres Netzwerk ist, so existieren Identitäten $[I_{t1}']$ und $[I_{b1}']$ und zwei fast leere Netzwerke $[H_2']$ und $[H']$ derart, daß S durch Erweiterungen, Zerlegungen, Verschmelzungen und

Vertauschungen überführbar ist in $S' := \begin{bmatrix} 0 & I_{t1}' & 0 \\ H_2' & H_1 & H' \\ 0 & I_{b1}' & 0 \end{bmatrix} \in \text{SEQ}(N')$,

wobei zu jedem äußeren Eingang von $[H']$, der eine Verzweigung ist, eine virtuelle Verbindungskante von einem äußeren Ausgang von $[H_1]$ führt. (Vgl. Bild A2.49.)

Beweis:

Äußere Eingänge von $[H']$, die eine Verzweigung sind und zu denen es keine virtuelle Verbindungskante von einem äußeren Ausgang von $[H_1]$ gibt, können wie im ersten Teil vom Beweis zu Satz A2.8.5 gezeigt, durch Erweiterungen, Zerlegungen, Verschmelzungen und Vertauschungen auf die Seite links von $[H_1]$ gebracht werden.

q.e.d.

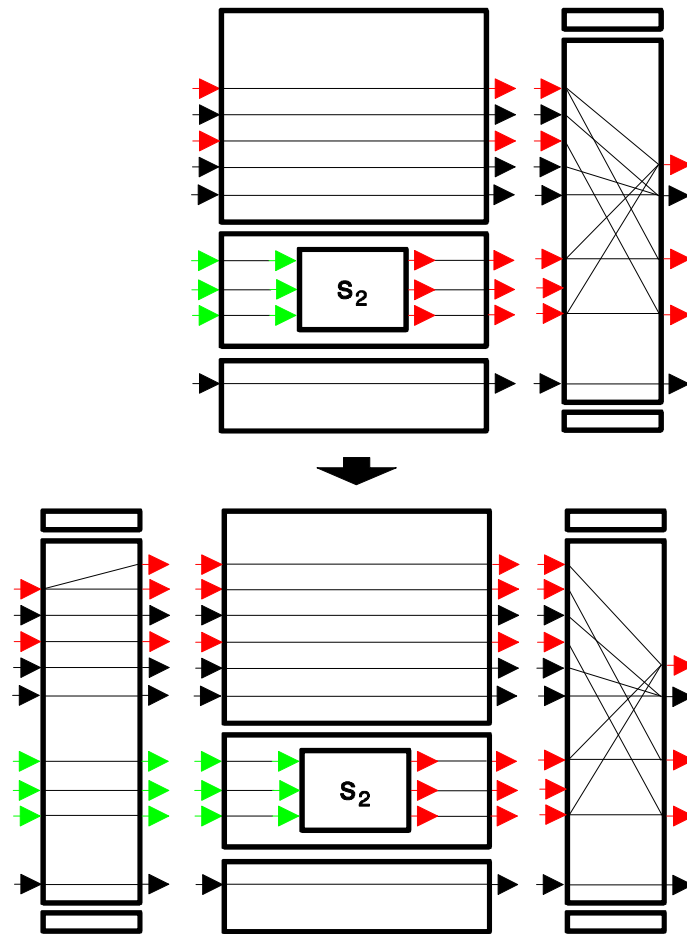


Bild A2.49: Eine Skizze zu Beweis von Satz A2.8.9, die das Entfernen von Verzweigungen zeigt.

Satz A2.8.11:

Sei $S = \begin{bmatrix} I_{t1} & 0 \\ H_1 & H \\ I_{b1} & 0 \end{bmatrix} \in \text{SEQ}(N')$ eine sequentielle Darstellung, wobei $[H_1]$

ein einfaches Netzwerk mit oder ohne Schleifen oder ein einfacher Interimknoten und $[H]$ ein fast leeres Netzwerk ist. Gibt es dann zu jedem äußeren Eingang von $[H]$, der eine Verzweigung ist, eine virtuelle Verbindungskante von einem äußeren Ausgang von $[H_1]$, so existieren Identitäten $[I_{t1}']$ und $[I_{b1}']$ und zwei fast leere Netzwerke $[H_2']$ und $[H']$ derart, daß S durch Erweiterungen, Zerlegungen, Verschmelzungen, Vertauschungen und Überbrückungen überführbar ist in

$$S' := \begin{bmatrix} 0 & I_{t_1}' & 0 \\ H_2' & H_1 & H' \\ 0 & I_{b_1}' & 0 \end{bmatrix} \in \text{SEQ}(N'), \text{ wobei zu einem äußeren Ausgang von}$$

[H'] höchstens eine Kante führt, die nicht von [H₁] ausgeht. (Vgl. Bild A2.51.)

Beweis:

Sei a ein äußerer Ausgang von [H] zu dem mehr als eine von [H₁] ausgehende Kante führt und (e,a) eine solche Kante, dann kann e nach Voraussetzung keine Verzweigung sein. Wie im Beweis von Satz A2.8.5 können nun unter Verwendung erweiterter vorwärts- bzw. rückwärtszyklischer Permutationen die äußeren Eingänge von [H] so sortiert werden, daß gerade alle äußeren Eingänge mit einer Kante zu a, die nicht von [H₁] ausgeht, nebeneinander und vor den anderen äußeren Eingängen von [H] bzw. [H''] liegen. Dabei wird S' durch Erweiterungen, Zerlegungen, Verschmelzungen, Vertauschungen und Überbrückungen überführt

$$\text{in } S_1 := \begin{bmatrix} 0 & I_{t_1}'' & 0 \\ H_2'' & H_1 & H'' \\ 0 & I_{b_1}'' & 0 \end{bmatrix} \in \text{SEQ}(N').$$

Sei m die Anzahl aller Kanten in [H] bzw. [H''] die zu a führen und nicht von [H₁] ausgehen, dann muß nach Wahl von a $m \geq 2$ sein. Damit definiert m zusammen mit dem Typen von a eindeutig eine einfache Verjüngung [H_a] mit genau m äußeren Eingängen. Ist [H'''] das Netzwerk das aus [H''] hervorgeht, wenn die ersten m-1 äußeren Eingänge entfernt werden und [I_b'''] die durch den Typeneingangsvektor von [H'''] eindeutig definierte Identität, dann ist $\vec{E}(H''') = \vec{A}(0 \times H_a \times I_{b'''})$ und $[H'''] = (0 \times [H_a] \times [I_{b'''}]) \bullet [H''']$. (Vgl. Bild A2.51.) Damit kann S₁ durch eine Zerlegung überführt

$$\text{werden in } S_2 := \begin{bmatrix} 0 & I_{t_1}'' & 0 & 0 \\ H_2'' & H_1 & H_a & H''' \\ 0 & I_{b_1}'' & I_{b'''} & 0 \end{bmatrix} \in \text{SEQ}(N'). \text{ Nach der Wahl der}$$

äußeren Eingänge [H_a] bzw. [H'''] gibt es von $I_{t_1}'' \times H_1 \times I_{b_1}''$ nach $0 \times H_a \times I_{b''}'$ keine virtuelle Verbindungskante (a',e') mit $a' \in A(H_1)$ und $e' \in E(H_a)$. Damit existieren nach Satz A2.6.1 Identitäten [I_{t₁'''}], [I_{b₁'''}], [I_{t₂'''}] und [I_{b₂'''}] derart,

daß das Paar $\left(\begin{bmatrix} I_{t_1}'' & 0 \\ H_1 & H_a \\ I_{b_1}'' & I_{b''}' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I_{t_1}''' & I_{t_2}''' \\ H_a & H_1 \\ I_{b_1}''' & I_{b_2}''' \end{bmatrix} \right)$ eine Vertauschung aus

$\rho_V(N')$ ist mit der sich S₂ überführen läßt in

$$S_3 := \begin{bmatrix} 0 & I_{t_1}''' & I_{t_2}''' & 0 \\ H_2'' & H_a & H_1 & H''' \\ 0 & I_{b_1}''' & I_{b_2}''' & 0 \end{bmatrix} \in \text{SEQ}(N').$$

Definiert man nun $[H_2'''] := [H_2'''] \bullet ([I_{t_1}'''] \times [H_a] \times [I_{b_1}'''])$, so läßt sich S₃ durch eine Verschmelzung überführen in

$$S_4 := \begin{bmatrix} 0 & I_{b_2}''' & 0 \\ H_2''' & H_1 & H''' \\ 0 & I_{b_2}''' & 0 \end{bmatrix} \in \text{SEQ}(N'), \text{ wobei in } [H'''] \text{ ein } \text{äußerer Ausgang}$$

weniger existiert als in $[H'']$, zu dem mehr als eine Kante von $[H_1]$ führt.

Durch wiederholtes Anwenden obigen Verfahrens kann damit S_4

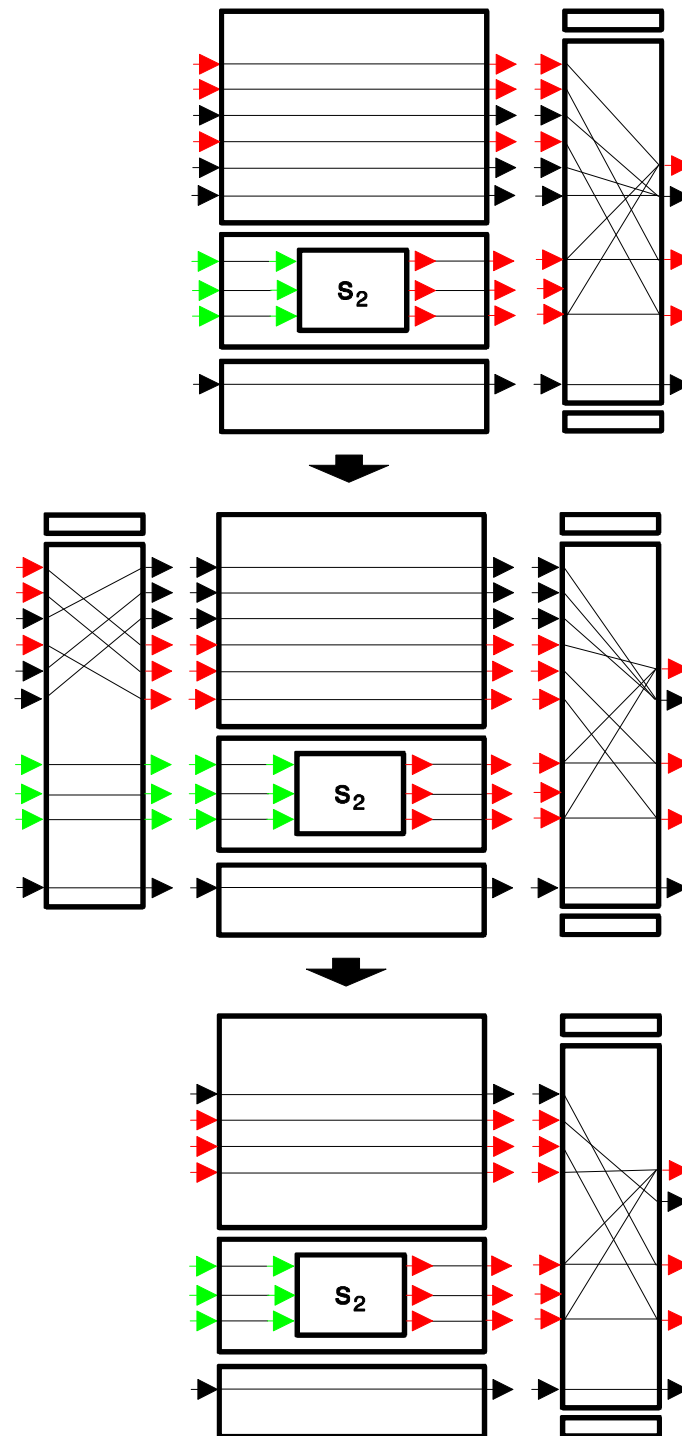


Bild A2.51: Eine Skizze zu Beweis von Satz A2.8.11, die das Entfernen von Eingangsverjüngungen zeigt.

durch Erweiterungen, Zerlegungen, Verschmelzungen, Vertauschungen und Überbrückungen überführt werden in

$$S' := \begin{bmatrix} 0 & I_{t_1}' & 0 \\ H_2' & H_1 & H' \\ 0 & I_{b_1}' & 0 \end{bmatrix} \in \text{SEQ}(N'), \text{ wobei zu einem äußeren Ausgang von}$$

$[H']$ höchstens eine Kante führt, die nicht von $[H_1]$ ausgeht.

q.e.d.

Satz A2.8.13:

Sei $S = \begin{bmatrix} I_{t_1} & 0 \\ H_1 & H \\ I_{b_1} & 0 \end{bmatrix} \in \text{SEQ}(N')$ eine sequentielle Darstellung, wobei

$n := |A(H_1)|$ und $[H]$ ein fast leeres Netzwerk ist, zu dessen äußeren Ausgängen je genau eine nicht von $[H_1]$ ausgehende Kante führt. Dann existiert eine Permutation $[P']$, eine Identität $[I_{b_1}']$ und ein fast leeres Netzwerk $[H']$ derart, daß S durch Erweiterungen, Zerlegungen, Verschmelzungen und Vertauschungen

überführbar ist in $S' := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ P' & H_1 & H' \\ 0 & I_{b_1}' & 0 \end{bmatrix}$ und für jede nicht von $[H_1]$

ausgehende Kante (e, a) aus $[H']$ mit Index von a gleich i , der Index von e gleich $n+i$ ist. (Vgl. Bild A2.53.)

Beweis:

Sorge zunächst dafür, daß die über $[H_1]$ stehende Identität zu 0 wird, falls dies noch nicht der Fall ist. Überführe dazu S

durch eine Erweiterung in $S_1 := \begin{bmatrix} 0 & I_{t_1} & 0 \\ I & H_1 & H \\ 0 & I_{b_1} & 0 \end{bmatrix}$, wobei $[I]$ die

linksseitige Identität von $[I_{t_1}] \times [H_1] \times [I_{b_1}]$ ist. Sei j der Index des ersten äußeren Eingangs von $[I_{b_1}]$ in $[I_{t_1}] \times [H_1] \times [I_{b_1}]$ und $[P'']$ die durch den Typeneingangsvektor von $[I_{t_1}] \times [H_1] \times [I_{b_1}]$ eindeutig bestimmte, erweitert vorwärtszyklische Permutation mit einer Kante vom j -ten äußeren Eingang zum ersten äußeren Ausgang. Dann ist S_1 durch eine Zerlegung überführbar in

$S_2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_{t_1} & 0 \\ P''^{-1} & P'' & H_1 & H \\ 0 & 0 & I_{b_1} & 0 \end{bmatrix}$. Nach der Wahl von $[P'']$ sind die

Voraussetzungen von Satz A2.6.5 erfüllt und es existieren Identitäten $[I_{t_1}'']$ und $[I_{b_1}'']$ sowie eine erweitert vorwärtszyklische Permutation $[P_3]$ derart, daß das Paar

$\left(\begin{bmatrix} 0 & I_{t_1} \\ P'' & H_1 \\ 0 & I_{b_1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I_{t_1}'' & 0 \\ H_1 & P_3 \\ I_{b_1}'' & 0 \end{bmatrix} \right)$ eine Überbrückung aus $\rho_B(N')$ ist und $[I_{t_1}'']$

eine Kante weniger besitzt als $[I_{t_1}]$. (Vgl. Bild A2.29.) Mit dieser Überbrückung kann S_2 überführt werden in

$S_3 := \begin{bmatrix} 0 & I_{t_1}'' & 0 & 0 \\ P''^{-1} & H_1 & P_3 & H \\ 0 & I_{b_1}'' & 0 & 0 \end{bmatrix}$ und durch eine Verschmelzung in

$S_4 := \begin{bmatrix} 0 & I_{t_1}'' & 0 \\ P''^{-1} & H_1 & H''' \\ 0 & I_{b_1}'' & 0 \end{bmatrix}$, wobei $[H'''] := [P_3] \bullet [H]$ ist. Durch wiederholtes

Anwenden dieses Verfahren kann also S überführt werden in eine

sequentielle Darstellung $S'' := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ P_1'' & H_1 & H'' \\ 0 & I'' & 0 \end{bmatrix}$, wenn zum Schluß alle

links von $[H_1]$ stehenden Permutationen durch eine Verschmelzung zu einer Permutation zusammengefaßt werden.

Abschließend müssen nun die Kanten von $[I'']$ geeignet sortiert werden. Durchlaufe die äußeren Ausgänge von $[H'']$ der Reihe nach und prüfe, ob die zu a führende und nicht von $[H_1]$ ausgehende Kante vom i -ten äußeren Ausgang von $[I'']$ ausgeht. Ist dies nicht der Fall, so existiert ein $j > i$ derart, daß die zu a führende Kante vom j -ten äußeren Ausgang von $[I'']$ ausgeht. Dieser Umstand kann nun benutzt werden um S'' in eine sequentielle Darstellung zu überführen, in der die zu a führende Kante vom i -ten äußeren Ausgang von $[I'']$ ausgeht.

S'' kann durch eine Erweiterung überführt werden in

$S_1'' := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_1'' & H_1 & I'' & H'' \\ 0 & I'' & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Sei $[P'']$ die durch den Typeneingangsvektor

von $[H'']$ eindeutig definierte erweiterte rückwärtszyklische Permutation mit einer Kante vom i -ten äußeren Eingang zum j -ten äußeren Ausgang und $[I_t''']$ bzw. $[I_t''']$ bzw. P''' die obere bzw. untere Identität bzw. rückwärtszyklische Permutation von P'' . Dann kann S_1'' durch eine Zerlegung überführt werden in

$S_2'' := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_1'' & H_1 & P''^{-1} & P'' & H'' \\ 0 & I'' & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Definiert man $[H'''] := [P''] \bullet [H'']$, so

wird aus S_2'' durch eine Verschmelzung $S_3'' := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_1'' & H_1 & P''^{-1} & H''' \\ 0 & I'' & 0 & 0 \end{bmatrix}$ und

durch eine Zerlegung daraus wiederum $S_4'' := \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_t''' & 0 \\ P_1'' & H_1 & P'''^{-1} & H''' \\ 0 & I'' & I_b''' & 0 \end{bmatrix}$.

Nach der Wahl von $[P_3'']$ gelten die Voraussetzungen für Satz A2.6.1, womit Identitäten $[I_{t_1}']$, $[I_{b_1}']$ und $[I''']$ existieren

derart, daß das Paar $\left(\begin{bmatrix} 0 & I_t''' \\ H_1 & P'''^{-1} \\ I'' & I_b''' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I_{t_1}' & 0 \\ P'''^{-1} & H_1 \\ I_{b_1}' & I''' \end{bmatrix} \right)$ eine Vertauschung aus

$\rho_V(N')$ ist. Damit kann S_4'' überführt werden in

$S_4'' := \begin{bmatrix} 0 & I_{t_1}' & 0 & 0 \\ P_1'' & P'''^{-1} & H_1 & H''' \\ 0 & I_{b_1}' & I'' & 0 \end{bmatrix}$. Definiert man $[P_1'''] := [P_1''] \cdot ([I_{t_1}'] \times [P''']^{-1} \times [I_{b_1}'])$ so erhält man durch eine weitere Verschmelzung

schließlich $S_5'' := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ P_1''' & H_1 & H''' \\ 0 & I'' & 0 \end{bmatrix}$. Werden diese Schritte für alle

äußeren Ausgänge wiederholt, so lassen sich alle nicht von $[H_1]$ ausgehenden Kanten in der gewünschten Art und Weise sortieren.

q.e.d.

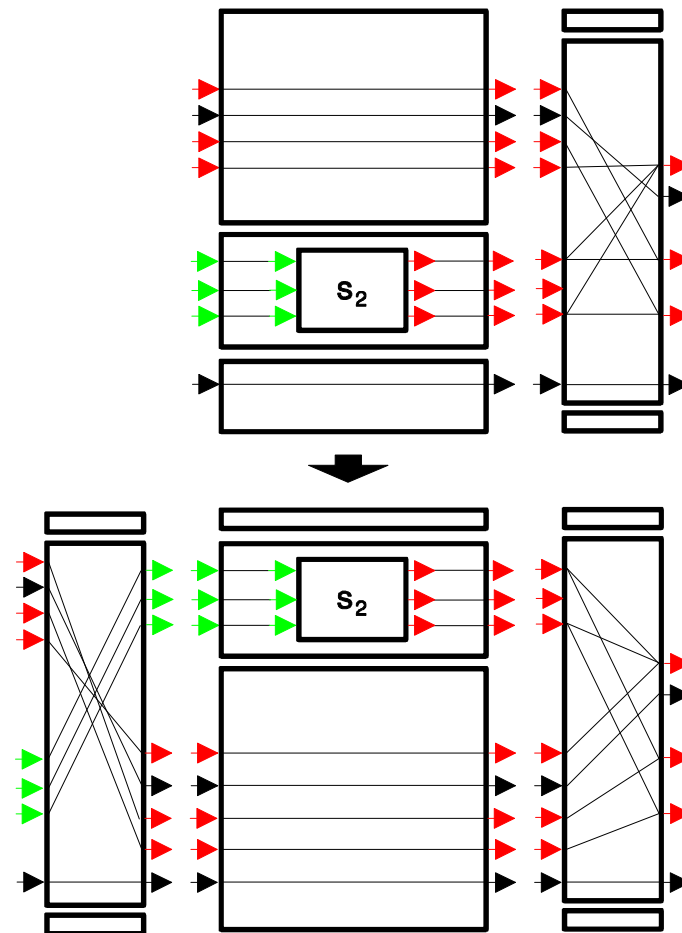


Bild A2.53: Eine Skizze zu Beweis von Satz A2.8.13, die das Entfernen der oberen Identität zeigt.

Die obig angegebenen Verfahren können nun zu einem einzigen zusammengefaßt werden.

Satz A2.8.15:

Ist $S = \begin{bmatrix} I_{t1} & 0 \\ H_1 & H \\ I_{b1} & 0 \end{bmatrix} \in \text{SEQ}(N')$ eine sequentielle Darstellung, wobei $[H_1]$

ein einfaches Netzwerk mit oder ohne Schleifen oder ein einfacher Interimknoten und $[H]$ ein fast leeres Netzwerk ist, so existieren eine Identität $[I_{b1}']$ und zwei fast leere Netzwerke $[H_2']$ und $[H']$ derart, daß S durch Erweiterungen, Zerlegungen, Verschmelzungen, Vertauschungen und

Überbrückungen überführbar ist in $S' := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ H_2' & H_1 & H' \\ 0 & I_{b1}' & 0 \end{bmatrix} \in \text{SEQ}(N')$

und außerdem folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (1) Ist ein äußerer Eingang e von $[H']$ eine Verzweigung oder ein freier Eingang, so ist der Index von e kleiner gleich $n := |A(H_1)|$.
- (2) Zu jedem äußeren Ausgang von $[H']$ führt eine Kante von einem äußeren Eingang mit einem Index größer als n .
- (3) Ist e ein äußerer Eingang von $[H']$ mit dem Index $n+i$, so führt die nach (1) von e ausgehende Kante zum i -ten äußeren Ausgang von $[H']$.

Beweis:

Mit dem Verfahren aus dem Beweis von Satz A2.8.11 kann S

überführt werden in $S_2 := \begin{bmatrix} 0 & I_{a_1}'' & 0 \\ H_2'' & H_1 & H'' \\ 0 & I_{b_1}'' & 0 \end{bmatrix} \in \text{SEQ}(N')$, wobei es zu jedem

äußeren Ausgang von $[H'']$ eine nicht von $[H_1]$ ausgehende Kante gibt. Unter Anwendung der Verfahren aus Satz A2.8.7 und Satz A2.8.9 kann S_1 überführt werden in

$S_3 := \begin{bmatrix} 0 & I_{a_1}''' & 0 \\ H_2''' & H_1 & H''' \\ 0 & I_{b_1}''' & 0 \end{bmatrix} \in \text{SEQ}(N')$, wobei es zu jedem äußeren Ausgang

von $[H''']$ eine nicht von $[H_1]$ ausgehende Kante gibt und zu jedem äußeren Eingang von $[H''']$, der ein freier äußerer Eingang oder eine Verzweigung ist, eine virtuelle Verbindungskante von einem äußeren Ausgang von $[H_1]$ führt. Mit den Verfahren aus Satz A2.8.11 und Satz A2.8.13, kann S_3

schließlich überführt werden in $S' := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ H_2' & H_1 & H' \\ 0 & I_{b_1}' & 0 \end{bmatrix} \in \text{SEQ}(N')$, wobei

$[H']$ die folgenden Bedingungen erfüllt:

- (1') Ist ein äußerer Eingang e von $[H']$ eine Verzweigung oder ein freier Eingang, so führt zu e eine virtuelle Verbindungskante von einem äußeren Ausgang von $[H_1]$.
- (2') Zu jedem äußeren Ausgang von $[H']$ führt genau eine Kante, die nicht von $[H_1]$ ausgeht.
- (3') Für jede nicht von $[H_1]$ ausgehende Kante (e, a) aus $[H']$ mit Index von a gleich i ist der Index von e gleich $n+i$.

Aus (1') bzw. (2') bzw. (3') folgt unmittelbar die Bedingung (1) bzw. (2) bzw. (3). (Vgl. Bild A2.53 unten.)

q.e.d.

Satz A2.8.17:

Sind $S_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ H & H_1 \\ I_{b1} & 0 \end{bmatrix}$ und $S_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ H & H_2 \\ I_{b2} & 0 \end{bmatrix}$ zwei sequentielle Darstellungen

aus $SEQ(N')$, $[H]$ ein Netzwerk mit $n := |A[H]|$ und $[H_1]$ und $[H_2]$ zwei fast leere Netzwerke mit $\bar{A}(H_1) = \bar{A}(H_2)$, die die Bedingungen (1)-(4) erfüllen, so ist $S_1 = S_2$.

- (1) Ist ein äußerer Eingang e von $[H_1]$ bzw. $[H_2]$ eine Verzweigung oder ein freier Eingang, so ist der Index von e kleiner gleich n .
- (2) Zu jedem äußeren Ausgang von $[H_1]$ bzw. $[H_2]$ führt eine Kante von einem äußeren Eingang mit einem Index größer als n .
- (3) Ist e ein äußerer Eingang von $[H_1]$ bzw. $[H_2]$ mit dem Index $n+i$, so führt die nach (1) von e ausgehende Kante zum i -ten äußeren Ausgang von $[H_1]$ bzw. $[H_2]$.
- (4) Führt in $[H_1]$ von einem äußeren Eingang e mit einem Index kleiner gleich n eine Kante zum j -ten äußeren Ausgang, so auch in $[H_2]$ bzw. $[H_2]$ und umgekehrt.

Beweis:

Zeige zuerst $[I_{b1}] = [I_{b2}]$. Da S_1 bzw. S_2 eine sequentielle Darstellung ist, ist $\bar{A}(H) \cdot \bar{A}(I_{b1}) = \bar{E}(H_1)$ bzw. $\bar{A}(H) \cdot \bar{A}(I_{b2}) = \bar{E}(H_2)$. Da $n := |A[H]|$ und wegen (1)-(3) von jedem äußeren Eingang von $[H_1]$ bzw. $[H_2]$ mit dem Index $n+i$ genau eine Kante zum i -ten äußeren Ausgang von $[H_1]$ bzw. $[H_2]$ führt, ist $\bar{E}(H_1) = \bar{A}(H) \cdot \bar{A}(H_1)$ bzw. $\bar{E}(H_2) = \bar{A}(H) \cdot \bar{A}(H_2)$. $\Rightarrow \bar{A}(H) \cdot \bar{A}(I_{b1}) = \bar{E}(H_1) = \bar{A}(H) \cdot \bar{A}(H_1)$ und $\bar{A}(H) \cdot \bar{A}(I_{b2}) = \bar{E}(H_2) = \bar{A}(H) \cdot \bar{A}(H_2) \Rightarrow \bar{A}(I_{b1}) = \bar{A}(H_1)$ und $\bar{A}(I_{b2}) = \bar{A}(H_2)$. Nach Voraussetzung ist $\bar{A}(H_1) = \bar{A}(H_2)$. $\bar{A}(I_{b1}) = \bar{A}(H_1) = \bar{A}(H_2) = \bar{A}(I_{b2}) \Rightarrow [I_{b1}] = [I_{b2}]$ nach Satz A2.3.9.

Zeige als nächstes $[H_1] = [H_2]$, dann ist $S_1 = S_2$. Wegen (2) besitzt weder $[H_1]$ noch $[H_2]$ einen freien äußeren Eingang. Außerdem ist $\bar{A}(H_1) = \bar{A}(H_2)$ und wegen $\bar{A}(I_{b1}) = \bar{A}(I_{b2})$ $\bar{E}(H_1) = \bar{A}(H) \cdot \bar{A}(I_{b1}) = \bar{A}(H) \cdot \bar{A}(I_{b2}) = \bar{E}(H_2)$. Bleibt also zu zeigen: Führt in $[H_1]$ vom i -ten äußeren Eingang eine Kante zum j -ten äußeren Ausgang, so auch in $[H_2]$ und umgekehrt. Wegen (4) gilt dies für alle äußeren Eingänge mit einem Index kleiner gleich n . Wegen (1) geht in $[H_1]$ bzw. $[H_2]$ von jedem äußeren Eingang mit einem Index $k > n$ genau eine Kante aus. Diese führt nach (3) sowohl in $[H_1]$ als auch $[H_2]$ zum $(k-n)$ -ten äußeren Ausgang.

q.e.d.

Damit sind alle Vorbereitungen getroffen um zu beweisen, daß das von $N' := N_T^0 \cup N_T^{(1)}$ erzeugte Untermonopolyid ein α -vollkommenes Monopolyid ist.

Satz A2.8.19: (2. Hauptsatz)

Ist $N_T^{(1)} \subseteq N_T^F / \sim$ eine beliebige nicht leere Menge von Äquivalenzklassen einfacher Interimknoten oder einfacher Netzwerke mit oder ohne Schleifen und $N' := N_T^0 \cup N_T^{(1)}$, so ist $\rho := \rho_X(N') \cup \rho_V(N') \cup \rho_Z(N') \cup \rho_B(N')$ eine α -vollkommene Substitutionsbasis von $SEQ(N')$ und $\langle N', \times, \bullet_D \rangle$ ein α -vollkommenes Monopolyid mit N' als α -vollkommenem Erzeugendensystem.

Beweis:

Zeige, daß die Voraussetzungen von [HÜB95] Satz A2.8.11 gegeben sind und gehe dabei analog zum Beweis des ersten Hauptsatzes (Satz A2.7.11) vor.

Wegen $N_T^I \subseteq N_T^0 \subseteq N'$ bildet $\langle N', \times, \bullet_D \rangle$ nach [HÜB95] Satz und Definition A2.1.11 ein Monopolyid, wobei natürlich N' ein Erzeugendensystem von $\langle N', \times, \bullet_D \rangle$ ist. Die Restriktion von $\| \cdot \| : (N_T / \sim, \times, \bullet_D) \rightarrow (\mathbb{N}_0, +, +)$ auf die Teilmenge $\langle N', \times, \bullet_D \rangle$ ist ein nicht-trivialer Monopolyiden-Homomorphismus, da $N_T^{(1)} \neq \emptyset$ ist.

Nach Satz A2.4.5 ist $(N_T^F / \sim)^{\| \cdot \|} = N_T^0$ und somit $(\langle N', \times, \bullet_D \rangle)^{\| \cdot \|} \subseteq N_T^0 \subseteq N'$. Kann man nun zeigen, daß $\rho = \rho_X(N') \cup \rho_V(N') \cup \rho_Z(N') \cup \rho_B(N')$ die Bedingung (1) von [HÜB95] Satz A2.8.11 erfüllt, so ist ρ eine α -vollkommene Substitutionsbasis von $SEQ(N')$, N' ein α -vollkommenes Erzeugendensystem von $\langle N', \times, \bullet_D \rangle$ und $\langle N', \times, \bullet_D \rangle$ ein α -vollkommenes Monopolyid.

Seien $S_1, S_2 \in SEQ(N')$, $\| \omega(S_1) \| \geq 1$ und $\omega(S_1) = \omega(S_2)$. O.B.d.A. seien

$$S_1 = \begin{bmatrix} I_{t1,1} & I_{t1,n} \\ H_{l,1} & \dots & H_{l,n} \\ I_{b1,1} & I_{b1,n} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad S_2 = \begin{bmatrix} I_{t2,1} & I_{t2,m} \\ H_{2,1} & \dots & H_{2,m} \\ I_{b2,1} & I_{b2,m} \end{bmatrix}. \quad \text{Definiere } [H_1] := \omega(S_1) \text{ und}$$

$[H_2] := \omega(S_2)$. $\Rightarrow [H_1] = [H_2]$. Nach Satz A2.7.1 existieren paarweise disjunkte Repräsentanten derart, daß

$$SI(H_1) = \bigcup_{i=1}^n SI(H_{1,i}) \quad \text{und} \quad SI(H_2) = \bigcup_{j=1}^m SI(H_{2,j}). \quad \text{Da } S_1, S_2 \in SEQ(N') \text{ ist}$$

nach Definition $\text{Kern}(S_1) \subseteq N'$ und $\text{Kern}(S_2) \subseteq N'$. \Rightarrow

$[H_{1,i}], [H_{2,j}] \in N_T^0 \cup N_T^{(1)}$. Damit handelt es sich bei den Faktoren $[H_{1,i}]$ bzw. $[H_{2,j}]$ ausnahmslos um fast leere Netzwerke, einfache Interimknoten oder einfache Netzwerke mit oder ohne

Schlaufen. Bei den Netzwerken aus $N_T^{(1)}$, wird nachfolgend davon ausgegangen, daß es sich um einfache Netzwerke ohne Schleifen handelt. Für die anderen Arten kann der Beweis am Ende analog nachvollzogen werden.

Wegen $\|H_1\| = \|\omega(S_1)\| \geq 1$ ist mindestens ein Faktor $[H_{1,i}]$ ein einfaches Netzwerk mit Subzentrum. Da weder das serielle noch das parallele Produkt Zykel erzeugt, gibt es damit in H_1 ein Subzentrum s^* von dem kein Pfad zu einem anderen Subzentrum führt. Da $[H_1] = [H_2]$ ist, sind H_1 und H_2 äquivalent und nach Satz A2.5.7 existiert damit eine bestimmende Abbildung $\varphi: SI(H_1) \rightarrow SI(H_2)$. Diese bildet s^* auf $\varphi(s^*) \in SI(H_2)$ ab, womit $\varphi(s^*)$ ein Subzentrum aus $S(H_2)$ ist, von dem es in H_2 ebenfalls keinen Pfad zu einem anderen Subzentrum gibt.

Da alle Repräsentanten $H_{1,i}$ paarweise disjunkt sind und $SI(H_1) = \bigcup_{i=1}^n SI(H_{1,i})$ ist, bestimmt jedes Subzentrum s aus $SI(H_1)$ genau ein $H_{1,i}$ mit $s \in S(H_{1,i})$. Analog bestimmt jedes Subzentrum $\varphi(s)$ aus $SI(H_2)$ genau ein $H_{2,j}$ mit $\varphi(s) \in S(H_{2,j})$. O.B.d.A. sei $s^* \in S(H_{1,k})$ und $\varphi(s^*) \in S(H_{2,h})$.

Als nächstes soll nun die sequentielle Darstellung S_1 bzw. S_2 durch Erweiterungen, Kürzungen, Zerlegungen, Verschmelzungen, Vertauschungen und Überbrückungen überführt werden in eine sequentielle Darstellung S_1'' bzw. S_2'' mit $L(S_1'') \geq 2$ bzw. $L(S_2'') \geq 2$ und es soll in S_1'' bzw. S_2'' der Faktor $[H_{1,k}]$ bzw. $[H_{2,h}]$ soweit rechts stehen, daß für jeden Faktor $[H]$ rechts von $[H_{1,k}]$ bzw. $[H_{2,h}]$ $\|H\| = 0$ ist.

Angenommen es steht rechts von $[H_{1,k}]$ ein Faktor $[H_{1,k+r}]$ mit $\|[H_{1,k+r}]\| \neq 0$. O.B.d.A. kann angenommen werden, daß $r=2$ und $\|[H_{1,k+1}]\| = 0$ ist, denn $[H_{1,k+r}]$ kann als der erste Faktor $[H]$ rechts von $[H_{1,k}]$ gewählt werden mit $\|[H]\| \neq 0$. Ist dann $r > 2$, so können die Spalten $S_1^{(k+1)} \bullet \dots \bullet S_1^{(k+r-1)}$ durch eine Verschmelzung überführt werden in eine Spalte $S_1^{(k+1)}$. Ist dagegen $r=1$, so kann durch eine Rechtserweiterung eine Spalte $S_1^{(k+1)}$ eingefügt werden.

Da es in H_1 von s^* keinen Pfad zu einem anderen Subzentrum gibt, kann es auch keinen Pfad zum Subzentrum von $[H_{1,k+2}]$ geben. \Rightarrow Es gibt keine Kante (e,a) von $[H_{1,k+1}]$, die sowohl von $[H_{1,k}]$ ausgeht, als auch zu $[H_{1,k+2}]$ führt. Damit existieren nach Satz A2.8.9 Identitäten $[I_{t1,k+1}']$, $[I_{b1,k+1}']$, $[I_{t1,k+2}']$, $[I_{b1,k+2}']$ und fast leere Netzwerke $[H_{1,k}']$ und $[H_{1,k+3}']$ derart, daß die sequentielle Darstellung $S_1^{(k)} \bullet S_1^{(k+1)} \bullet S_1^{(k+2)}$ durch Erweiterungen, Kürzungen, Zerlegungen, Verschmelzungen, Vertauschungen und Überbrückungen überführbar ist in

$$S' := \begin{bmatrix} 0 & I_{t_1, k+1}' & I_{t_1, k+2}' & 0 \\ H_{1, k}' & H_{1, k+2}' & H_{1, k}' & H_{1, k+3}' \\ 0 & I_{b_1, k+1}' & I_{b_1, k+2}' & 0 \end{bmatrix}.$$

Definiere $S_1'' := S_1^{(1)} \cdot \dots \cdot S_1^{(k-1)} \cdot S' \cdot S_1^{(k+3)} \cdot \dots \cdot S_1^{(n)}$ bzw.

$S_1'' := S_1^{(1)} \cdot \dots \cdot S_1^{(k-1)} \cdot S'$ falls $k=n-2$ bzw. $S_1'' := S' \cdot S_1^{(k+3)} \cdot \dots \cdot S_1^{(n)}$

falls $k=1$ bzw. $S_1'' := S'$ falls $1=k=n-2$ ist. Dann ist $S_1 \xrightarrow{\rho} S_1''$, wobei der Faktor $[H_{1, k}]$ in S_1'' eine Position weiter rechts steht. Dieses Verfahren kann nun solange angewandt werden, bis der Faktor $[H_{1, k}]$ soweit rechts steht, daß für alle Faktoren $[H]$ rechts von $[H_{1, k}]$ $\| [H] \| = 0$ ist. O.B.d.A. kann nun angenommen werden, daß nur noch genau ein solcher Faktor rechts neben $[H_{1, k}]$. Steht dort kein Faktor, so kann durch eine Erweiterung ein solcher erzeugt werden. Stehen dort mehrere Faktoren, so können sie durch eine Verschmelzung in einen einzigen überführt werden. Damit können die letzten beiden Spalten der neu gewonnenen sequentiellen Darstellung

dargestellt werden in der Form $S' := \begin{bmatrix} I_{t_1, n-1}' & 0 \\ H_{1, k} & H_{1, n}' \\ I_{b_1, n-1}' & 0 \end{bmatrix}$. Nach Satz

A2.8.15 existieren dann eine Identität $[I_{b_1, n-1}']$ und zwei Netzwerke $[H_{1, n-2}]$ und $[H_{1, n}']$ ohne Subzentren und Interimknoten derart, daß S' durch Erweiterungen, Zerlegungen, Verschmelzungen, Vertauschungen und Überbrückungen überführbar

ist in $S'' := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ H_{1, n-2} & H_{1, k} & H_{1, n}' \\ 0 & I_{b_1, n-1} & 0 \end{bmatrix}$ und außerdem die Bedingungen (1)-

(3) von Satz A2.8.15 erfüllt sind.

Da mit der sequentiellen Darstellung S_2 ebenso verfahren werden kann, existieren also zwei sequentielle Darstellungen S_1'' bzw. S_2'' derart, daß in S_1'' bzw. S_2'' der Faktor $[H_{1, k}]$ bzw. $[H_{2, h}]$ rechts an vorletzter Stelle steht, für die letzten beiden Spalten die Bedingungen (1)-(3) Satz A2.8.15 erfüllt werden, $L(S_1'') \geq 3$ bzw. $L(S_2'') \geq 3$ und $S_1 \xrightarrow{\rho} S_1''$ bzw. $S_2 \xrightarrow{\rho} S_2''$ ist.

Definiere $n'' := L(S_1'')$, $m'' := L(S_2'')$, $S_1' := S_1^{(1)} \cdot \dots \cdot S_1^{(n''-2)}$, $S_0' := S_1^{(n''-1)} \cdot S_1^{(n'')}$, $S_2' := S_2^{(1)} \cdot \dots \cdot S_2^{(m''-2)}$ und $S_0'' := S_2^{(m''-1)} \cdot S_2^{(m'')}$, dann sind die Produkte $S_1' \cdot S_0'$ und $S_2' \cdot S_0''$ definiert, $\| \omega(S_0') \| = 1$, $S_1 \xrightarrow{\rho} S_1' \cdot S_0' = S_1''$ und $S_2 \xrightarrow{\rho} S_2' \cdot S_0'' = S_2''$. Bleibt also noch zu zeigen: $S_0' = S_0''$ und $\omega(S_1') = \omega(S_2')$.

Sei $[H_1''] := \omega(S_1'')$ und $[H_2''] := \omega(S_2'')$. O.B.d.A. kann nach Satz A2.7.5 angenommen werden, daß $SI(H_1'') = SI(H_1)$ bzw. $SI(H_2'') = SI(H_2)$ und die identische Abbildung $id_1: SI(H_1) \rightarrow SI(H_1'')$ bzw.

$id_2: SI(H_2) \rightarrow SI(H_2'')$ eine bestimmende Abbildung ist. Da auch $\varphi: SI(H_1) \rightarrow SI(H_2)$ eine bestimmende Abbildung und wegen

$SI(H_1'')=SI(H_1)$ bzw. $SI(H_2'')=SI(H_2)$ $\varphi=id_2 \circ \varphi \circ id_1^{-1}$ ist, ist $\varphi:SI(H_1'') \rightarrow SI(H_2'')$ eine bestimmende Abbildung. $\Rightarrow H_1''$ und H_2'' sind nach Satz A2.5.7 äquivalent. $\Rightarrow \bar{A}(H_1'')=\bar{A}(H_2'')$.

Betrachte nun $[H_0']:=\omega(S_0')$ und $[H_0'']:=\omega(S_0'')$. $\Rightarrow [H_0']=([H_{1,k}] \times [I_{b1,n''-1}]) \bullet [H_{1,n''}]$ und $[H_0'']=([H_{2,h}] \times [I_{b2,m''-1}]) \bullet [H_{1,m''}] = ([H_{1,k}] \times [I_{b2,m''-1}]) \bullet [H_{1,m''}]$, da s^* bzw. $\varphi(s^*)$ das Subzentrum von $H_{1,k}$ bzw. $H_{2,h}$ ist und somit $[H_{1,k}]=[H_{2,h}]$ ist. S_0' bzw. S_0'' ist identisch zu den letzten beiden Spalten von S_1' bzw. S_2'' . $\Rightarrow \bar{A}(H_0')=\bar{A}(H_1'')$ bzw. $\bar{A}(H_0'')=\bar{A}(H_2'')$. $\Rightarrow \bar{A}(H_0')=\bar{A}(H_1'')=\bar{A}(H_2'')=\bar{A}(H_0'')$. Damit sind fast alle Voraussetzungen von Satz A2.8.17 erfüllt, bis auf die Bedingung (4). Diese gilt jedoch, da φ einen eingeschränkt bewertungserhaltenden Isomorphismus definiert, der s^* auf $\varphi(s^*)$ abbildet. Damit ist nach Satz A2.8.17 $S_0'=S_0''$.

Sei $[H_1']:=\omega(S_1')$ und $[H_2']:=\omega(S_2')$, dann sind wegen $S_1' \bullet S_0'=S_1''$ und $S_2' \bullet S_0'=S_2'' \bullet S_0''=S_2''$ die Produkte $H_1' \bullet H_0'=H_1''$ und $H_2' \bullet H_0''=H_2''$ definiert und $\varphi:SI(H_1' \bullet H_0') \rightarrow SI(H_2' \bullet H_0'')$ eine bestimmende Abbildung. H_0' und H_0'' sind äquivalent und φ bildet das einzige Subzentrum s^* von H_0' auf das einzige Subzentrum $\varphi(s^*)$ von H_0'' ab. \Rightarrow Die Restriktion von φ auf $SI(H_0')=\{s^*\}$ ist nach Satz A2.5.13 (b) eine bestimmende Abbildung von $SI(H_0')$ nach $SI(H_0'')$. S_0' und S_0'' erfüllen die Bedingungen (1) und (3) von Satz A2.8.17. $\Rightarrow H_0'$ und H_0'' besitzen weder freie äußere Eingänge noch Eingangsverjüngungen. Wegen $\|H_0'\|=1$ sind damit die Voraussetzungen von Satz A2.5.27 erfüllt und somit die Restriktion von φ auf $SI(H_1')$ eine bestimmende Abbildung von $SI(H_1')$ nach $SI(H_2')$. $\Rightarrow [H_1']=[H_2']$ nach Satz A2.5.7. $\Rightarrow \omega(S_1')=[H_1']=[H_2']=\omega(S_2')$.

q.e.d.

Dieser Satz stellt das Ziel fast aller Bemühungen in diesem Kapitel dar. In einem abschließenden Abschnitt wird nun noch gezeigt, wie zu einem solchen α -vollkommenen Monopolyid geeignete α -überführbare Abbildungen definiert werden können.

5.9 Die Konstruktion eines Monopolyiden-Homomorphismus'

Wie im A2. Kapitel gezeigt wurde, kann jedes Datenflußnetzwerk als geordnetes bzw. fortlaufend indiziertes, formatiertes und typenindexkonformes Subzentren-Netzwerk aufgefaßt werden, dem im Falle der Interpretation eine Funktion aus dem Monopolyid $(F_\emptyset, \times, \bullet_\emptyset)$ zugeordnet wird. Dabei gilt:

Definition und Satz A2.9.1:

Ist für eine Abbildung $f:A \rightarrow B$ $L(f):=A$ und $R(f):=B$, \emptyset eine Menge von Mengen, die bzgl. des cartesischen Produkts "x" (mit $\emptyset \in \emptyset$ als Neutralelement) abgeschlossen ist, F_\emptyset die Menge aller Funktionen f mit $L(f), R(f) \in \emptyset$, 0 die Abbildung mit $L(0)=R(0)=\emptyset$, $\bullet := \{(f, g) \in F_\emptyset \times F_\emptyset : R(f)=L(g)\}$, $f \bullet g : L(f) \rightarrow R(g)$ die Abbildung mit $(f \bullet g)(z) := g(f(z))$ bzw. $0 \bullet 0 = 0$ und $f \times g : L(f) \times L(g) \rightarrow R(f) \times R(g)$ mit $(f \times g)(y, z) = (f(y), g(z))$ bzw. $f \times 0 = f$ und $0 \times f = f \quad \forall f \in F_\emptyset$, dann ist $(F_\emptyset, \times, \bullet_\emptyset)$ ein Monopolyid.

Beweis:

Siehe [HÜB95] Satz A2.1.18 (3).

Weiter wurde im A2. Kapitel erklärt, daß die Interpretation eines Datenflußnetzwerkes über einen Monopolyiden-Homomorphismus von $\langle N', \times, \bullet_D \rangle$ nach $(F_\emptyset, \times, \bullet_\emptyset)$ definiert werden kann, wenn bestimmte Voraussetzungen gelten. Diese sind:

Ist $H=(N, \cup, \tau)$ das zu interpretierende Datenfluß- bzw. Subzentren-Netzwerk, so ist τ eine Abbildung von $V(N)$ nach $T=T_S \cup T_{\bar{S}}$, die jedem Knoten aus $V(N)$ einen Typen aus T zuordnet, wobei gilt: $\tau(v) \in T_S \quad \forall v \in S(N)$ und $\tau(v) \in T_{\bar{S}} \quad \forall v \in V(N) \setminus S(N)$. Des weiteren wird eine Menge \emptyset von Wertemengen vorausgesetzt, die bzgl. des cartesischen Produkts "x" (mit $\emptyset \in \emptyset$ als Neutralelement) abgeschlossen ist und es existieren zwei Abbildungen $\Theta_S : T_S \rightarrow F_\emptyset$ und $\Theta_{\bar{S}} : T_{\bar{S}} \rightarrow \emptyset$, wobei für alle Subzentren $s \in S(N)$ die Funktion $\Theta_S(\tau(s))$ **passend zu s** sein muß, d.h für $f := \Theta_S(\tau(s))$ mit $f : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y_1 \times \dots \times Y_m$ ist $|E(N, s)|=n$, $|A(N, s)|=m$, $\Theta_{\bar{S}}(\tau(e)) = X_{\cup(e)} \quad \forall e \in E(N, s)$ und $\Theta_{\bar{S}}(\tau(a)) = Y_{\cup(a)} \quad \forall a \in A(N, s)$. Analog wird eine Funktion f aus F_\emptyset mit $f : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y_1 \times \dots \times Y_m$ als **passend zu N** definiert, wenn $|E(N)|=n$, $|A(N)|=m$, $\Theta_{\bar{S}}(\tau(e)) = X_{\cup(e)} \quad \forall e \in E(N)$ und $\Theta_{\bar{S}}(\tau(a)) = Y_{\cup(a)} \quad \forall a \in A(N)$ ist. Da auch fast leeren Netzwerken passende Funktionen zugeordnet werden können

sollen, benötigt man schließlich und endlich noch zu jeder Wertemenge $W := \Theta_{\Sigma}(\tau(v)) \in F_{\emptyset}$ eine sogenannte Auswahlabbildung Δ_W . Dazu folgende Definition.

Definition A2.9.3:

Ist $W \neq \emptyset$ eine Menge und (W^*, \cdot) das freie Monoid der Vektoren mit Komponenten aus W mit λ als Neutralement bzw. leeren Vektor, dann heißt eine Abbildung $\Delta_W: W^* \rightarrow W$ eine **Auswahlabbildung auf W** , wenn gilt:

- (1) $u, v \in W^* \Rightarrow \Delta_W(u \cdot v) = \Delta_W(v \cdot u)$
- (2) $u, v \in W^* \Rightarrow \Delta_W(u \cdot v) = \Delta_W((\Delta_W(u), \Delta_W(v)))$
- (3) $u = (u_1, \dots, u_n) \in W^*$ mit $u_1 = \dots = u_n \Rightarrow \Delta_W(u) = u_1$

Ist Δ_W eine Auswahlabbildung auf W , dann sei $\delta_W := \Delta_W(\lambda)$ als sogenannter **Defaultwert** definiert.

Ist Δ_W eine Auswahlabbildung auf W , so ist leicht einzusehen, daß in einem Vektor $u \in W^*$ wegen (1) und (2) die Komponenten beliebig vertauscht und wegen (2) und (3) mehrfach vorhandene Werte (bis auf einen) gestrichen werden können, ohne den Wert von $\Delta_W(u)$ zu verändern. Ebenso gestrichen werden können Komponenten mit dem Defaultwert δ_W , denn es gilt: $\delta_W = \Delta_W((\delta_W))$, sowie $\Delta_W((u, \delta_W)) = \Delta_W((\Delta_W(u), \Delta_W((\delta_W)))) = \Delta_W((\Delta_W(u), \delta_W)) = \Delta_W((\Delta_W(u), \Delta_W(\lambda))) = \Delta_W(u \cdot \lambda) = \Delta_W(u)$ bzw. $\Delta_W((\delta_W, u)) = \Delta_W(u)$.

Ein typisches Beispiel für eine Auswahlabbildung auf einer total geordneten Menge wie z.B. $W := \mathbb{N}_0$ ist $\Delta_W := \max(u)$ mit der maximalen Komponente von u als Ergebniswert und $\delta_W := \min(\mathbb{N}_0) = 0$. Da bekannt ist, daß jede endliche Menge W total geordnet werden kann und dann auch $\min(W)$ existiert, kann also zumindest zu jeder endlichen Menge eine Auswahlabbildung Δ_W definiert werden.

Sind die Voraussetzungen von oben gegeben, so kann nun jedem fast leeren Netzwerk bzw. dessen Äquivalenzklasse eine passende Funktion zugeordnet werden, indem man einen entsprechenden Monopolyiden-Homomorphismus von N_T^0 nach F_{\emptyset} definiert.

Definition A2.9.5:

Ist $[H] \in N_T^0$ mit $H = (N, \nu, \tau)$ $n := |E(N)|$, $m := |A(N)|$, e_j bzw. a_j der j -te äußere Ein- bzw. Ausgang von N und X_j bzw. Y_j die dem Typen $\tau(e_j)$ bzw. $\tau(a_j)$ zugeordnete Wertemenge, dann

sei $\phi'' : (N_T^0, \times, \bullet_D) \rightarrow (F_{\emptyset}, \times, \bullet_{\emptyset})$ definiert durch $\phi''([H]) := f$, wobei f folgende Abbildung ist:

$f: \emptyset \rightarrow \emptyset$, falls $n=m=0$,

$f: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow \emptyset$, falls $n \neq 0$ und $m=0$,

$f: \emptyset \rightarrow Y_1 \times \dots \times Y_m$ mit $(y_1, \dots, y_m) := (\delta_{Y_1}, \dots, \delta_{Y_m})$ falls $n=0$ und $m \neq 0$,

$f: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y_1 \times \dots \times Y_m$ mit $(y_1, \dots, y_m) := (\Delta_{Y_1}(\bar{x}_1), \dots, \Delta_{Y_m}(\bar{x}_m))$

falls $n \neq 0$ und $m \neq 0$, wobei der Vektor $\bar{x}_j := (x_{j_1}, \dots, x_{j_m})$ mit $j_1 < \dots < j_m$ durch die Menge aller Kanten (e_{j_i}, a_j) aus $K(N)$ definiert ist.

Es ist leicht einzusehen, daß nach dieser Definition $\phi''([H])$ eine zu N passende Funktion ist. Für den Fall $n \neq 0$ und $m \neq 0$ sind jedoch noch zwei wichtige Bemerkungen zu machen. Zum einen ist $\Delta_{Y_j}(\bar{x}_j)$ nur deshalb wohldefiniert, da N als formatiertes Subzentren-Netzwerk vorausgesetzt wird und somit $Y_j = X_{j_1} = \dots = X_{j_m}$ ist. Zum anderen gilt: Ist (e_k, a_j) in N die einzige Kante zum äußeren Ausgang a_j , so ist nach obiger Definition $y_j = x_k$. Insbesondere folgt daraus, daß für Netzwerke ohne Verjüngungen $f = \phi''([H])$ nicht mehr von den Auswahlabbildungen Δ_{Y_j} , sondern nur noch von den Defaultwerten δ_{Y_j} abhängig ist.

Um nachfolgend eine handhabbare Notation zur Verfügung zu haben, sei für eine Äquivalenzklasse $[H_i]$ $H_i = (N_i, \cup_i, \tau_i)$ vorausgesetzt. Desweiteren sei $n_i := |E(N_i)|$, $m_i := |A(N_i)|$, $d_i := n_i - m_i$, $e_j^{(i)}$ bzw. $a_j^{(i)}$ der j -te äußere Ein- bzw. Ausgang von N_i , $x_j^{(i)}$ bzw. $y_j^{(i)}$ die dem Typen $\tau_i(e_j^{(i)})$ bzw. $\tau_i(a_j^{(i)})$ zugeordnete Wertemenge, $x_j^{(i)}$ bzw. $y_j^{(i)}$ die zum Eingang $e_j^{(i)}$ bzw. Ausgang $a_j^{(i)}$ gehörende Variable und soweit definiert $f_i: X_1^{(i)} \times \dots \times X_{n_i}^{(i)} \rightarrow Y_1^{(i)} \times \dots \times Y_{m_i}^{(i)}$ mit $f_i((x_1^{(i)}, \dots, x_{n_i}^{(i)})) = (y_1^{(i)}, \dots, y_{m_i}^{(i)})$ die $[H_i]$ zugeordnete Abbildung $\phi''([H_i])$ bzw. $\phi'([H_i])$ bzw. $\phi([H_i])$.

Als nächstes soll nun gezeigt werden, daß ϕ'' ein Monopolyiden-Homomorphismus ist. Dazu zwei Hilfssätze:

Hilfssatz A2.9.7:

Ist $\phi'' : (N_T^0, \times, \bullet_D) \rightarrow (F_{\emptyset}, \times, \bullet_{\emptyset})$ die Abbildung aus Definition A2.9.5, $[H_1], [H_2] \in N_T^0$ und $[H_1] \bullet [H_2]$ definiert, so ist auch $\phi''([H_1]) \bullet \phi''([H_2])$ definiert und $\phi''([H_1] \bullet [H_2]) = \phi''([H_1]) \bullet \phi''([H_2])$.

Beweis:

$[H_1] \bullet [H_2]$ ist definiert, $f_1 := \phi"([H_1])$ und $f_2 := \phi"([H_2]) \Rightarrow \bar{A}(H_1) = \bar{E}(H_2) \Rightarrow m_1 = n_2$ und $Y_j^{(1)} = X_j^{(2)}$ für $1 \leq j \leq m_1 \Rightarrow f_1 \bullet f_2$ ist definiert.

Sei $[H_3] := [H_1] \bullet [H_2]$ und $f_3 := \phi"([H_3]) \Rightarrow \bar{E}(H_3) = \bar{E}(H_1)$ und $\bar{A}(H_3) = \bar{A}(H_2) \Rightarrow n_3 = n_1$ und $X_j^{(3)} = X_j^{(1)}$ für $1 \leq j \leq n_3$, sowie $m_3 = m_2$ und $Y_j^{(3)} = Y_j^{(2)}$ für $1 \leq j \leq m_3$.

Angenommen $m_3 = 0 \Rightarrow f_3$ ist die Abbildung von $X_1^{(1)} \times \dots \times X_{n_1}^{(1)}$ nach \emptyset und $m_2 = 0 \Rightarrow f_2$ ist die Abbildung von $X_1^{(2)} \times \dots \times X_{n_2}^{(2)}$ nach $\emptyset \Rightarrow f_1 \bullet f_2$ ist die Abbildung von $X_1^{(1)} \times \dots \times X_{n_1}^{(1)}$ nach $\emptyset \Rightarrow f_1 \bullet f_2 = f_3$.

Sei nachfolgend $m_3 \neq 0$, (x_1, \dots, x_{n_1}) konkrete Werte der Variablen $(x_1^{(1)}, \dots, x_{n_1}^{(1)})$, $(y_1', \dots, y_{n_1}') := f_1((x_1, \dots, x_{n_1}))$, $(y_1'', \dots, y_{n_3}'') := f_2((y_1', \dots, y_{n_1}'))$ und $(y_1, \dots, y_{n_3}) := f_3((x_1, \dots, x_{n_1}))$, dann ist $(y_1'', \dots, y_{n_3}'') = (y_1, \dots, y_{n_3})$ zu zeigen, da $(y_1'', \dots, y_{n_3}'') = f_2((y_1', \dots, y_{n_1}')) = f_2(f_1((x_1, \dots, x_{n_1}))) = (f_1 \bullet f_2)(x_1, \dots, x_{n_1})$ ist. (Im allgemeinen Fall sei bei obigen Formeln auch der Fall zugelassen, daß einer oder mehrere der beteiligten Vektoren gleich λ sind.)

Wegen $m_3 \neq 0$ ist $A(N_3) \neq \emptyset$ und $A(N_2) \neq \emptyset$. Betrachte nun den j -ten äußeren Ausgang $a_j^{(3)}$ von N_3 und unterscheide zwischen freiem und nicht freiem äußerem Ausgang. Dabei kann o.B.d.A. vorausgesetzt werden, daß $E(N_3) = E(N_1)$ und $A(N_3) = A(N_2)$ ist.

a) Sei $a_j^{(3)}$ ein freier äußerer Ausgang. $\Rightarrow y_j = \delta_{y_j}$.

Angenommen $a_j^{(2)} = a_j^{(3)}$ ist in N_2 ein freier äußerer Ausgang. $\Rightarrow y_j'' = \delta_{y_j} = y_j$.

Angenommen $a_j^{(2)} = a_j^{(3)}$ ist in N_2 kein freier äußerer Ausgang und $\{(e_{j_1}^{(2)}, a_{j_1}^{(2)}), \dots, (e_{j_r}^{(2)}, a_{j_r}^{(2)})\}$ mit $j_1 < \dots < j_r$ die Menge aller Kanten in N_2 die zum äußeren Ausgang $a_j^{(2)}$ führen. (Vgl. Bild A2.55 oben.) \Rightarrow Bei den äußeren Ausgängen $a_{j_1}^{(1)}, \dots, a_{j_r}^{(1)}$ aus N_1 handelt es sich um freie äußere Ausgänge. \Rightarrow

$$Y'_{j_1} = \dots = Y'_{j_r} = \delta_{Y_j} \Rightarrow Y''_j = \Delta_{Y_j}((Y'_{j_1}, \dots, Y'_{j_r})) = \Delta_{Y_j}((\delta_{Y_j}, \dots, \delta_{Y_j})) = \delta_{Y_j} = Y_j.$$

b) Sei $a_j^{(3)}$ kein freier äußerer Ausgang und $\{(e_{i_1}^{(3)}, a_j^{(3)}), \dots, (e_{i_s}^{(3)}, a_j^{(3)})\}$ mit $i_1 < \dots < i_s$ die dann nicht leere Menge aller Kanten in N_3 die zum äußeren Ausgang $a_j^{(3)}$ führen. (Vgl. Bild A2.55 unten.) $\Rightarrow Y_j = \Delta_{Y_j}((x_{i_1}, \dots, x_{i_s}))$. Außerdem folgt: $a_j^{(2)} = a_j^{(3)}$ ist in N_2 kein freier äußerer Ausgang. Sei $\{(e_{j_1}^{(2)}, a_j^{(2)}), \dots, (e_{j_r}^{(2)}, a_j^{(2)})\}$ mit $j_1 < \dots < j_r$ die (notwendiger Weise nicht leere) Menge aller Kanten in N_2 die zum äußeren Ausgang $a_j^{(2)}$ führen. $\Rightarrow Y''_j = \Delta_{Y_j}((Y'_{j_1}, \dots, Y'_{j_r}))$. Da Δ_{Y_j} eine Auswahlabbildung ist kann nun o.B.d.A angenommen werden, daß kein äußerer Ausgang $a_{j_k}^{(1)}$ aus der Menge $\{a_{j_1}^{(1)}, \dots, a_{j_r}^{(1)}\}$ ein freier Ausgang ist, da sonst $Y'_{j_k} = \delta_{Y_j}$ ist und auf Y''_j sowieso keinen Einfluß hat. Sei $\{(e_{j_{k_1}}^{(1)}, a_{j_k}^{(1)}), \dots, (e_{j_{k_{t(k)}}}^{(1)}, a_{j_k}^{(1)})\}$ mit $j_{k_1} < \dots < j_{k_{t(k)}}$ die Menge aller Kanten in N_1 die zum äußeren Ausgang $a_{j_k}^{(1)}$ führen. $\Rightarrow j_{k_i} \in \{i_1, \dots, i_s\}$ und $Y'_{j_k} = \Delta_{Y_j}((x_{j_{k_1}}, \dots, x_{j_{k_{t(k)}}}))$. \Rightarrow

$$Y''_j = \Delta_{Y_j}((Y'_{j_1}, \dots, Y'_{j_r})) =$$

$$\Delta_{Y_j}((\Delta_{Y_j}((x_{j_{1_1}}, \dots, x_{j_{1_{t(1)}}})), \dots, \Delta_{Y_j}((x_{j_{r_1}}, \dots, x_{j_{r_{t(k)}}}))) =$$

$$\Delta_{Y_j}((x_{j_{1_1}}, \dots, x_{j_{1_{t(1)}}}, \dots, x_{j_{r_1}}, \dots, x_{j_{r_{t(k)}}})) = \Delta_{Y_j}((x_{i_1}, \dots, x_{i_s})),$$

da $j_{k_i} \in \{i_1, \dots, i_s\}$ ist und Δ_{Y_j} als Auswahlabbildung mehrfach auftretende Werte bzw. Permutationen der Komponenten unberücksichtigt läßt. $\Rightarrow Y''_j = \Delta_{Y_j}((x_{i_1}, \dots, x_{i_s})) = Y_j$.

q.e.d.

Anhand des Beweis zu obigem Hilfssatz sollte der interessierte Leser auch feststellen können, warum für Auswahlabbildungen gerade die Eigenschaften gefordert werden mußten, wie sie in Definition A2.9.3 angegeben sind.

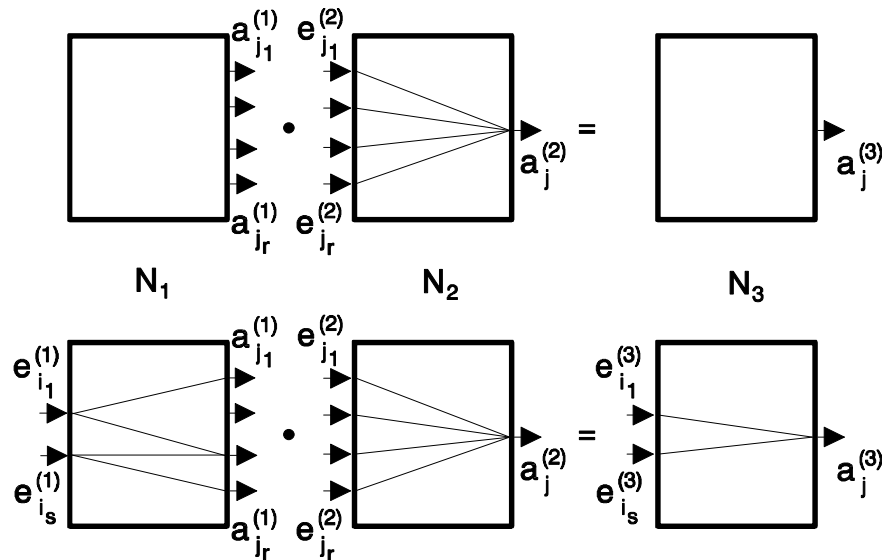


Bild A2.55: Skizze zu Beweis von Hilfssatz A2.9.7.

Hilfssatz A2.9.9:

Ist $\phi'' : (N_T^0, \times, \bullet) \rightarrow (F_{\emptyset}, \times, \bullet_{\emptyset})$ die Abbildung aus Definition A2.9.5 und $[H_1], [H_2] \in N_T^0$, so ist $\phi''([H_1] \times [H_2]) = \phi''([H_1]) \times \phi''([H_2])$.

Beweis:

Seien $[H_1], [H_2] \in N_T^0$ und $[H_3] := [H_1] \times [H_2]$. $\Rightarrow \bar{E}(H_3) = \bar{E}(H_1) \cdot \bar{E}(H_2)$ und $\bar{A}(H_3) = \bar{A}(H_1) \cdot \bar{A}(H_2) \Rightarrow n_3 = n_1 + n_2$ und $m_3 = m_1 + m_2$. Ist weiter $f_1 := \phi''([H_1])$ mit $f_1 : X_1^{(1)} \times \dots \times X_{n_1}^{(1)} \rightarrow Y_1^{(1)} \times \dots \times Y_{m_1}^{(1)}$, $f_2 := \phi''([H_2])$ mit $f_2 : X_1^{(2)} \times \dots \times X_{n_2}^{(2)} \rightarrow Y_1^{(2)} \times \dots \times Y_{m_2}^{(2)}$ und $f_3 := \phi''([H_3])$ mit $f_3 : X_1^{(3)} \times \dots \times X_{n_3}^{(3)} \rightarrow Y_1^{(3)} \times \dots \times Y_{m_3}^{(3)}$, so ist $X_j^{(3)} = X_j^{(1)}$ für $1 \leq j \leq n_1$ und $X_j^{(3)} = X_j^{(2)}$ für $n_1 + 1 \leq j \leq n_1 + n_2 = n_3$, sowie $Y_j^{(3)} = Y_j^{(1)}$ für $1 \leq j \leq m_1$ und $Y_j^{(3)} = Y_j^{(2)}$ für $m_1 + 1 \leq j \leq m_1 + m_2 = m_3$. Damit ist $f := f_1 \times f_2$ ebenfalls eine Abbildung von $X_1^{(3)} \times \dots \times X_{n_3}^{(3)}$ nach $Y_1^{(3)} \times \dots \times Y_{m_3}^{(3)}$.

Seien (x_1, \dots, x_{n_3}) konkrete Werte der Variablen $(x_1^{(3)}, \dots, x_{n_3}^{(3)})$, $(y_1', \dots, y_{m_1}') := f_1((x_1, \dots, x_{n_1}))$, $(y_1'', \dots, y_{m_2}'') := f_2((x_{n_1+1}, \dots, x_{n_1+n_2}))$ und $(y_1, \dots, y_{m_3}) := f_3((x_1, \dots, x_{n_3}))$, dann ist $(y_1, \dots, y_{m_3}) = (y_1', \dots, y_{m_1}') \times (y_1'', \dots, y_{m_2}'')$ und $(y_{m_1+1}, \dots, y_{m_1+m_2}) = (y_1'', \dots, y_{m_2}'')$ zu zeigen, da $(y_1, \dots, y_{m_3}) = (f_1 \times f_2)(x_1, \dots, x_{n_3}) =$

$$f_1((x_1, \dots, x_{n_1})) \cdot f_2((x_{n_1+1}, \dots, x_{n_1+n_2})) = (y'_1, \dots, y'_{m_1}) \cdot (y''_1, \dots, y''_{m_2})$$

ist. (Im allgemeinen Fall sei bei obigen Formeln auch der Fall zugelassen, daß einer oder mehrere der beteiligten Vektoren gleich λ sind.)

Betrachte nun den j -ten äußeren Ausgang $a_j^{(3)}$ von N_3 und unterscheide zwischen $1 \leq j \leq m_1$ und $m_1+1 \leq j \leq m_1+m_2=m_3$.

a) Angenommen $a_j^{(3)}$ ist in N_3 ein freier äußerer Ausgang mit $1 \leq j \leq m_1 \Rightarrow y_j = \delta_{y_j}$ und $a_j^{(1)}$ ist in N_1 ein freier äußerer Ausgang. $\Rightarrow y'_j = \delta_{y_j} = y_j$.

Angenommen $a_j^{(3)}$ ist in N_3 kein freier äußerer Ausgang, $1 \leq j \leq m_1$ und $\{(e_{j_1}^{(3)}, a_j^{(3)}), \dots, (e_{j_r}^{(3)}, a_j^{(3)})\}$ mit $j_1 < \dots < j_r$ die Menge aller Kanten in N_3 die zum äußeren Ausgang $a_j^{(3)}$ führen. $\Rightarrow j_r < n_1$, $y_j = \Delta_{y_j}((x_{j_1}, \dots, x_{j_r}))$ und $\{(e_{j_1}^{(1)}, a_j^{(1)}), \dots, (e_{j_r}^{(1)}, a_j^{(1)})\}$ ist in N_1 die Menge aller Kanten zum äußeren Ausgang $a_j^{(1)}$. $\Rightarrow y'_j = \Delta_{y_j}((x_{j_1}, \dots, x_{j_r})) = y_j$.

b) Angenommen $a_{m_1+j}^{(3)}$ ist in N_3 ein freier äußerer Ausgang mit $1 \leq j \leq m_2 \Rightarrow y_{m_1+j} = \delta_{y_{m_1+j}}$ und $a_j^{(2)}$ ist in N_2 ein freier äußerer Ausgang. $\Rightarrow y''_j = \delta_{y_{m_1+j}} = y_j$.

Angenommen $a_{m_1+j}^{(3)}$ ist in N_3 kein freier äußerer Ausgang, $1 \leq j \leq m_2$ und $\{(e_{m_1+j_1}^{(3)}, a_{m_1+j}^{(3)}), \dots, (e_{m_1+j_r}^{(3)}, a_{m_1+j}^{(3)})\}$ mit $j_1 < \dots < j_r$ die Menge aller Kanten in N_3 die zum äußeren Ausgang $a_{m_1+j}^{(3)}$ führen. $\Rightarrow j_r < n_2$, $y_{m_1+j} = \Delta_{y_j}((x_{n_1+j_1}, \dots, x_{n_1+j_r}))$ und $\{(e_{j_1}^{(2)}, a_j^{(2)}), \dots, (e_{j_r}^{(2)}, a_j^{(2)})\}$ ist in N_2 die Menge aller Kanten die zum äußeren Ausgang $a_j^{(2)}$ führen. $\Rightarrow y''_j = \Delta_{y_j}((x_{n_1+j_1}, \dots, x_{n_1+j_r})) = y_{m_1+j}$.

q.e.d.

Die beiden zuletzt bewiesenen Hilfssätze können nun zu einem Satz zusammengefaßt werden.

Satz A2.9.11:

Ist $\phi'' : (N_{\mathbb{T}}^0, \times, \bullet_{\mathbb{D}}) \rightarrow (F_{\emptyset}, \times, \bullet_{\emptyset})$ die Abbildung aus Definition A2.9.5, dann ist ϕ'' ein Monopolyiden-Homomorphismus, das heißt es gilt:

- (1) Ist $[I]$ eine Identität, so ist $\phi''([I])$ eine identische Abbildung.
- (2) $[H_1], [H_2] \in N_{\mathbb{T}}^0 \Rightarrow \phi''([H_1] \times [H_2]) = \phi''([H_1]) \times \phi''([H_2])$.
- (3) $[H_1], [H_2] \in N_{\mathbb{T}}^0$ und $[H_1] \bullet [H_2]$ definiert $\Rightarrow \phi''([H_1]) \bullet \phi''([H_2])$ ist definiert und $\phi''([H_1] \bullet [H_2]) = \phi''([H_1]) \bullet \phi''([H_2])$.

Beweis:

- 1) Sei $[I]$ eine Identität mit $I = (N, \upsilon, \tau)$ und $\phi''([I]) = f$. Angenommen N ist das leere Netzwerk, dann ist $f = 0: \emptyset \rightarrow \emptyset$ eine identische Abbildung. Ansonsten ist $\bar{E}(N) = \bar{A}(N)$ und es gibt in N zu jedem äußeren Ausgang a_j genau eine Kante nämlich (e_j, a_j) . \Rightarrow Ist f eine Abbildung mit $f: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y_1 \times \dots \times Y_m$ und $f((x_1, \dots, x_n)) = (y_1, \dots, y_m)$, so ist $n=m$, $Y_j = X_j$ und $y_j = x_j$ für $1 \leq j \leq n$. $\Rightarrow f$ ist eine identische Abbildung.
- 2) Folgt unmittelbar aus Hilfssatz A2.9.9.
- 3) Folgt unmittelbar aus Hilfssatz A2.9.7.

q.e.d.

Als nächstes soll die Abbildung ϕ'' zu einer α -übertragbaren Abbildung ϕ' erweitert werden.

Definition A2.9.13:

Sind die Repräsentanten der Äquivalenzklassen aus einer nicht-leeren Teilmenge N''' von $N_{\mathbb{T}}^{\mathbb{F}} / \sim$ einfache Netzwerke mit oder ohne Schleifen oder einfache Interimknoten und $\phi''' : N''' \rightarrow F_{\emptyset}$ eine Abbildung derart, daß für alle $[H] \in N'''$ $\phi'''([H])$ passend zu $[H]$ ist, dann sei $N' := N_{\mathbb{T}}^0 \cup N'''$ und $\phi' : N' \rightarrow F_{\emptyset}$ definiert durch $\phi' := \phi'' \cup \phi'''$.

Bei obiger Definition ist zu beachten, daß $\phi'' \cup \phi'''$ nur deshalb wohldefiniert ist, da es sich bei $N_{\mathbb{T}}^0$ und N''' um zwei disjunkte Mengen handelt. Auch kann eine derartige Abbildung ϕ''' nur existieren, wenn alle einfachen Netzwerke mit Subzentrum aus N''' paarweise zueinander typenindexkonform sind.

Hilfssatz A2.9.15:

Sind N'' und ϕ'' bzw. N' und ϕ' wie in Definition A2.9.13 festgelegt, so gilt:

Sind $[P_1], [P_3]$ Permutationen, $[I_t], [I_b], [I_t'], [I_b']$ Identitäten, $[H] \in N''$ und $[P_1] \cdot ([I_t] \times [H] \times [I_b]) \cdot [P_3] = [I_t'] \times [H] \times [I_b']$,
so ist
 $\phi'([P_1]) \cdot (\phi'([I_t]) \times \phi'([H]) \times \phi'([I_b])) \cdot \phi'([P_3]) = \phi'([I_t']) \times \phi'([H]) \times \phi'([I_b'])$.

Beweis:

Definiert man $[H_0] := [H]$, $[I_{2t}] := [I_t]$, $[I_{2b}] := [I_b]$, $[I_{4t}] := [I_t']$, $[I_{4b}] := [I_b']$, so ist zu zeigen:

$$[P_1] \cdot ([I_{2t}] \times [H_0] \times [I_{2b}]) \cdot [P_3] = [I_{4t}] \times [H_0] \times [I_{4b}] \Rightarrow f_1 \cdot (f_{2t} \times f_0 \times f_{2b}) \cdot f_3 = f_{4t} \times f_0 \times f_{4b}.$$

Wird des weiteren $[H_2] := [I_{2t}] \times [H_0] \times [I_{2b}]$, $[H_4] := [I_{4t}] \times [H_0] \times [I_{4b}]$, $f_2 := f_{2t} \times f_0 \times f_{2b}$ und $f_4 := f_{4t} \times f_0 \times f_{4b}$ definiert, so ist die Gültigkeit der Gleichung $f_4 = f_1 \cdot f_2 \cdot f_3$ zu zeigen. (Man beachte an dieser Stelle, daß die Definition $f_2 := \phi'([H_2])$ bzw. $f_4 := \phi'([H_4])$ ungültig wäre!)

Wegen $[P_1] \cdot ([I_{2t}] \times [H_0] \times [I_{2b}]) \cdot [P_3] = [I_{4t}] \times [H_0] \times [I_{4b}]$ bzw. $[P_1] \cdot [H_2] \cdot [P_3] = [H_4]$ ist $\bar{E}(P_1) = \bar{E}(H_4)$ und $\bar{A}(P_3) = \bar{A}(H_4)$. $\Rightarrow n_1 = n_4$ und $X_j^{(1)} = X_j^{(4)}$ für $1 \leq j \leq n_1$, sowie $m_3 = m_4$ und $Y_j^{(3)} = Y_j^{(4)}$ für $1 \leq j \leq m_3$. (Vergleiche dazu auch Bild A2.57.)

Als erstes Zwischenergebnis kann damit festgestellt werden, daß

$f_1 \cdot f_2 \cdot f_3$ ebenso wie f_4 eine Abbildung von $X_1^{(1)} \times \dots \times X_{n_1}^{(1)}$ nach $Y_1^{(3)} \times \dots \times Y_{m_3}^{(3)}$ ist. Ist $m_3 = 0$, so ist man an dieser Stelle mit dem

Beweis fertig. Sei also nachfolgend $m_3 \geq 1$.

Da $[P_1], [P_3], [I_{2t}], [I_{2b}], [I_{4t}]$ und $[I_{4b}]$ Permutationen bzw. Identitäten sind gilt: $n_1 = m_1$, $n_3 = m_3$, $n_{2t} = m_{2t}$, $n_{2b} = m_{2b}$, $n_{4t} = m_{4t}$ und $n_{4b} = m_{4b}$. Weiter gilt: $[P_1] \cdot [H_2]$ ist definiert $\Rightarrow n_1 = m_1 = n_2$, $[H_2] \cdot [P_3]$ ist definiert $\Rightarrow m_2 = n_3 = m_3$, $[P_1] \cdot [H_2] \cdot [P_3] = [H_4] \Rightarrow n_1 = n_4$ und $m_3 = m_4$. $\Rightarrow n_1 = n_2 = n_4$ und $m_3 = m_4 = n_3$. Wegen $[H_2] = [I_{2t}] \times [H_0] \times [I_{2b}]$ gilt ferner: $n_3 = m_3 = m_{4t} + m_0 + m_{4b} = n_{4t} + m_0 + n_{4b}$ und $n_1 = n_4 = n_{4t} + n_0 + n_{4b} \Rightarrow n_3 - m_0 = n_{4t} + n_{4b} = n_1 - n_0 \Rightarrow n_3 - m_0 - n_{4t} = n_1 - n_0 - n_{4t} \Rightarrow n_3 - (n_{4t} + m_0) = n_1 - (n_{4t} + n_0)$. Aus $[H_4] = [I_{4t}] \times [H_0] \times [I_{4b}]$ dagegen folgt: $n_3 = m_2 = m_{2t} + m_0 + m_{2b} = n_{2t} + m_0 + n_{2b}$ und $n_2 = n_{2t} + n_0 + n_{2b} \Rightarrow n_3 - m_0 = n_{2t} + n_{2b} = n_2 - n_0 \Rightarrow n_1 = n_2 = n_3 + n_0 - m_0 = n_3 + d_0$.

Seien (x_1, \dots, x_{n_1}) konkrete Werte der Variablen $(x_1^{(1)}, \dots, x_{n_1}^{(1)})$,

$(y_1, \dots, y_{n_3}) := f_4((x_1, \dots, x_{n_1}))$, $(y_1', \dots, y_{n_1}') := f_1((x_1, \dots, x_{n_1}))$,

$(Y_1'', \dots, Y_{n_3}'') := f_2((Y_1', \dots, Y_{n_1}'))$, $(Y_1''', \dots, Y_{n_3}''') := f_3((Y_1'', \dots, Y_{n_3}''))$ und
 $(Y_1, \dots, Y_{n_3}) := f_4((x_1, \dots, x_{n_1}))$, dann ist $(Y_1''', \dots, Y_{n_3}''') =$
 (Y_1, \dots, Y_{n_3}) zu zeigen, da $(Y_1''', \dots, Y_{n_3}''') = f_3((Y_1'', \dots, Y_{n_3}'')) =$
 $f_3(f_2((Y_1', \dots, Y_{n_1}'))) = f_3(f_2(f_1((x_1, \dots, x_{n_1})))) = (f_1 \cdot f_2 \cdot f_3)(x_1, \dots, x_{n_1})$
 ist.

Wegen $f_4 = f_{4t} \times f_0 \times f_{4b}$ folgt:

$(Y_1, \dots, Y_{n_3}) = f_4((x_1, \dots, x_{n_1})) = (f_{4t} \times f_0 \times f_{4b})(x_1, \dots, x_{n_1}) =$
 $(f_{4t}(x_1, \dots, x_{n_{4t}}), f_0(x_{n_{4t}+1}, \dots, x_{n_{4t}+n_0}), f_{4b}(x_{n_{4t}+n_0+1}, \dots, x_{n_1})).$
 $[I_{4t}]$ und $[I_{4b}]$ sind Identitäten. $\Rightarrow f_{4t}$ bzw. f_{4b} ist die
 identische Abbildung auf $X_1^{(1)} \times \dots \times X_{n_{4t}}^{(1)}$ bzw. $X_{n_{4t}+n_0+1}^{(1)} \times \dots \times X_{n_1}^{(1)}$. \Rightarrow
 $(Y_1, \dots, Y_{n_3}) = (x_1, \dots, x_{n_{4t}}, f_0(x_{n_{4t}+1}, \dots, x_{n_{4t}+n_0}), x_{n_{4t}+n_0+1}, \dots, x_{n_1}) \Rightarrow$
 $(Y_1, \dots, Y_{n_{4t}}) = (x_1, \dots, x_{n_{4t}})$, $(Y_{n_{4t}+1}, \dots, Y_{n_{4t}+m_0}) =$
 $f_0(x_{n_{4t}+1}, \dots, x_{n_{4t}+n_0})$ und $(Y_{n_{4t}+m_0+1}, \dots, Y_{n_3}) = (x_{n_{4t}+n_0+1}, \dots, x_{n_1})$.
 (Dabei wurde berücksichtigt, daß $n_3 - (n_{4t} + m_0) = n_1 - (n_{4t} + n_0)$ ist.)
 Damit ist also $(Y_1''', \dots, Y_{n_3}''') = (Y_1, \dots, Y_{n_3})$ genau dann gegeben,

wenn $(Y_1''', \dots, Y_{n_{4t}}''') = (Y_1, \dots, Y_{n_{4t}}) = (x_1, \dots, x_{n_{4t}})$,

$(Y_{n_{4t}+1}''', \dots, Y_{n_{4t}+m_0}''') = (Y_{n_{4t}+1}, \dots, Y_{n_{4t}+m_0}) = f_0(x_{n_{4t}+1}, \dots, x_{n_{4t}+n_0})$ und

$(Y_{n_{4t}+m_0+1}''', \dots, Y_{n_3}''') = (Y_{n_{4t}+m_0+1}, \dots, Y_{n_3}) = (x_{n_{4t}+n_0+1}, \dots, x_{n_1})$ ist. Es
 bietet sich deshalb an den Rest des Beweises in drei Teilschritten zu erledigen. Dabei ist zu beachten, daß bei
 allen beteiligten Netzwerken von einem äußeren Eingang stets genau eine Kante ausgeht und zu einem äußeren Ausgang
 stets genau eine Kante führt. Ist $(e_j^{(i)}, a_k^{(i)})$ eine Kante von
 einem äußeren Eingang zu einem äußeren Ausgang, so gilt für
 die Variablen von f_i : $Y_k^{(i)} = x_j^{(i)}$. Ebenso fließt an den
 verschiedensten Stellen $N_1 \cdot N_2 \cdot N_3 = N_4$ ein, wobei o.B.d.A für die
 äußeren Ein- bzw. Ausgänge angenommen werden kann, daß
 $(e_1^{(1)}, \dots, e_{n_1}^{(1)}) = (e_1^{(4)}, \dots, e_{n_1}^{(4)})$ bzw. $(a_1^{(3)}, \dots, a_{n_3}^{(3)}) = (a_1^{(4)}, \dots, a_{n_1}^{(4)})$ ist.

Da $f_2 = f_{2t} \times f_0 \times f_{2b}$ ist und $[I_{2t}]$ und $[I_{2b}]$ Identitäten sind gilt
 analog zu oben: $(Y_1'', \dots, Y_{n_3}'') = f_2((Y_1', \dots, Y_{n_1}')) =$

$(Y_1', \dots, Y_{n_{2t}}', f_0((Y_{n_{2t}+1}', \dots, Y_{n_{2t}+n_0}')), Y_{n_{2t}+n_0+1}', \dots, Y_{n_2}')) \Rightarrow$

$$(Y_1'', \dots, Y_{n_{2t}}'') = (Y_1', \dots, Y_{n_{2t}}'), \quad (Y_{n_{2t}+1}'', \dots, Y_{n_{2t}+m_0}'') = \\ f_0((Y_{n_{2t}+1}', \dots, Y_{n_{2t}+n_0}')) \quad \text{und} \quad (Y_{n_{2t}+m_0+1}'', \dots, Y_{n_3}'') = (Y_{n_{2t}+n_0+1}', \dots, Y_{n_2}').$$

$[P_1]$ und $[P_3]$ sind nach Voraussetzung Permutationen. \Rightarrow Es existiert eine Permutation $\pi_1: \{1, \dots, n_1\} \rightarrow \{1, \dots, n_1\}$ so, daß für $1 \leq j \leq n_1$ $(e_{\pi_1(j)}^{(1)}, a_j^{(1)})$ in N_1 die einzige Kante ist, die zu $a_j^{(1)}$ führt. Analog existiert eine Permutation $\pi_3: \{1, \dots, n_3\} \rightarrow \{1, \dots, n_3\}$ so, daß für $1 \leq j \leq n_3$ $(e_{\pi_3(j)}^{(3)}, a_j^{(3)})$ in N_3 die einzige Kante ist, die zu $a_j^{(3)}$ führt. $\Rightarrow (Y_1', \dots, Y_{n_1}') = f_1((x_1, \dots, x_{n_1})) = (x_{\pi_1(1)}, \dots, x_{\pi_1(n_1)})$ und $(Y_1''', \dots, Y_{n_3}''') = f_3((Y_1'', \dots, Y_{n_3}'')) = (Y_{\pi_3(1)}'', \dots, Y_{\pi_3(n_3)}'')$.

$$\text{Zeige: } (Y_{n_{4t}+1}''', \dots, Y_{n_{4t}+m_0}''') = f_0(x_{n_{4t}+1}, \dots, x_{n_{4t}+n_0})$$

Für diesen Teil des Beweises wird vorausgesetzt, daß es sich bei $[H_0]$ um ein einfaches Netzwerk ohne Schleifen handelt. Die Fälle, daß es sich bei $[H_0]$ um ein einfaches Netzwerk mit Schleifen oder einen einfachen Interimknoten handelt können in vollkommener Analogie bzw. als Spezialfall nachvollzogen werden.

Betrachte die äußeren Eingänge $e_j^{(1)}$ von N_1 bzw. $e_j^{(4)}$ von N_4 mit $n_{4t}+1 \leq j \leq n_{4t}+n_0$. (Vgl. Bild A2.57.) Jeder dieser äußeren Eingänge ist über genau eine Kante mit dem $(j-n_{4t})$ -ten inneren Eingang des einzig vorhandenen Subzentrums verbunden. Analog ist jeder äußere Eingang $e_j^{(2)}$ von N_2 mit $n_{2t}+1 \leq j \leq n_{2t}+n_0$ über genau ein Kante mit dem $(j-n_{2t})$ -ten inneren Eingang des einzig vorhandenen Subzentrums verbunden. Da $[P_1] \cdot [H_2] \cdot [P_3] = [H_4]$ ist, folgt:

$$\pi_1(n_{2t}+j) = n_{4t}+j \quad \text{für} \quad 1 \leq j \leq n_0 \quad \text{und} \quad \pi_3(n_{4t}+j) = n_{2t}+j \quad \text{für} \quad 1 \leq j \leq m_0. \Rightarrow \\ (Y_{n_{2t}+1}', \dots, Y_{n_{2t}+n_0}') = (x_{n_{4t}+1}, \dots, x_{n_{4t}+n_0}) \quad \text{und} \quad (Y_{n_{4t}+1}''', \dots, Y_{n_{4t}+m_0}''') = \\ (Y_{n_{2t}+1}'', \dots, Y_{n_{2t}+m_0}''). \Rightarrow (Y_{n_{4t}+1}''', \dots, Y_{n_{4t}+m_0}''') = (Y_{n_{2t}+1}'', \dots, Y_{n_{2t}+m_0}'') = \\ f_0((Y_{n_{2t}+1}', \dots, Y_{n_{2t}+n_0}')) = f_0((x_{n_{4t}+1}, \dots, x_{n_{4t}+n_0})).$$

Bleibt noch zu zeigen: $(Y_1''', \dots, Y_{n_{4t}}''') = (x_1, \dots, x_{n_{4t}})$ und $(Y_{n_{4t}+m_0+1}''', \dots, Y_{n_3}''') = (x_{n_{4t}+n_0+1}, \dots, x_{n_1})$. Betrachte dazu die Kante $(e_{\pi_3(j)}^{(3)}, a_j^{(3)})$ und unterscheide die Fälle $1 \leq j \leq n_{4t}$ und $n_{4t}+m_0+1 \leq j \leq n_3$.

a) Sei $1 \leq j \leq n_{4t} \Rightarrow \pi_3(j) \leq n_{4t}$ oder $\pi_3(j) > n_{4t} + m_0$. (Vgl. Bild A2.57.)

Angenommen es ist $\pi_3(j) \leq n_{4t} \Rightarrow$ In N_2 existiert eine Kante

$(e_{\pi_3(j)}^{(2)}, a_{\pi_3(j)}^{(2)}) \Rightarrow$ In N_1 existiert eine Kante

$(e_{\pi_1(\pi_3(j))}^{(1)}, a_{\pi_3(j)}^{(1)})$. Da $(e_j^{(1)}, a_j^{(3)}) = (e_j^{(4)}, a_j^{(4)})$ die einzige Kante

in N_4 ist, die zu $a_j^{(3)}$ führt und $(e_{\pi_1(\pi_3(j))}^{(1)}, a_j^{(3)})$ ebenfalls

eine solche ist, folgt: $\pi_1(\pi_3(j)) = j$. Wegen

$(e_{\pi_3(j)}^{(3)}, a_j^{(3)}) \in K(N_3)$, $(e_{\pi_3(j)}^{(2)}, a_{\pi_3(j)}^{(2)}) \in K(N_2)$ und

$(e_{\pi_1(\pi_3(j))}^{(1)}, a_{\pi_3(j)}^{(1)}) \in K(N_1)$ ist damit: $Y_j''' = Y_{\pi_3(j)}'' = Y_{\pi_3(j)}' =$

$x_{\pi_1(\pi_3(j))} = x_j$.

Angenommen es ist $\pi_3(j) > n_{4t} + m_0 \Rightarrow$ In N_2 existiert eine

Kante $(e_{\pi_1(\pi_3(j)+d_0)}^{(1)}, a_{\pi_3(j)}^{(2)})$ mit $d_0 = n_0 - m_0 \Rightarrow$ Da

$(e_j^{(1)}, a_j^{(3)}) = (e_j^{(4)}, a_j^{(4)})$ die einzige Kante in N_4 ist, die zu $a_j^{(3)}$

führt und $(e_{\pi_1(\pi_3(j)+d_0)}^{(1)}, a_j^{(3)})$ ebenfalls eine solche ist,

folgt: $\pi_1(\pi_3(j)+d_0) = j$. Wegen $(e_{\pi_3(j)}^{(3)}, a_j^{(3)}) \in K(N_3)$,

$(e_{\pi_3(j)+d_0}^{(2)}, a_{\pi_3(j)}^{(2)}) \in K(N_2)$ und $(e_{\pi_1(\pi_3(j)+d_0)}^{(1)}, a_{\pi_3(j)+d_0}^{(1)}) \in K(N_1)$ ist

damit: $Y_j''' = Y_{\pi_3(j)+d_0}'' = Y_{\pi_3(j)+d_0}' = x_{\pi_1(\pi_3(j)+d_0)} = x_j$.

$\Rightarrow (Y_1''', \dots, Y_{n_{4t}}''') = (x_1, \dots, x_{n_{4t}})$.

b) Sei $n_{4t} + m_0 + 1 \leq j \leq n_3 \Rightarrow j > n_{4t} + m_0$ und $\pi_3(j) \leq n_{4t}$ oder $\pi_3(j) > n_{4t} + m_0$. (Vgl. Bild A2.57.)

Angenommen es ist $\pi_3(j) \leq n_{4t} \Rightarrow$ In N_2 existiert eine Kante

$(e_{\pi_3(j)}^{(2)}, a_{\pi_3(j)}^{(2)}) \Rightarrow$ In N_1 existiert eine Kante

$(e_{\pi_1(\pi_3(j))}^{(1)}, a_{\pi_3(j)}^{(1)})$. Da $(e_{j+d_0}^{(1)}, a_j^{(3)}) = (e_{j+d_0}^{(4)}, a_j^{(4)})$ die einzige

Kante in N_4 ist, die zu $a_j^{(3)}$ führt und $(e_{\pi_1(\pi_3(j))}^{(1)}, a_j^{(3)})$

ebenfalls eine solche ist, folgt: $\pi_1(\pi_3(j)) = j + d_0$. Wegen

$(e_{\pi_3(j)}^{(3)}, a_j^{(3)}) \in K(N_3)$, $(e_{\pi_3(j)}^{(2)}, a_{\pi_3(j)}^{(2)}) \in K(N_2)$ und

$(e_{\pi_1(\pi_3(j))}^{(1)}, a_{\pi_3(j)}^{(1)}) \in K(N_1)$ ist damit: $Y_j''' = Y_{\pi_3(j)}'' = Y_{\pi_3(j)}' = x_{\pi_1(\pi_3(j))} =$

x_{j+d_0} .

Angenommen es ist $\pi_3(j) > n_{4t} + m_0 \Rightarrow$ In N_2 existiert eine

Kante $(e_{\pi_3(j)+d_0}^{(2)}, a_{\pi_3(j)}^{(2)})$ mit $d_0 = n_0 - m_0 \Rightarrow$ In N_1 existiert eine

Kante $(e_{\pi_1(\pi_3(j)+d_0)}^{(1)}, a_{\pi_3(j)+d_0}^{(1)})$. Da $(e_{j+d_0}^{(1)}, a_j^{(3)}) = (e_{j+d_0}^{(4)}, a_j^{(4)})$ die

einzigste Kante in N_4 ist, die zu $a_j^{(3)}$ führt und $(e_{\pi_1(\pi_3(j)+d_0)}^{(1)}, a_j^{(3)})$ ebenfalls eine solche ist, folgt:
 $\pi_1(\pi_3(j)+d_0)=j+d_0$. Wegen $(e_{\pi_3(j)}^{(3)}, a_j^{(3)}) \in K(N_3)$,
 $(e_{\pi_3(j)+d_0}^{(2)}, a_{\pi_3(j)}^{(2)}) \in K(N_2)$ und $(e_{\pi_1(\pi_3(j)+d_0)}^{(1)}, a_{\pi_3(j)+d_0}^{(1)}) \in K(N_1)$ ist
damit: $Y_j''' = Y_{\pi_3(j)}'' = Y_{\pi_3(j)+d_0}' = x_{\pi_1(\pi_3(j)+d_0)} = x_{j+d_0}$.
 $\Rightarrow (Y_{n_{4t}+m_0+1}''', \dots, Y_{n_3}''') = (x_{n_{4t}+m_0+1+d_0}, \dots, x_{n_3+d_0}) =$
 $(x_{n_{4t}+n_0+1}, \dots, x_{n_1})$, da $m_0+d_0=m_0+(n_0-m_0)=n_0$ und $n_3+d_0=n_1$
ist.

q.e.d.

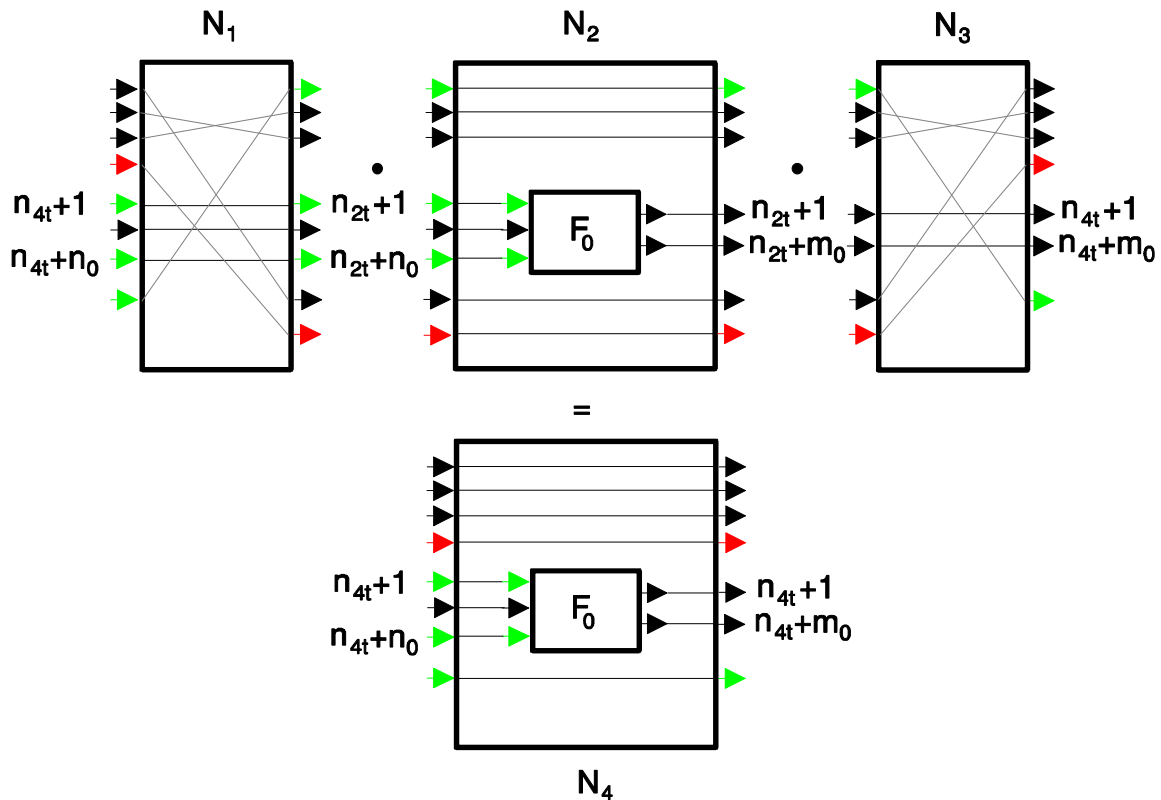


Bild A2.57: Skizze zu Beweis von Hilfssatz A2.9.15.

Satz A2.9.17:

Sind N'' und ϕ'' bzw. N' und ϕ' wie in Definition A2.9.13 festgelegt, so ist ϕ' eine α -übertragbare Abbildung.

Beweis:

Zeige, daß die Voraussetzungen von [HÜB95] Satz A2.8.15 erfüllt sind. Wie im Beweis von Satz A2.3.25 gezeigt, definiert Abbildung $\| \cdot \| : (N_T / \sim, \times, \bullet_D) \rightarrow (\mathbb{N}_0, +, +)$ mit $\|[H]\| := |S(N)| + |I(N)|$ einen nicht-trivialen Monopolyiden-Homomorphismus. Da $N'' \neq \emptyset$ und $N'' \subseteq N'$ ist, ist die Restriktion von $\| \cdot \|$ auf $\langle N' \rangle$ ebenfalls ein nicht-trivialer Monopolyiden-Homomorphismus. Nach Satz A2.4.5 ist $N_T^0 = (N_T^F / \sim)^{\| \cdot \|}$. $\Rightarrow \langle N' \rangle^{\| \cdot \|} = N_T^0 \Rightarrow \langle N' \rangle^{\| \cdot \|} = N_T^0 \subseteq N'$ und $\|[H]\| = 0 \leq 1 \quad \forall [H] \in N_T^0$. Nach Definition von N'' ist $\|[H]\| = 1 \quad \forall [H] \in N''$ somit $\|[H]\| \leq 1 \quad \forall [H] \in N' = N'' \cup N_T^0$. Beibt also noch zu zeigen: ϕ' erfüllt die Bedingungen $(\alpha 0')$ – $(\alpha 2')$.

$(\alpha 0')$ Seien $[H_1], [H_2] \in N'$ und $[H_1] \bullet [H_2]$ definiert. $\Rightarrow \bar{A}(H_1) = \bar{E}(H_2) \Rightarrow \phi'([H_1]) \bullet \phi'([H_2])$ ist definiert, da $\phi' = \phi'' \cup \phi'''$ ist und sowohl ϕ'' als auch ϕ''' einer Äquivalenzklasse eine passende Funktion zuordnet.

$(\alpha 1')$ Da $\phi' = \phi'' \cup \phi'''$ ist, ist die Restriktion von ϕ' auf $\langle N' \rangle^{\| \cdot \|} = N_T^0$ gleich ϕ'' und nach Satz A2.9.11 ein Monopolyiden-Homomorphismus.

$(\alpha 2')$ Seien $[P_1], [P_2] \in \langle N' \rangle^{-1}$. $\Rightarrow [P_3] := [P_2]^{-1} \in \langle N' \rangle^{-1} \Rightarrow [P_1]$ und $[P_3]$ sind Permutationen, da $\langle N' \rangle^{-1} \subseteq (N_T^F / \sim)^{-1}$ und nach Satz A2.4.5 $(N_T^F / \sim)^{-1} = N_T^P$ ist. Analog ist $1_{\langle N' \rangle} \subseteq 1_{N_T^F / \sim} = N_T^I$. Wegen $N'' = N' \setminus N_T^0 = N' \setminus \langle N' \rangle^{\| \cdot \|}$ folgt damit unmittelbar aus Hilfssatz A2.9.15: Sind $[I_t], [I_b], [I_t'], [I_b'] \in 1_{\langle N' \rangle}$, $[H] \in N' \setminus \langle N' \rangle^{\| \cdot \|}$, $[P_1], [P_2] \in \langle N' \rangle^{-1}$ und $[P_1] \bullet ([I_t] \times [H] \times [I_b]) \bullet [P_2]^{-1} = [I_t'] \times [H] \times [I_b']$, so ist $\phi'([P_1]) \bullet (\phi'([I_t]) \times \phi'([H]) \times \phi'([I_b])) \bullet \phi'([P_2]^{-1}) = \phi'([I_t']) \times \phi'([H]) \times \phi'([I_b'])$.

Damit sind die Voraussetzungen gegeben, um zum Abschluß den, für die Beschreibung der Semantik visueller Datenflußnetzwerke folgenden, wichtigen Satz zu beweisen.

Satz A2.9.19: (3. Hauptsatz)

Sind N'' und ϕ'' bzw. N' und ϕ' wie in Definition A2.9.13 festgelegt, so läßt sich ϕ' zu genau einem Monopolyiden-Homomorphismus $\phi: \langle N', \times, \bullet_D \rangle \rightarrow (F_\emptyset, \times, \bullet_\emptyset)$ fortsetzen, wobei gilt:

Ist $[H] \in \langle N', \times, \bullet_D \rangle$ mit $[H] = ([I_{t1}] \times [H_1] \times [I_{b1}]) \bullet \dots \bullet ([I_{tn}] \times [H_n] \times [I_{bn}])$, wobei $[I_{ti}], [I_{bi}]$ Identitäten und die Netzwerke $[H_i] \in N'$ sind, so ist $\phi([H]) = (\phi'([I_{t1}]) \times \phi'([H_1]) \times \phi'([I_{b1}])) \bullet \dots \bullet (\phi'([I_{tn}]) \times \phi'([H_n]) \times \phi'([I_{bn}]))$.

Beweis:

Nach dem zweiten Hauptsatz (Satz A2.8.19) ist N' ein α -vollkommenes Erzeugendensystem von $\langle N', \times, \bullet_D \rangle$ und nach Satz A2.9.17 $\phi': N' \rightarrow F_\emptyset$ eine α -übertragbare Abbildung. $\Rightarrow \phi'$ kann nach [HÜB95] Definition A2.6.10 zu genau einem Monopolyiden-Homomorphismus $\phi: \langle N', \times, \bullet_D \rangle \rightarrow (F_\emptyset, \times, \bullet_\emptyset)$ fortgesetzt werden. Wegen $[I_{t_i}], [I_{b_i}], [H_i] \in N'$, ist damit $\phi([H]) =$
 $(\phi'([I_{t_1}]) \times \phi'([H_1]) \times \phi'([I_{b_1}])) \bullet \dots \bullet (\phi'([I_{t_n}]) \times \phi'([H_n]) \times \phi'([I_{b_n}]))$.

q.e.d.

A2. Andere relevante Theorien

6.1 Einleitung	237
6.2 Knoten- und kantenbewertete Graphen	238
6.3 Graph-Grammatiken	240
6.4 Attributierte Grammatiken	242
6.5 Petri-Netze	246
6.6 Logische Schaltkreise	250
6.7 Strukturierte Systemanalyse	254

In diesem Kapitel wird der Zusammenhang zu einigen anderen Theorien hergestellt, in denen man sich zur Darstellung bestimmter Sachverhalte normaler Graphen bedient, wo sich allerdings auch Subzentren-Netzwerke anbieten würden. Im ersten Abschnitt wird dazu ein allgemeiner Übergang von knoten- und kantenbewerteten Graphen zu formatierten Subzentren-Netzwerken aufgezeigt und im Abschnitt "Graph-Grammatiken" auf Graphen mit Mehrfachkanten erweitert. In der Theorie der attributierten Grammatiken lassen sich die Produktionsregeln einer solchen Grammatik eindeutig in Form eines Subzentren-Netzwerkes darstellen. Sind in bestimmten Fällen Petri-Netze nicht ganz geeignet, einen Sachverhalt zu beschreiben, so können hier vielleicht bipartite Subzentren-Netzwerke Abhilfe schaffen. In den letzten beiden Abschnitten wird schließlich gezeigt, daß es sich bei den Graphen, die zur Beschreibung von elektronischen Schaltkreisen bzw. zur Darstellung von Sachzusammenhängen in der "Strukturierten Systemanalyse" verwendet werden, eindeutig um Subzentren-Netzwerke handelt.

A2A2

A2.1 Einleitung

Nachfolgend sollen die Zusammenhänge zwischen der Theorie der Subzentren-Netzwerke und einigen anderen bekannten, auf Graphen basierenden Theorien aufgezeigt werden. Die ausgewählten Beispiele lassen sich dabei in drei Gruppen einteilen.

Zur ersten Gruppe gehören solche Theorien, die zur Beschreibung von Modellen herangezogen werden, wobei sich das Modell nur ungenügend mittels eines normalen Graphen beschreiben läßt. Ein auffallendes Kennzeichen ist dabei das Auftreten von Mehrfachkanten in den verwendeten Graphen. In diesem Fall kann eine Erweiterung der Theorie auf Subzentren-Netzwerke einige Probleme lösen helfen.

Eine andere Gruppe bilden Theorien, die auf speziellen, zu Subzentren-Netzwerken verwandten Graphen basieren. Dieser Fall kann zum Beispiel vorliegen, wenn Petri-Netze verwendet werden.

Bei der dritten Gruppe schließlich handelt es sich mehr um Anwendungen als Theorien. Das heißt, es werden geometrische Darstellungen zur Beschreibung eines Sachverhalts verwendet, ohne daß eine formale Beschreibung der verwendeten Graphen vorliegt. Als Beispiel wären hier die in "Strukturierter Systemanalyse" verwendeten Graphen zu nennen.

Nachfolgend werden nun einige Beispiele genauer untersucht. Der Leser möge sich dabei von den zunächst sehr kompliziert erscheinenden Sätzen nicht abschrecken lassen, denn hinter diesem Formelwerk verbergen sich sehr anschaulich beschreibbare Zusammenhänge, über deren Gültigkeit man sich auch leicht durch die hinzu gefügten Abbildungen überzeugen kann.

A2.2 Knoten- und kantenbewertete Graphen

Es gibt verschiedene Möglichkeiten die Graphentheorie in die Theorie der Subzentren-Netzwerke einzubetten. Der nachfolgende Satz beschreibt eine Möglichkeit, Graphen auf spezielle Subzentren-Netzwerke abzubilden.

Satz und Definition A2.2.1:

Seien (G, α, β) ein knoten- und kantenbewerteter Graph mit $\alpha: V(G) \rightarrow A$ und $\beta: K(G) \rightarrow B$ (o.B.d.A. sei $A \cap V(G) = \emptyset = B \cap V(G)$) und die Mengen V_0', V_1', V_2', V' und K' wie folgt definiert:

$$V_0' := \{(v, v) : v \in V(G)\},$$

$$V_1' := \{(v, b) : v \in V(G), b \in B \text{ und } \exists v' \in V(G) : \beta((v, v')) = b\},$$

$$V_2' := \{(b, v) : v \in V(G), b \in B \text{ und } \exists v' \in V(G) : \beta((v', v)) = b\},$$

$$V' := V_0' \cup V_1' \cup V_2' \text{ und}$$

$$K' := \{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in V' \times V' : (*), (**) \text{ und } (***)\}.$$

$$(*) \quad y_1 = x_2$$

$$(**) \quad x_1 \in B \Rightarrow y_2 \in V(G)$$

$$(***) \quad x_1, y_2 \in V(G) \Rightarrow (x_1, y_2) \in K(G) \text{ und } y_1, x_2 \in B$$

Ist ferner $\tau': V' \rightarrow A \cup B$ definiert durch

$$\tau'((x, y)) := \begin{cases} \alpha(x) & \text{für } x \in V(G) \text{ und } y \in V(G) \\ y = \beta((x, y)) & \text{für } x \in V(G) \text{ und } y \in B \\ x = \beta((x, y)) & \text{für } x \in B \text{ und } y \in V(G) \end{cases},$$

so ist (N', τ') mit $N' := (G', V_0')$ und $G' := (V', K')$ ein geschlossenes, gepacktes und eindeutig formatiertes Subzentren-Netzwerk ohne freie Ein- und Ausgänge. $N((G, \alpha, \beta)) := (N', \tau')$ heißt das **durch (G, α, β) definierte formatierte Subzentren-Netzwerk**.

Beweis:

- a) Zeige, daß die Voraussetzungen von Satz A2.4.1 erfüllt sind.

Definiere $W := V(G) \Rightarrow V' \subseteq (W \cup B) \times (W \cup B)$ mit $V' \cap W \times W = V_0'$ und $V' \cap B \times B = \emptyset$.

$K' \subseteq V' \times V'$ und erfüllt mit (*) bzw. (**) bzw. (***) die Bedingungen (1) bzw. (2) bzw. (3). (4) und (5) sind erfüllt, da K' alle Kanten enthält, die die Bedingungen (*), (**) und (***) erfüllen. $\Rightarrow (N', \tau')$ ist ein geschlossenes, gepacktes, eindeutig formatiertes Subzentren-Netzwerk.

- b) Zeige N' besitzt keine freien Ein- und Ausgänge.

Ist $e \in E(N', s) \Rightarrow e \in V_2' \Rightarrow e = (b, v) : v \in V(G), b \in B$ und $\exists v' \in V(G) : \beta((v', v)) = b \Rightarrow (v', b) \in V_1' \Rightarrow ((v', b), (b, v)) \in K(N')$ wegen (***) . $\Rightarrow e$ ist kein freier Eingang.

Analog kann man zeigen, daß N' keine freien Ausgänge besitzt.

q.e.d.

Bild A2.1 zeigt auf anschauliche Weise den im obigen Satz beschriebenen Übergang, von einem knoten- und kantenbewerteten Graphen in ein Subzentren-Netzwerk.

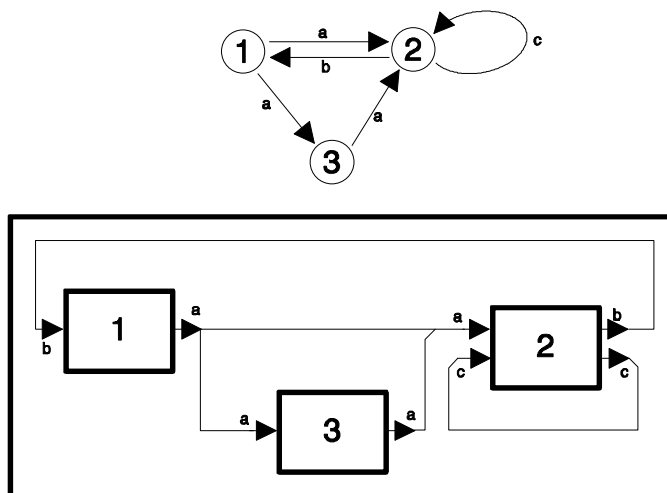


Bild A2.1: Ein knoten- und kantenbewerteter Graph (G, α, β) (oben) und das durch (G, α, β) definierte eindeutig formatierte Subzentren-Netzwerk (unten).

A2.3 Graph-Grammatiken

Die Grundlagen von Graph-Grammatiken bilden markierte Graphen. (Siehe z.B. M. Nagl [NAG79].) Dabei gilt folgende Definition:

Definition A2.3.1:

Seien U und W zwei Mengen. Ein **markierter Graph über (U,W)** ist ein Tripel $g=(V(g),(\rho_w(g))_{w \in W},\alpha(g))$, wobei gilt:

- (1) $V(g)$ ist eine endliche Menge, Knotenmenge genannt,
- (2) $\rho_w(g) \subseteq V(g) \times V(g)$ für ein beliebiges $w \in W$,
- (3) $\alpha(g):V(g) \rightarrow U$ ist eine Abbildung, Knotenmarkierungsfunktion genannt.

Anschaulich beschrieben, handelt es sich bei einem markierten Graphen um die Überlagerung mehrerer (einfacher) knotenbewerteter Graphen, wobei jeder Graph eindeutig genau einem $w \in W$ zugeordnet ist. Dabei kann man sich alle Kanten des zu $w \in W$ gehörenden Graphen als mit w markiert vorstellen.

Satz und Definition A2.3.3:

Ist $g=(V(g),(\rho_w(g))_{w \in W},\alpha(g))$ ein über (U,W) markierter Graph und G_w für alle $w \in W$ der knoten- und kantenbewerteter Graph $G_w:=((V(g),\rho_w(g)),\alpha(G_w),\beta(G_w))$ mit $\alpha(G_w)(v):=\alpha(g)(v)$ und $\beta(G_w)((v,v')):=w$, dann ist $N(g):=\bigcup_{w \in W} N(G_w)$ ein geschlossenes, gepacktes, eindeutig formatiertes Subzentren-Netzwerk. $N(g)$ heißt das **durch g definierte formatierte Subzentren-Netzwerk**.

Beweis:

Für alle $w \in W$ ist $N(G_w)$ nach Satz und Definition A2.2.1 ein geschlossenes, gepacktes, formatiertes Subzentren-Netzwerk, wobei alle Ein- und Ausgänge mit demselben Format (nämlich w) versehen sind. Da $V(N(G_{w_1})) \cap V(N(G_{w_2})) = S(N(G_{w_1})) = S(N(G_{w_2}))$ für $w_1 \neq w_2 \Rightarrow$ Nach Satz und Definition A2.1.27 ist $N(g) = \bigcup_{w \in W} N(G_w)$ ein geschlossenes, gepacktes formatiertes Subzentren-Netzwerk. Dieses muß eindeutig formatiert sein, da jedes Format w eineindeutig einem Graphen G_w zugeordnet werden kann.

q.e.d.

Mit obigen Satz läßt sich die von Nagl [NAG79] und anderen beschriebene Theorie der Graph-Grammatiken auf gepackte formatierte Subzentren-Netzwerke übertragen. Es ist zu erwarten, daß die dadurch zu definierenden Netz-Grammatiken allgemeiner sind als Graph-Grammatiken.

Werden desweiteren den Netz-Grammatiken fortlaufend indizierte, gepackte (formatierte und zueinander typenindexkonforme) Subzentren-Netzwerke zugrunde gelegt, so ergeben sich vermutlich ähnlich einfache Produktionsregeln wie bei Chomsky-Grammatiken.

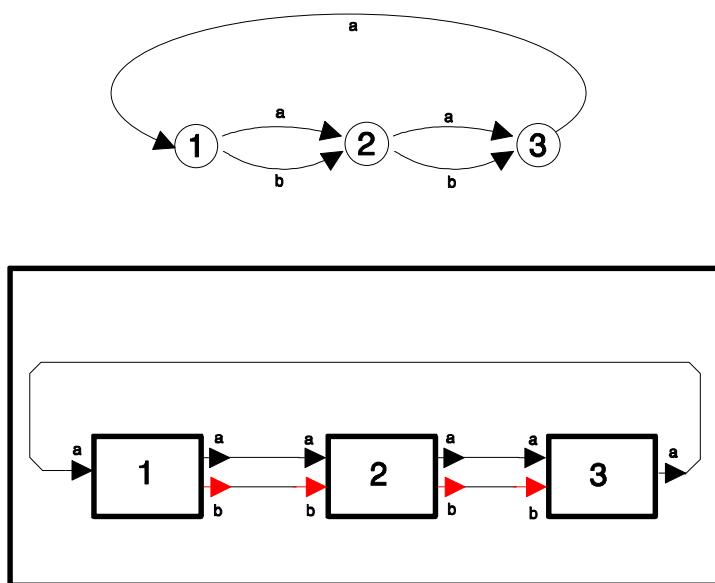


Bild A2.3: Ein über $(\{1,2,3\},\{a,b\})$ markierter Graph g (oben) umgewandelt in ein geschlossenes, gepacktes, eindeutig formatiertes Subzentren-Netzwerk (unten).

A2.4 Attributierte Grammatiken

Produktionsregeln von attribuierten Grammatiken werden als spezielle Graphen dargestellt. In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, daß es sich bei diesen Graphen um eine spezielle Art von Subzentren-Netzwerken handelt, die in besonderer Art und Weise graphisch dargestellt werden.

Die Definitionen für nachfolgende, im Bezug auf attributierte Grammatiken verwendeten Begriffe, wurden in abgewandelter Form aus [LOE86] übernommen. Soweit es dabei Überschneidungen mit der hier verwendeten Nomenklatur geben würde, werden diese durch die Verwendung der Schriftart Kursiv vermieden.

Definition A2.4.1:

Eine **kontextfreie Grammatik** ist ein Quadrupel $G=(N,T,P,S)$ mit:

- (1) N und T sind disjunkte endliche Alphabete. Die Zeichen von N heißen **Nichtterminale**, die von T **Terminale**.
- (2) $P \subseteq N \times (N \cup T)^*$ ist eine endliche Menge von Paaren genannt **Produktionen**.
- (3) $S \in N$ ist ein Nichtterminal, **Startsymbol** genannt.

Definition A2.4.3:

Sei $p = X_\varepsilon \rightarrow X_1 X_2 \dots X_n$ eine Produktion einer kontextfreien Grammatik $G=(N,T,P,S)$ mit $X_\varepsilon \in N$, $X_1, X_2, \dots, X_n \in N \cup T$, $n \geq 0$. Sei weiter Att eine Attributmenge. Sei schließlich $Att(X_j) \subseteq Att$ für $j \in \{\varepsilon, 1, 2, \dots, n\}$. Eine **Konsistenzbedingung** oder **Attributberechnungsregel** Y_1 für das Attribut a_{j_0} von X_{i_0} hat die Form $Y_1: a_{j_0}(X_{i_0}) = f(a_{j_1}(X_{i_1}), \dots, a_{j_m}(X_{i_m}))$. Dabei ist $m \geq 0$, $i_k \in \{\varepsilon, 1, 2, \dots, n\}$, $a_{j_k} \in Att(X_{i_k})$, $0 \leq k \leq m$ und $f: D(a_{j_1}(X_{i_1})) \times \dots \times D(a_{j_m}(X_{i_m})) \rightarrow D(a_{j_0}(X_{i_0}))$ eine Funktion; falls $m=0$, dann ist f ein Element in $D(a_{j_0}(X_{i_0}))$.

Definition A2.4.5:

Eine **attributierte Grammatik** AG besteht aus einer kontextfreien Grammatik $G=(N,T,P,S)$, einer Menge Att von Attributen, einem Wertebereich $D(a)$ für jedes $a \in Att$, einer Partition $I(x)$, $S(x)$ von $Att(x)$ für jedes $x \in N \cup T$ und einer Menge von Attributberechnungsregeln Y für jede Produktion $p \in P$. Genauer, wenn $p = X_\varepsilon \rightarrow X_1 X_2 \dots X_n$ eine Produktion ist, dann gibt es zu jedem Attribut a in $S(X_\varepsilon)$ bzw. $I(X_i)$ (mit $1 \leq i \leq n$) genau eine Attributberechnungsregel Y_1 .

Satz A2.4.7:

Der in einer attributierten Grammatik bestehende Zusammenhang zwischen einer Produktion einerseits und den mit Regeln versehenen Attributen andererseits, kann graphisch als bipartites, geschlossenes, gepacktes, eindeutig formatiertes und typenkonformes Subzentren-Netzwerk dargestellt werden.

Beweis:

Sei AG eine attributierte Grammatik, $p = X_\varepsilon \rightarrow X_1 X_2 \dots X_n$ eine Produktion und $Y := \{Y_1, \dots, Y_m\}$ die Menge der zugehörigen Attributberechnungsregeln. Definiere die Menge der Variablen der Produktion p als $X := \{X_\varepsilon, X_1, \dots, X_n\}$ und $W := X \cup Y$. Da AG eine attributierte Grammatik ist, existiert zu jedem $X_i \in X$ je eine Menge $I(X_i)$ bzw. $S(X_i)$. Definiere $B := Att$, $B_l(X_\varepsilon) := S(X_\varepsilon)$ und $B_r(X_\varepsilon) := I(X_\varepsilon)$, sowie $B_l(X_i) := I(X_i)$ und $B_r(X_i) := S(X_i)$ für $1 \leq i \leq n$.

Jede Attributberechnungsregel aus Y läßt sich darstellen in der Form $Y_l: a_{j_0}(X_{i_0}) = f(a_{j_1}(X_{i_1}), \dots, a_{j_m}(X_{i_m}))$. Definiere $B_r(Y_l) := \{a_{j_0}(X_{i_0})\}$ und $B_l(Y_l) := \{a_{j_1}(X_{i_1}), \dots, a_{j_m}(X_{i_m})\}$ und $\alpha_Y: Y \rightarrow \mathcal{F}$ mit $\alpha_Y(Y_l) := f$. Analog sei für jede Variable X_i $\alpha_X(X_i) := x$, wenn der Wert von X_i gleich x ist, d.h. $\alpha_X: X \rightarrow N \cup T$. Schließlich sei $A := (N \cup T) \cup \mathcal{F}$ und $\alpha: W \rightarrow A$ definiert durch $\alpha := \alpha_X \cup \alpha_Y$.

Da die Attribute bezogen auf den Wert x_i der Variablen X_i bzw. bezogen auf die Funktion f der Attributberechnungsregeln Y_j vergeben werden gilt: $\alpha(w) = \alpha(w') \Rightarrow B_l(w) = B_l(w')$ und $B_r(w) = B_r(w')$. Unter diesen Voraussetzungen kann nach Satz A2.4.5 ein bipartites, geschlossenes, gepacktes, eindeutig formatiertes und typenkonformes Subzentren-Netzwerk konstruiert werden.

Um zu zeigen, daß dieses den Zusammenhang zwischen einer Produktion einerseits und den mit Regeln versehenen Attributen andererseits wiedergibt, bedarf es noch einiger Erklärungen. Die Knoten der Form (X_i, X_i) bzw. (Y_j, Y_j) bilden die Menge der Subzentren und repräsentieren die Variablen X_i bzw. die Attributberechnungsregeln Y_j der Produktion. Die Knoten der Form (b, X_i) und (X_i, b) bzw. (b, Y_j) und (Y_j, b) definieren gerade die Ein- und Ausgänge eines Subzentrums und repräsentieren die einer Variablen X_i bzw. einer Attributberechnungsregeln Y_j zugeordneten Attribute. Ein Subzentrum, das eine Attributberechnungsregel Y_j repräsentiert, besitzt also gerade einen Ausgang. Von diesem führt genau eine Kante zu dem Eingang eines Subzentrums, der das Attribut einer Variablen X_i repräsentiert zu dem gerade die Attributberechnungsregel Y_j gehört. Analog zeigen Kanten von den Ausgängen der Subzentren, die Variablen darstellen, zu den Eingängen von Subzentren die Attributberechnungsregeln darstellen genau dann, wenn die entsprechenden Attribute in dieser Regel verwendet werden. (Vergleiche Bild A2.5.)

q.e.d.

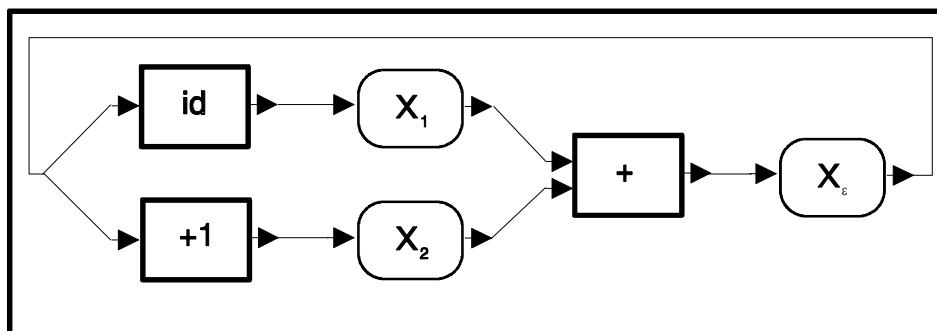


Bild A2.5: Eine Produktion dargestellt als bipartites Subzentren-Netzwerk. Dabei ist statt einer Attributberechnungsregel Y_j bereits die zugehörige Funktion f angegeben.

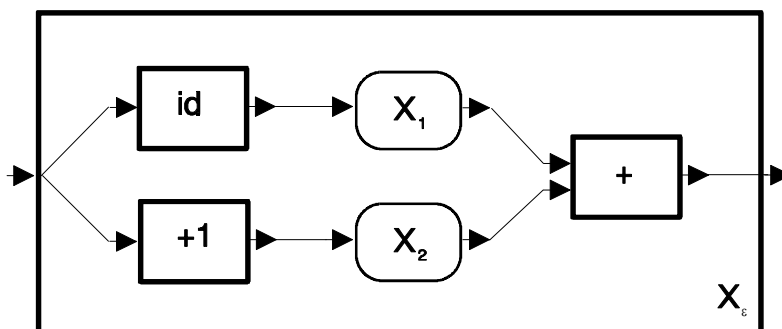


Bild A2.7: Die Produktion von Bild A2.5 dargestellt als offenes Subzentren-Netzwerk.

Bild A2.9 zeigt in anschaulicher Weise den Übergang von der Darstellung einer Produktion als geschlossenes Subzentren-Netzwerk (Bild A2.5) zur gebräuchlichen Darstellung als spezieller Graph. Dabei wird eine besondere Eigenschaft des Subzentren-Netzwerks ausgenutzt. Da jede Attributberechnungsregeln genau einen Ausgang besitzt und jedem Eingangsattribut einer Variablen genau eine Attributberechnungsregel zugeordnet ist können beide ohne Informationsverlust unmittelbar nebeneinander gestellt werden. (Vergleiche Bild A2.9 oben.) Der nächste Schritt besteht darin die Ausgänge der Variablen als eine identische Abbildung darzustellen. Um die besondere Rolle der Variablen X_ε herauszustellen, wird diese im letzten Schritt gesondert oberhalb der anderen Variablen dargestellt. Um in dieser Darstellung ein vielfaches Überkreuzen der Pfeile zu vermeiden werden dabei die Ein- und Ausgänge von X_ε vertauscht. Bei Produktionen mit sehr wenig Variablen und sehr wenig Attributberechnungsregeln erhält man damit eine besonders aussagekräftige Darstellung. Bei Produktionen mit vielen Variablen und vielen Attributberechnungsregeln dürfte allerdings die Darstellung als offenes Subzentren-Netzwerk (wie in Bild A2.7 geschehen) geeigneter sein.

Da die an einer attributierten Grammatik beteiligten Attribute der Konsistenzbedingungen fortlaufend indiziert sind, bedarf es nicht viel Phantasie das obige Schema für beliebige formatierte, fortlaufend indizierte und typenindexkonforme Subzentren-Netzwerk zu verallgemeinern.

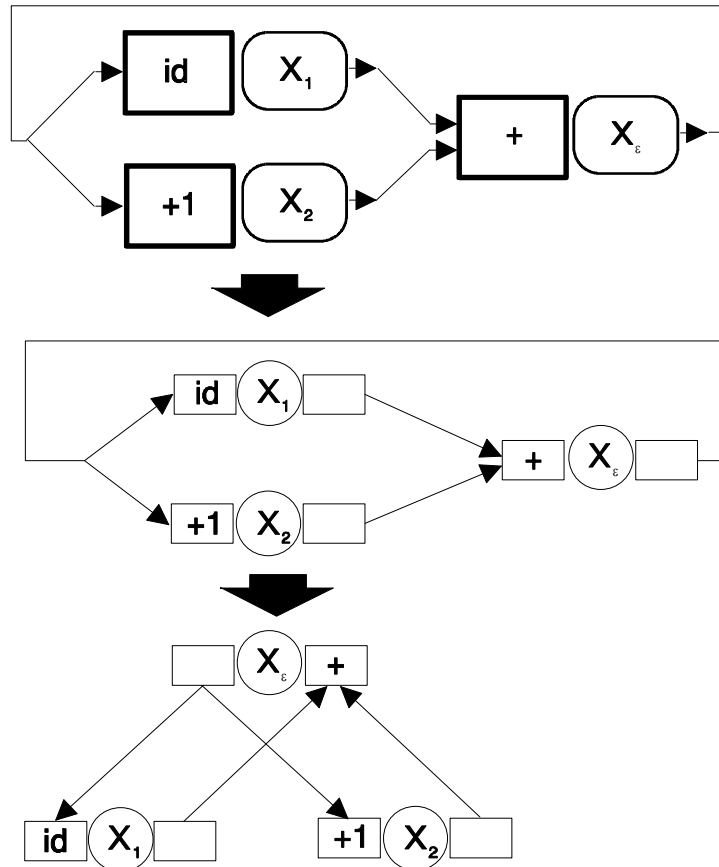


Bild A2.9: Der Übergang von der Darstellung einer Produktion als geschlossenes Subzentren-Netzwerk (Bild A2.5) zur gängigen Darstellung einer Produktion als spezieller Graph (unten).

A2.5 Petri-Netze

Petri-Netze werden als bipartite Graphen definiert.

Definition A2.5.1:

Sind $G=(V,K)$ ein Graph und T und S zwei disjunkte Mengen, dann heißt das Tripel (G,T,S) ein **Petri-Netz**, wenn gilt: $V=S\cup T$ und $K\subseteq S\times T\cup T\times S$. Dabei nennt man T die Menge der **Transitionen** und S die Menge der **Stellen**.

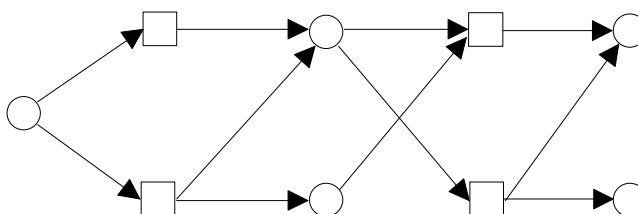


Bild A2.11: Der Graph eines Petri-Netzes. (Die Elemente aus T bzw. S sind als Rechtecke bzw. Kreise dargestellt.)

Es ist auf den ersten Blick zu sehen, daß die Definition von Petri-Netzen wesentlich einfacher ist, als die der Subzentren-Netzwerke. Als ersten großen Unterschied kann man feststellen, daß bei Petri-Netzen die Menge der Knoten V in zwei disjunkte Teilmengen zerfällt. Bei gepackten Subzentren-Netzwerken handelt es sich dagegen um drei disjunkte Teilmengen.

Gemeinsam ist beiden, daß sie durch antisymmetrische Graphen dargestellt werden und die (End-)Knoten einer Kante aus verschiedenen Teilmengen stammen müssen. Dies ist gleichbedeutend mit der Bezeichnung bipartiter Graph für Petri-Netze und tripartiter Graph für gepackte Subzentren-Netzwerke.

Ausgehend von obiger Definition der Petri-Netze könnten die Mengen S und T vertauscht werden, ohne einen mathematischen Fehler zu begehen. Aus dem praktischen Gebrauch der Petri-Netze ergeben sich jedoch vollkommen verschiedene Bedeutungen für S und T . Die Menge T beschreibt die Übergänge (transitions) in denen eingehende Einheiten in andere umgeformt werden. Ein typisches Beispiel dafür sind Maschinen, die eingehendes Material in Zwischenprodukte umwandeln. Die Menge S dagegen beschreibt Stellen an denen Teile oder Einheiten kurzfristig abgestellt sind.

Da beide Netzwerkformen praktisch von Bedeutung sind und insbesondere Petri-Netze bereits sehr gut erforscht sind [ROS82], ist es interessant, Methoden zu finden, die eine Form

des Netzwerks in die andere überführen können und umgekehrt. Dies erlaubt es Kenntnisse der einen Form von Netzwerken auf die andere Form zu übertragen.

Leider sind beide Formen nur ähnlich, jedoch nicht äquivalent, so daß verschiedene Möglichkeiten der Umwandlung denkbar sind. Man wird jedoch im allgemeinen einen Informationsverlust oder ein Ansteigen der Komplexität des Netzwerkes hinnehmen müssen.

Da ein Petri-Netz ein Graph ist, ist die allgemeine Form der Umwandlung in ein bipartites Subzentren-Netzwerk über Satz und Definition A2.2.1 gegeben. (Knoten und Kanten können dabei als identisch bewertet angenommen werden.) Allerdings steigt dabei die Komplexität des Graphen, da die Ein- und Ausgänge als zusätzliche Knoten hinzukommen. Umgekehrt bringt natürlich der Gebrauch von bipartiten Subzentren-Netzwerken mehr Freiheitsgrade mit sich, so daß sich damit Sachlagen modellieren lassen, die mit Petri-Netzen nicht beschreibbar sind. Zum Beispiel können in einem Subzentren-Netzwerk die ein- bzw. ausgehenden Kanten auf die vorgegebenen Ein- bzw. Ausgänge verteilt werden.

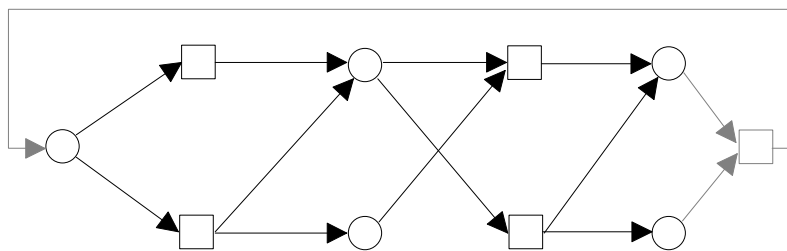


Bild A2.13: Das Petri-Netz von Bild A2.11 erweitert zu einem Petri-Netz, in dem jede Stelle einen Vorgänger und einen Nachfolger besitzt.

Eine andere Möglichkeit Petri-Netze in Subzentren-Netzwerke umzuwandeln, besteht darin, Transitionen auf Subzentren abzubilden und Stellen als eine verteilte Menge von Ein- und Ausgängen darzustellen, wie der nachfolgende Satz zeigt.

Satz und Definition A2.5.3:

Ist (G, T, S) ein Petri-Netz in dem jede Stelle einen Vorgänger und einen Nachfolger besitzt, $T' := \{(t, t) : t \in T\}$, $V' := T' \cup K(G)$ und $K' := \{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in V' \times V' : (*), (**) \text{ und } (***)\}$ mit

$$(*) \quad y_1 = x_2$$

$$(**) \quad x_1 \in S \Rightarrow y_2 \in T$$

$$(***) \quad x_1, y_2 \in T \Rightarrow y_1, x_2 \in S,$$

dann ist $N' := (G', T')$ mit $G' := (V', K')$ ein geschlossenes, gepacktes Subzentren-Netzwerk. $N((G, T, S)) := N'$ heißt das **durch (G, T, S) definierte Subzentren-Netzwerk**.

Beweis:

Zeige, daß die Voraussetzungen von Satz A2.5.7 erfüllt sind.

Definiere $W := T$ und $B := S \Rightarrow W \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ und $W \cap B = \emptyset$, da (G, T, S) ein Petri-Netz ist. Aus demselben Grund ist $V' \subseteq T' \cup W \times B \cup B \times W \subseteq (W \cup B) \times (W \cup B)$ mit $V' \cap B \times B = \emptyset$. Nach Definition von V' ist $V' \cap W \times W = T'$.

$K \subseteq V' \times V'$ erfüllt mit (*) bzw. (**) bzw. (***) die Bedingungen (1) bzw. (2) bzw. (3). Angenommen $(t, t) \in T'$ und $(t, y) \in V \setminus T' \Rightarrow y \in S \Rightarrow ((t, t), (t, y)) \in K$, da $(t, t), (t, y)$ die Bedingungen (*)-(***) erfüllt und K alle Kanten enthält, die diese Bedingungen erfüllen. \Rightarrow Es gilt (4) und analog (5) $\Rightarrow N'$ ist ein geschlossenes, gepacktes Subzentren-Netzwerk.

q.e.d.

Wird aus (G, T, S) das Netzwerk $N((G, T, S))$ gebildet, so werden aus Transitionen Subzentren; darauf hinzeigende Kanten werden zu Eingängen und davon wegzeigende Kanten werden zu Ausgängen. Zeigt in (G, T, S) eine Kante auf eine Stelle und eine andere davon weg, so sind die entsprechenden Aus- und Eingänge in $N((G, T, S))$ über eine Kante verbunden. Beim Übergang von (G, T, S) zu $N((G, T, S))$ wird also sozusagen eine Stelle in mehrere, mit Kanten verbundene Aus- und Eingänge aufgelöst.

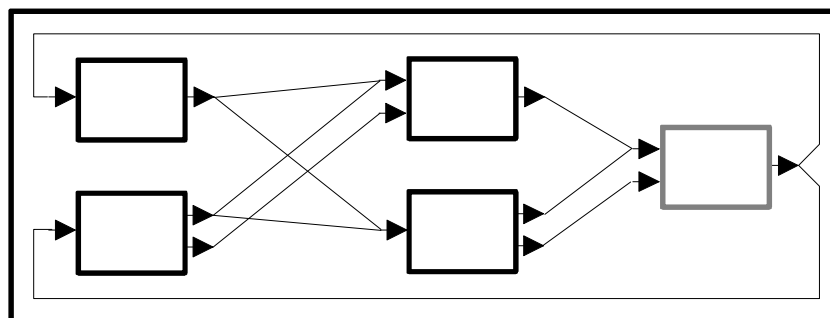


Bild A2.15: Das Petri-Netz von Bild A2.13 umgewandelt in ein markiertes, geschlossenes, gepacktes Subzentren-Netzwerk.

Liegt ein Petri-Netz vor, in dem nicht jede Stelle einen Vorgänger und einen Nachfolger besitzt, so kann ein solches Petri-Netz durch Hinzunahme einer neuen Transition, die gerade mit diesen Stellen verbunden wird, in ein Petri-Netz eingebettet werden, in dem jede Stelle einen Vorgänger und einen Nachfolger besitzt. (Vergleiche Bild A2.11 und Bild

A2.13.) Nach der Umwandlung in ein Subzentren-Netzwerk gemäß kann das, dieser neuen Transition entsprechende Subzentrum wieder entfernt werden so, daß man dadurch ein offenes Subzentren-Netzwerk erhält.

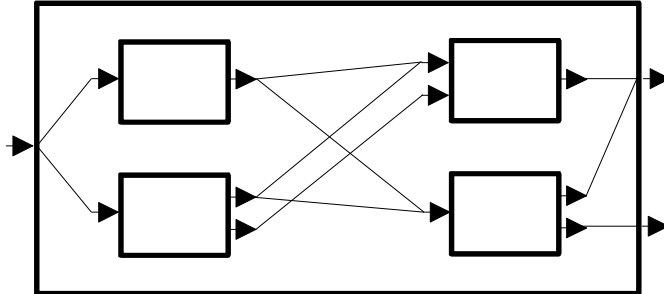


Bild A2.17: Die Öffnung des markierten Netzwerkes von Bild A2.15 bzw. das Petri-Netz von Bild A2.11, umgewandelt in ein offenes, gepacktes Subzentren-Netzwerk.

A2.6 Logische Schaltkreise

Wie bereits an verschiedenen Stellen erwähnt, entwickelte G. Hotz eine Schaltkreistheorie, wobei er sich geometrisch, topologischer Netzwerke bedient. Er gibt dazu in [HOT74] folgende Definition:

*"Unter einem **Netz** mit n Eingängen und m Ausgängen ($n, m = 0, 1, 2, \dots$) verstehen wir folgendes topologisches Gebilde:*

In der euklidischen Ebene sei ein Rechteck mit den Seiten g_1, g_2 und h_1, h_2 gegeben, worin sich sowohl die g_i als auch h_i gegenüber liegen.

A_1, \dots, A_n bzw. B_1, \dots, B_m seien paarweise verschiedene Punkte auf g_1 bzw. g_2 , wobei die Numerierungen der Punkte von h_1 nach h_2 laufen; die A_i bzw. B_i teilen g_1 bzw. g_2 in äquidistante Stücke.

Die A_i seien Anfangspunkte, die B_i Endpunkte von je genau einer Strecke eines orientierten, endlichen Streckenkomplexes, der in der euklidischen Ebene in überkreuzungsfreier Lage in dem Rechteck liege. (Im euklidischen Sinne handelt es sich um stückweise lineare Kurvenzüge.) Wir fordern von dem Streckenkomplex weiter, daß jede seiner Strecken schlicht über h_1 ist und daß die Orientierung der Strecken in Richtung von g_1 nach g_2 zeigt."

Da G. Hotz nicht an der geometrischen, sondern nur an der topologischen Struktur dieser Netze interessiert ist, faßt er verschiedene solcher Netze so zu Äquivalenzklassen zusammen, daß die geometrischen Aspekte dieser Netzwerke fast vollständig wegfallen. Er gibt dazu in [HOT74] folgende Definition:

"Zwei Netze heißen gleich, wenn sie sich nach Aufeinanderlegen ihrer Rahmen (g_1, g_2, h_1, h_2) ohne Selbstdurchdringung in der Ebene ineinander deformieren lassen, und zwar so, daß alle Zwischenlagen Netze sind.

Dabei verstehen wir unter einer Deformation eine elementare Deformation oder eine Deformation, die sich durch eine Kette elementarer Deformationen erzeugen läßt; die elementaren Deformationen sind Dreiecksdeformationen oder verallgemeinerte Dreiecksdeformationen, wie sie durch ... beschrieben werden. Zugelassen sind weiter die (trivialen) Deformationen, die in Streckungen oder Dehnungen des Rahmens oder euklidische Bewegungen des Netze bestehen."

Obwohl die oben gegebenen Definitionen der Äquivalenzklassen dieser Netze sehr umfangreich ausgefallen sind, lassen sich die Repräsentanten solcher Äquivalenzklassen trotzdem sehr

anschaulich in Form von speziellen Graphen darstellen, wie Bild A2.19 zeigt. Wird eine solche Darstellung um 90° gegen den Uhrzeigersinn gedreht, so wird offensichtlich, daß die von G. Hotz definierten geometrisch, topologischen Netze bzw. deren Äquivalenzklassen strukturell sehr ähnlich zu den Subzentren-Netzwerken sind. Um dies noch klarer herauszuarbeiten, sind nach der Drehung lediglich die (äußeren) Ein- und Ausgänge in Form von Pfeilen darzustellen und die restlichen (inneren) Knoten durch Subzentren so zu ersetzen, wie es weiter oben beschrieben wurde. Vgl. Bild A2.21.

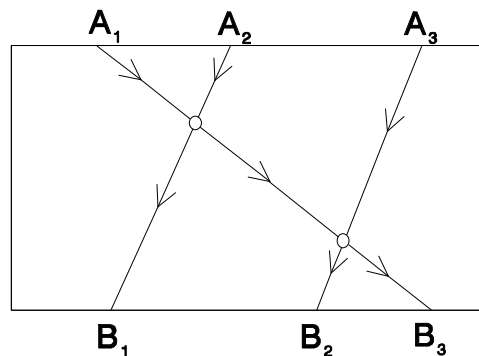


Bild A2.19: Ein geometrisch, topologisches Netz mit drei Eingängen und drei Ausgängen.

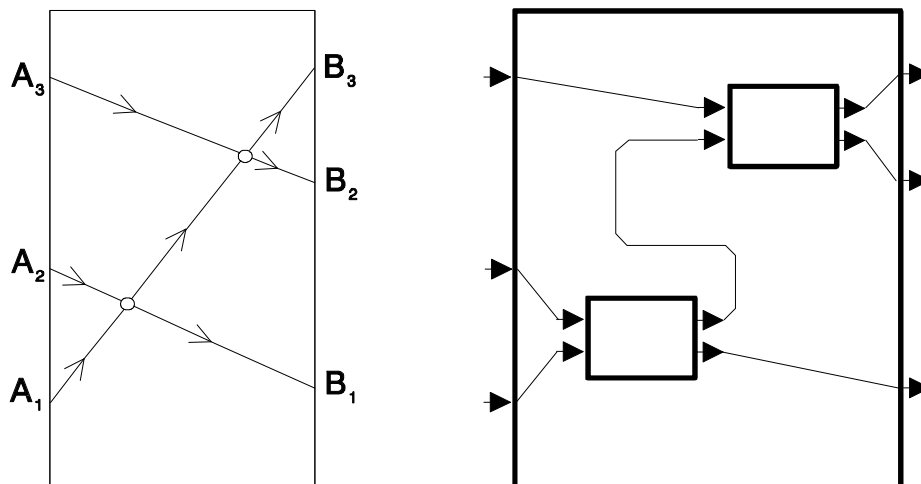


Bild A2.21: Das geometrisch, topologische Netz von Bild A2.19 um 90° gedreht und seine äquivalente Darstellung als fortlaufend indiziertes Subzentren-Netzwerk.

Das spezielle an den von G. Hotz verwendeten Graphen ist nun, daß es sich um Graphen handelt, in denen auch Mehrfachkanten zugelassen sind, wie aus Bild A2.23 hervorgeht. (Neben der

semantischen Bedeutung schließt es dieser Umstand auch aus, die inneren Knoten als Interimknoten zu interpretieren.) Desweiteren sind die äußeren Ein- und Ausgänge geordnet, wodurch sich für Netze mit genau einem inneren Knoten implizit auch eine Ordnung für die ein- bzw. ausgehenden Kanten ergibt. Beim Übergang zu einem Subzentren-Netzwerk wird aus einem

solchen Netz, mit genau einem inneren Knoten, also ein geordnetes bzw. fortlaufend indiziertes Subzentren-Netzwerk. Dies gilt jedoch nicht für Netze mit mehr als einem inneren Knoten und hat zur Folge, daß zwei verschiedene fortlaufend indizierte Subzentren-Netzwerke durchaus dasselbe geometrisch, topologische Netz klassifizieren können.

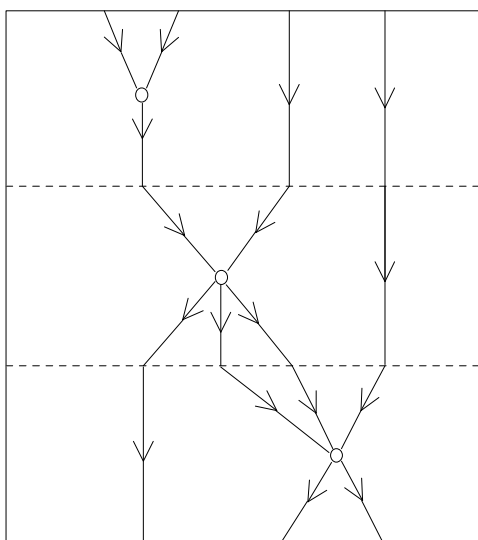


Bild A2.23: Die sequentielle Darstellung eines geometrisch topologischen Netzes, in dem Mehrfachkanten auftreten.

Analog, wie für fortlaufend indizierte Subzentren-Netzwerke geschehen, definiert G. Hotz auf seinen Netzen eine algebraische Struktur, in dem er ein paralleles und serielles Produkt einführt. (Historisch gesehen ist diese Analogie natürlich genau umgekehrt, d.h. die Definition eines parallelen und seriellen Produkts für Subzentren-Netzwerke wurde der Idee von G. Hotz nachempfunden.) Unter Verwendung der Theorie der X-Kategorien gibt G. Hotz eine Beweisskizze, die zeigt, daß die oben definierten Netze bzw. deren Äquivalenzklassen eine freie X-Kategorie bilden. Es wird hier bewußt von einer Beweisskizze und nicht von einem Beweis gesprochen, da G. Hotz zwar alle wesentlichen Zwischenschritte aufzählt, jedoch nicht im Detail durchführt. Wie bereits erwähnt, gilt dies insbesondere für die Abschnitte, in denen G. Hotz auf sequentielle Darstellungen eingeht oder implizit auf bestimmende Abbildungen zurückgreift. Es ergeben sich auch noch andere kleinere Ungereimtheiten dadurch, daß G. Hotz in

dieser Beweisskizze stets davon ausgeht, daß alle zu einem inneren Knoten führenden bzw. davon ausgehenden Kanten geordnet sind, dies explizit jedoch nicht erwähnt wird. Daß es so gemeint war, geht allerdings schon aus dem Umstand hervor, daß an einem elektronischen Bauteil ein Ein- bzw. Ausgang nur durch seine Position (Ordnung) identifiziert werden kann und schließlich war es das Ziel von G. Hotz, die Semantik von Logikschaltkreisen zu definieren.

Um keinen falschen Eindruck zu erwecken, sei auch an dieser Stelle nochmals darauf hingewiesen, daß die in der Beweisskizze von G. Hotz auftretenden Mängel verschwindend gering sind, im Vergleich zu den überwundenen Hürden. Überdies waren die G. Hotz einzig zur Verfügung stehenden Theorien der geometrisch, topologischen Netze und der X-Kategorien von ihrer "Unhandlichkeit" her sicherlich nicht geeignet, die Komplexität des gesuchten Beweises zu vereinfachen.

Zusammenfassend kann nun festgehalten werden, daß sich Logikschaltungen über formatierte, fortlaufend indizierte Subzentren-Netzwerke beschreiben lassen. Werden wie bei G. Hotz, als erzeugende Elemente nur Identitäten und einfache Netze ohne Schleifen mit mindestens einem äußeren Ausgang zugelassen, so liegt nach dem ersten Hauptsatz (Satz A2.7.11) ein vollkommenes bzw. Hotz'sches Monopolyid vor. Da nach [HÜB95] Satz A2.9.20 jedes solche Monopolyid ein freies Monopolyid ist und nach [HÜB95] Satz A2.9.21 dieses freie Monopolyid einer freien X-Kategorie zugeordnet werden kann, wird das Ergebnis der Untersuchungen von G. Hotz damit noch einmal von anderer Seite bestätigt. Wie im A2. Kapitel gezeigt wurde, kann dieses Ergebnis für beliebige erzeugende Elemente verallgemeinert werden, welches zu einem α -vollkommenen Monopolyid führt. Das Beispiel DIGISIM zeigt weiter, daß die Definition der Semantik von Schaltkreisen als ein Spezialfall einer visuellen Programmiersprache angesehen werden kann. Damit können auch alle anderen, in dieser Publikation vorgestellten Ergebnisse, in vollkommener Analogie auf die Definition der Semantik von Schaltkreisen übertragen werden.

A2.7 Strukturierte Systemanalyse

Bild A2.25 zeigt ein typisches Beispiel eines Graphen, wie er in der "Strukturierten Systemanalyse" verwendet wird, um den Datenfluß darzustellen. (Vgl. z.B. [MEN88].) Es ist leicht zu erkennen, daß es sich dabei um ein offenes Subzentren-Netzwerk handelt. Dabei verweisen Pfeile, die nach außen zeigen auf (nicht dargestellte) äußere Ausgänge. Analog weisen Pfeile ohne Vorgänger, auf nicht dargestellte äußere Eingänge hin. Durch geringfügiges Umstellen kann diese Struktur weiter hervorgehoben werden, wie in Bild A2.27 zu sehen ist.

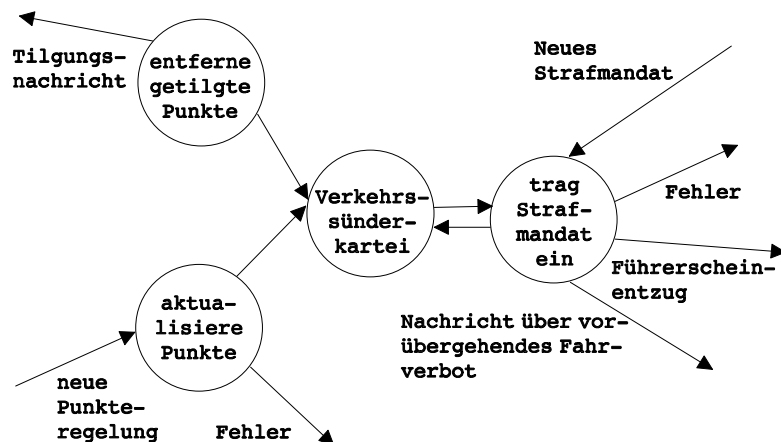


Bild A2.25: Ereignisgegliederter Ausschnitt des Verkehrssündersystems.

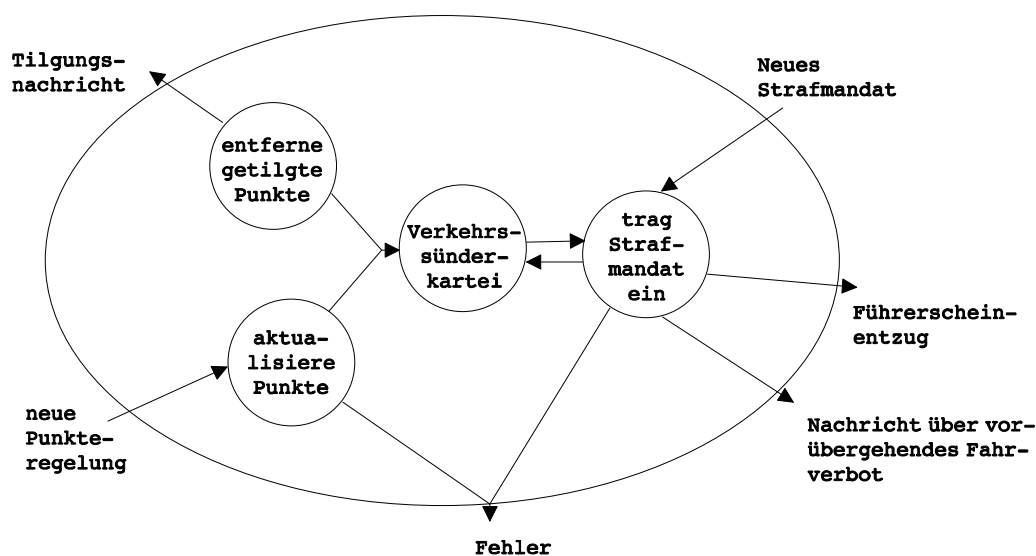


Bild A2.27: Das Diagramm von Bild A2.25 dargestellt als offenes Subzentren-Netzwerk.

Da die strukturierten Systemanalyse zu den bewährten und etablierten Werkzeugen des Softwareengineering zählt und die dabei verwendeten Graphen unmittelbar als Datenflußnetzwerke interpretiert werden können, ist zu erwarten, daß sich von dieser Seite ein großes Interesse an den visuellen Datenflußsprachen einstellen wird.

Anhang

Nachfolgend werden die wichtigsten Definitionen und Sätze aus [HÜB95] wiedergegeben. Dabei wird die dort verwendete Numerierung weiterverwendet. Eventuell auftretende Lücken ergeben sich daraus, daß weniger Bedeutendes nicht wiedergegeben wird.

A2. Partielle Halbgruppen und Polyide

A1.1 Partielle Halbgruppen	258
A1.2 Kongruenzen	261
A1.3 Polyide	265

Ist die zu einer Halbgruppe gehörende Operation nicht für alle Operandenpaare definiert, so liegt unter Umständen eine partielle Halbgruppe vor. Diese wird als Polyid bezeichnet, wenn zu jedem Element ein links- und ein rechtsseitiges Neutralelement existiert. Damit handelt es sich bei der algebraischen Struktur des Polyids um eine Verallgemeinerung eines Monoids. In diesem Kapitel werden im wesentlichen die grundlegenden Begriffe, wie man sie aus der Theorie der Halbgruppen oder Monoide kennt, auf partielle Halbgruppen und Polyide verallgemeinert. Insbesondere wird dabei auf Erzeugendensysteme und Kongruenzen eingegangen, da diese im Bezug auf die noch zu definierenden Monopolyide eine große Rolle spielen.

A2.1 Partielle Halbgruppen

Bei der algebraischen Struktur einer partiellen Halbgruppe handelt es sich um eine Verallgemeinerung einer Halbgruppe, wobei die zugehörige Operation nicht für alle Paare definiert sein muß.

Definition A2.1.2:

Ist P eine Menge, $D \subseteq P \times P$ und $\circ: D \rightarrow P$ eine (partiell definierte) Operation auf P , dann soll das Tupel (P, \circ_D) eine **partielle Halbgruppe** heißen wenn gilt:

$$(f, g), (g, h) \in D \Leftrightarrow (f, g), (f \circ g, h) \in D \Leftrightarrow (g, h), (f, g \circ h) \in D \Leftrightarrow (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

Ist $(f, g) \in D$, so sagt man auch: **fog ist definiert**.

Eine partielle Halbgruppe ist also genau dann eine "ganze" Halbgruppe, wenn alle möglichen Produkte definiert sind, d.h. $D = P \times P$ ist.

Es folgt eine mehr oder weniger lose Aufzählung von Definitionen und Sätzen, wie man sie von Halbgruppen und Gruppen kennt und die für partielle Halbgruppen verallgemeinert wurden.

Definition A2.1.4:

Sei (P, \circ_D) eine partielle Halbgruppe.

- (a) Ein Element $1 \in P$ heißt **linksneutral** in (P, \circ_D) , wenn gilt: $1 \circ v = v$, für alle $v \in P$ mit $(1, v) \in D$.
- (b) Ein Element $a \in P$ heißt **linkskürzbar** in (P, \circ_D) , wenn für alle $u, v \in P$ mit $(a, u), (a, v) \in D$ aus $a \circ u = a \circ v \Rightarrow u = v$. Gilt dies für alle Elemente aus P , so heißt (P, \circ_D) eine **linkskürzbare partielle Halbgruppe**.
- (c) Ein Element $a \in P$ heißt **idempotent** in (P, \circ_D) , wenn $(a, a) \in D$ und $a \circ a = a$ ist.
- (d) Ein Element $a \in P$ heißt **isoliert** in (P, \circ_D) , wenn für alle $u \neq a \in P$ gilt: $(u, a) \notin D$ und $(a, u) \notin D$.

Rechtsneutrale und **rechtskürzbare** Elemente seien in zu (a) und (b) analoger Art und Weise definiert.

Definition A2.1.6:

In einer partiellen Halbgruppe (P, \circ_D) heißt ein Element $1 \in P$ ein **Neutralelement**, eine **Einheit** oder eine **Identität**, wenn es links- und rechtsneutral ist. Die Menge aller Identitäten aus P sei mit 1_P bezeichnet.

Definition A2.1.8:

In einer partiellen Halbgruppe (P, \circ_D) heißt ein Element $u \in P$ **kürzbar**, wenn es sowohl links- als auch rechtskürzbar ist. Sind alle Elemente aus P kürzbar, dann heißt (P, \circ_D) eine **kürzbare partielle Halbgruppe**.

Definition A2.1.10:

Sind $(P', \cdot_{D'})$ und (P, \circ_D) zwei partielle Halbgruppen, dann heißt $(P', \cdot_{D'})$ genau dann eine **partielle Unterhalbgruppe** von (P, \circ_D) , wenn $P' \subseteq P$, $D' = D \cap (P' \times P')$ und $u \cdot v = u \circ v$ für alle $(u, v) \in D'$.

Da damit die partiellen Operationen " \cdot " und " \circ " auf P' übereinstimmen, ist es legitim für beide Operationen auch das gleiche Zeichen zu verwenden.

Satz und Definition A2.1.9:

Ist (P, \circ_D) eine partielle Halbgruppe, $P' \subseteq P$ und P^i induktiv definiert durch $P^0 = P'$ und $P^{i+1} := P^i \cup \{u \circ v : u, v \in P^i \text{ und } (u, v) \in D\}$, dann ist die Menge $\langle P', \circ \rangle_P := \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} P^i$ bezüglich der (partiellen)

Operation " \circ " abgeschlossen. $\langle P', \circ \rangle_P$ heißt die **Menge der endlichen Produkte von P' in P bzgl. " \circ "** und ist eine partielle Unterhalbgruppe von (P, \circ_D) .

Definition A2.1.11:

Sind (P_1, \circ_{D_1}) und (P_2, \cdot_{D_2}) zwei partielle Halbgruppen, dann heißt eine Abbildung $\phi: P_1 \rightarrow P_2$ genau dann ein **Homomorphismus (auf partiellen Halbgruppen)**, wenn gilt:

$$(u, v) \in D_1 \Rightarrow (\phi(u), \phi(v)) \in D_2 \text{ und } \phi(u \circ v) = \phi(u) \cdot \phi(v)$$

Entsprechend heißt ein Homomorphismus ein **Monomorphismus**, wenn ϕ injektiv ist und ein **Epimorphismus** bzw. **Isomorphismus**, wenn ϕ surjektiv bzw. bijektiv ist und für $u, v \in P_1$ gilt: $(\phi(u), \phi(v)) \in D_2 \Rightarrow (u, v) \in D_1$.

Ist $D_1 = P_1 \times P_1$ und $D_2 = P_2 \times P_2$, dann stimmt diese Art der Definition des Homomorphismus' mit der normalen Definition eines

Homomorphismus' für Halbgruppen überein. Wie üblich ist ein Homomorphismus genau dann ein Isomorphismus, wenn er gleichzeitig Monomorphismus und Epimorphismus ist.

A2.2 Kongruenzen

Obwohl es sich bei den Kongruenzen auf partiellen Halbgruppen wieder um eine Verallgemeinerung von Kongruenzen auf Halbgruppen bzw. Gruppen handelt, wird dieser Abschnitt gesondert herausgestellt, da hier einige zusätzliche Zusammenhänge erarbeitet werden.

Definition A2.2.2:

Ist P eine Menge, dann heißt $\rho \subseteq P \times P$ eine **binäre Relation**. (Statt $(u, v) \in \rho$ schreibt man auch $u \rho v$.) ρ heißt **reflexiv**, wenn $u \rho u$ für alle $u \in P$; **symmetrisch**, wenn mit $u \rho v$ auch $v \rho u$ gilt; **transitiv**, wenn mit $u \rho v$ und $v \rho w$ auch $u \rho w$ gilt.

Eine binäre Relation \sim heißt **Äquivalenzrelation**, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Für $u \in P$ heißt $[u] := \{v \in P : v \sim u\}$ die **Äquivalenzklasse von u in P** . $P/\sim := \{[u] : u \in P\}$ heißt die **Quotientenmenge** von P bzgl. \sim .

Ist eine Relation \sim transitiv, so sei statt $u \sim v$, $v \sim w$ auch die abgekürzte Schreibweise $u \sim v \sim w$ erlaubt.

Definition A2.2.4:

Ist (P, \circ_D) eine partielle Halbgruppe, dann heißt eine binäre Relation $\sim \subseteq P \times P$ **linksverträglich mit " \circ "**, wenn für $u, v, w \in P$ gilt: $u \sim v$ und $w \circ u$ ist definiert $\Rightarrow w \circ v$ ist definiert und $w \circ u \sim w \circ v$. Analog heißt \sim **rechtsverträglich mit " \circ "**, wenn für $u, v, w \in P$ gilt: $u \sim v$ und $u \circ w$ ist definiert $\Rightarrow v \circ w$ ist definiert und $u \circ w \sim v \circ w$.

Definition A2.2.6:

Ist (P, \circ_D) eine partielle Halbgruppe, dann heißt eine Äquivalenzrelation \sim auf P , eine **Kongruenzrelation** oder einfach **Kongruenz auf (P, \circ_D)** , wenn \sim links- und rechtsverträglich mit " \circ " ist.

Definition A2.2.5:

Ist (P, \circ_D) eine partielle Halbgruppe, \sim eine Kongruenz auf (P, \circ_D) , ρ eine symmetrische Teilmenge von \sim und $u, v \in P$, dann heißt u **bzgl. ρ direkt überführbar in v** , wenn $u = v$ ist oder es existieren $w_1, w_1' \in P$ mit $(w_1, w_1') \in \rho$ und eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- (a) $u=w_1$ und $v=w_1'$.
- (b) $\exists w_0 \in P$ mit $u=w_0 \circ w_1$ und $v=w_0 \circ w_1'$
- (c) $\exists w_2 \in P$ mit $u=w_1 \circ w_2$ und $v=w_1' \circ w_2$
- (d) $\exists w_0, w_2 \in P$ $u=w_0 \circ w_1 \circ w_2$ und $v=w_0 \circ w_1' \circ w_2$

Der Begriff der Überführbarkeit muß vor dem Hintergrund gesehen werden, daß jedes Element u aus P in ein Produkt $u=w_0 \circ w_1 \circ \dots \circ w_n$ zerlegt werden kann. Damit zeigt sich bei genauerem Betrachten der Bedingungen (a)-(d), daß diese gerade so formuliert sind, daß sie das Substituieren einer zusammenhängenden Sequenz von Faktoren in einer Zerlegung von u beschreiben, wobei die zu ersetzenden Faktoren und die ersetzenden Faktoren identisch oder bzgl. ρ äquivalent sind. (Im Bezug auf die sogenannten sequentiellen Darstellungen der noch zu definierenden Monopolyide wird dies noch genauer erläutert werden.)

Der Begriff der Überführbarkeit, soll nun noch etwas erweitert werden.

Definition A2.2.7:

Ist (P, \circ_D) eine partielle Halbgruppe, \sim eine Kongruenz auf (P, \circ_D) , ρ symmetrische Teilmenge von \sim und $u, v \in P$, dann heißt **u bzgl. ρ überführbar in v** (in Zeichen: $u \rightarrow_{\rho} v$), wenn es eine Folge $u_1, \dots, u_m \in P$ gibt mit $u=u_1$, $u_m=v$ und für $1 \leq k \leq m-1$ u_k bzgl. ρ direkt überführbar in u_{k+1} ist.

Bevor gezeigt werden kann, daß \rightarrow_{ρ} eine Kongruenz auf (P, \circ_D) ist, sind noch zwei Hilfssätze zu beweisen.

Satz A2.2.9:

Ist (P, \circ_D) eine partielle Halbgruppe, \sim eine Kongruenz auf (P, \circ_D) und ρ eine symmetrische Teilmenge von \sim , dann ist \rightarrow_{ρ} eine Kongruenz auf (P, \circ_D) und eine Teilmenge von \sim . Damit gelten folgende Rechenregeln:

- (a) $u \in P \Rightarrow u \rightarrow_{\rho} u$
- (b) $u \rightarrow_{\rho} v \Rightarrow v \rightarrow_{\rho} u$
- (c) $u \rightarrow_{\rho} v$ und $v \rightarrow_{\rho} w \Rightarrow u \rightarrow_{\rho} w$
- (d) $u \rightarrow_{\rho} u'$ und $u \circ v$ ist definiert \Rightarrow
 $u' \circ v$ ist definiert und $u \circ v \rightarrow_{\rho} u' \circ v$
- (e) $u \rightarrow_{\rho} u'$ und $v \circ u$ ist definiert \Rightarrow
 $v \circ u'$ ist definiert und $v \circ u \rightarrow_{\rho} v \circ u'$

- (f) $u \rightarrow_{\rho} u', v \rightarrow_{\rho} v'$ und $u \circ v$ definiert \Rightarrow
 $u' \circ v'$ ist definiert und $u \circ v \rightarrow_{\rho} u' \circ v'$.
- (g) $u \rightarrow_{\rho} v \Rightarrow u \sim v$

Es sei an dieser Stelle noch einmal hervorgehoben, daß nach (b) die Relation " \rightarrow_{ρ} " symmetrisch ist und somit auch die Formulierung "u und v sind bzgl. ρ ineinander überführbar" sinnvoll ist.

Unter den möglichen, symmetrischen Teilmengen einer Kongruenz auf (P, \circ_D) gibt es besondere, die Basen genannt werden. Dazu folgende Definition:

Definition A2.2.11:

Ist (P, \circ_D) eine partielle Halbgruppe, \sim eine Kongruenz auf (P, \circ_D) und ρ eine symmetrische Teilmenge von \sim , dann heißt ρ eine **Basis von \sim** , wenn \rightarrow_{ρ} identisch zu \sim ist, d.h. für $u, v \in P$ ist $u \sim v \Leftrightarrow u \rightarrow_{\rho} v$.

Der nachfolgende Satz zeigt, daß die in der Definition einer Basis gegebene Bedingung etwas vereinfacht werden kann.

Satz A2.2.13:

Ist (P, \circ_D) eine partielle Halbgruppe, \sim eine Kongruenz auf (P, \circ_D) und ρ eine symmetrische Teilmenge von \sim , dann ist ρ genau dann eine Basis von \sim , wenn gilt: $u, v \in P$ und $u \sim v \Rightarrow u \rightarrow_{\rho} v$.

Natürlich existiert zu jeder Kongruenz \sim auf (P, \circ_D) eine Basis, da \sim selbst eine solche definiert. Wie bei Basen im allgemeinen üblich, ist es jedoch stets das Ziel zu einer Kongruenz eine möglichst kleine Basis angeben zu können. Dies hängt natürlich entscheidend von der partiellen Halbgruppe (P, \circ_D) und der Kongruenz \sim ab und kann nur im Einzelfall untersucht werden. Als Vorbereitung für das Kapitel "Monopolyide" dient dazu nachfolgender Satz. Dabei ist \mathbb{N}_0 die Menge aller natürlichen Zahlen vereinigt mit 0.

Satz A2.2.15:

Ist (P, \circ_D) eine partielle Halbgruppe, \sim eine Kongruenz auf (P, \circ_D) , ρ eine symmetrische Teilmenge von \sim und existiert ein Homomorphismus $|\cdot|: (P, \circ_D) \rightarrow (\mathbb{N}_0, +)$ so, daß für $u, v \in P$ die Bedingungen (0)-(2) gelten, so ist ρ eine Basis von \sim .

- (0) $u \sim v \Rightarrow |u| = |v|$.

- (1) $u \sim v$ und $|u| \geq 1 \Rightarrow \exists u', v', w' \in P$ mit $|w'| \geq 1$, $u' \sim v'$, $w' \circ u'$ und $w' \circ v'$ sind definiert und $u \rightarrow_{\rho} u' \circ w'$ sowie $v \rightarrow_{\rho} v' \circ w'$.
- (2) $u \sim v$ und $|u| = 0 \Rightarrow u \rightarrow_{\rho} v$.

Definition A2.2.14:

Sind M_1 und M_2 zwei Mengen, \sim eine Relation auf M_1 , \approx eine Relation auf M_2 und ρ Teilmenge von \sim , dann heißt eine Abbildung $\phi: M_1 \rightarrow M_2$ auf ρ **relationserhaltend**, wenn für alle $u, v \in M_1$ gilt: $u \rho v \Rightarrow \phi(u) \approx \phi(v)$.

A2.3 Polyide

Definition A2.3.2:

Eine partielle Halbgruppe (P, \circ_D) heißt ein **Polyid**, wenn zu jedem $u \in P$ Identitäten l_{1u} und l_{ru} existieren mit $(l_{1u}, u) \in D$ und $(u, l_{ru}) \in D$. Ein Polyid (P, \circ_D) heißt ein **Monoid**, wenn es genau eine Identität besitzt. Ein Polyid bzw. Monoid heißt **kürzbar**, wenn es als partielle Halbgruppe kürzbar ist.

Satz A2.3.4:

Ein Polyid (P, \circ_D) ist genau dann ein Monoid, wenn (P, \circ_D) eine Halbgruppe ist.

Damit stimmt also die hier gegebene Definition eines Monoids mit der herkömmlichen Definition einer Halbgruppe mit Neutralelement überein.)

Während in einem Monoid alle links- und rechtsneutralen Elemente identisch sind, gilt dies in einem Polyid im allgemeinen nicht! Es gilt jedoch folgender Satz:

Satz A2.3.6:

Ist (P, \circ_D) ein Polyid, dann gilt:

- (1) Zu jedem $u \in P$ existiert genau eine Identität $l_{1u} \in P$ mit $l_{1u} \circ u = u$.
- (2) Zu jedem $u \in P$ existiert genau eine Identität $l_{ru} \in P$ mit $u \circ l_{ru} = u$.
- (3) Ist l_P die Menge der Identitäten von (P, \circ_D) , dann ist die Abbildung $l_1: P \rightarrow l_P: l_1(u) := l_{1u}$ bzw. $l_r: P \rightarrow l_P: l_r(u) := l_{ru}$ wohldefiniert und es ist $l_1(u \circ v) = l_1(u)$, sowie $l_r(u \circ v) = l_r(v)$.
- (4) $l \in P$ ist genau dann ein Neutralelement, wenn es idempotent und links- und rechtskürzbar ist.
- (5) $(u, v) \in D \Leftrightarrow l_r(u) = l_1(v)$
- (6) Jedes isolierte Element in (P, \circ_D) ist eine Identität.

Definition A2.3.8:

Ist (P, \circ_D) ein Polyid und $u \in P$, dann heißt ein $u' \in P$ ein **Links-** bzw. **Rechtsinverses von u**, wenn gilt $(u', u) \in D$ und $u' \circ u = l_r(u)$ bzw. $(u, u') \in D$ und $u \circ u' = l_1(u)$.

Satz und Definition A2.3.10:

Ist (P, \circ_D) ein Polyid und besitzt $u \in P$ sowohl ein Links- als auch Rechtsinverses, so sind alle Links- und Rechtsinversen von u identisch zu einem Element $u^{-1} \in P$. u^{-1} heißt das **Inverse von u** . Existiert zu u ein Inverses, dann heißt u **invertierbar**.

In einem Polyid besitzt also ein Element entweder kein oder genau ein Inverses.

Satz A2.3.12:

Ist (P, \circ_D) ein Polyid und $u, v \in P$ invertierbar, dann gilt:

- (1) $l_l(u^{-1}) = l_r(u)$ und $l_r(u^{-1}) = l_l(u)$
- (2) $(u^{-1})^{-1} = u$
- (3) $(u, v) \in D \Rightarrow (u \circ v)^{-1} = v^{-1} \circ u^{-1}$

Definition A2.3.14:

Ist (P, \circ_D) ein Polyid (Monoid), dann heißt eine partielle Unterhalbgruppe $(P', \circ_{D'})$ ein **Unterpolyid (Untermonoid)** von (P, \circ_D) , wenn $(P', \circ_{D'})$ ein Polyid mit $l_{P'} \subseteq l_P$ ist.

(Die Bedingung $l_{P'} \subseteq l_P$ ist dabei nicht redundant, da im allgemeinen nur $l_{P \cap P'} \subseteq l_{P'}$ gilt.)

Satz A2.3.16:

Ist $(P', \circ_{D'})$ ein Unterpolyid von (P, \circ_D) , dann ist $l_{P'} = l_P \cap P'$.

Satz A2.3.11:

Ist (P, \circ_D) eine partielle Halbgruppe und l_P die Menge der Identitäten, dann ist $(l_P, \circ_{D'})$ mit $D' := \{(u, v) \in D \cap (P' \times P')\}$ eine partielle Unterhalbgruppe von (P, \circ_D) . Ist (P, \circ_D) ein Polyid, so ist $(l_P, \circ_{D'})$ ein Unterpolyid.

Satz und Definition A2.3.13:

Ist (P, \circ_D) ein Polyid, $P' \subseteq P$ und $U_P(P')$ die Menge aller Unterpolyide von (P, \circ_D) , die P' enthalten, dann ist $\langle P' \rangle_P := \bigcap_{P'' \in U_P(P')} P''$ ein Unterpolyid von (P, \circ_D) , das das von P'

erzeugte Unterpolyid heißt. P' heißt dann auch ein **Erzeugendensystem** von $\langle P' \rangle_P$.

Definition A2.3.14:

Sind (P_1, \circ_{D_1}) und (P_2, \cdot_{D_2}) zwei Polyide, dann heißt ein Homomorphismus auf partiellen Halbgruppen $\phi: P_1 \rightarrow P_2$ genau dann ein **Polyiden-Homomorphismus**, wenn gilt: $u \in 1_{P_1} \Rightarrow \phi(u) \in 1_{P_2}$.

Analog heißt ϕ ein **Polyiden-Monomorphismus** bzw. **-Epimorphismus** bzw. **-Isomorphismus**, wenn ϕ ein Monomorphismus bzw. Epimorphismus bzw. Isomorphismus auf partiellen Halbgruppen ist. Ist sowohl (P_1, \circ_{D_1}) als auch (P_2, \cdot_{D_2}) ein Monoid, so heißt ϕ entsprechend ein **Monoiden-Homomorphismus** bzw. **-Monomorphismus** bzw. **-Epimorphismus** bzw. **-Isomorphismus**,

Ein Polyiden-Homomorphismus stellt also eine Erweiterung eines Homomorphismus für partielle Halbgruppen dar, wobei Identitäten auf Identitäten abgebildet werden. Als Spezialfall davon wäre ein Monoiden-Homomorphismus ein Halbgruppen-Homomorphismus der das Neutralelement des einen Monoids auf das Neutralelement des anderen Monoids abbildet.

A2. Monopolyide

A2.4	Grundlagen	270
A2.5	Sequentielle Darstellungen	273
A2.6	Monopolyiden-Homomorphismen und übertragbare Abbildungen	275
A2.7	Überführbare sequentielle Darstellungen und Substitutionsbasen	278
A2.8	Vollkommene Monopolyide	281
A2.9	Alpha-vollkommene Monopolyide	283
A2.10	Spezielle symmetrische Substitutionsmengen.	285
A2.11	Natürliche Monopolyide.....	289

Bei einem Monopolyid handelt es sich um eine algebraische Struktur mit zwei Operationen, die aus einem Monoid und einem Polyid besteht. Das Ziel dieses Kapitels ist es, günstige Kriterien bzw. Methoden angeben zu können, die es erlauben bestimmte Abbildungen von einem Erzeugendensystem eines Monopolyids in ein anderes zu genau einem Monopolyiden-Homomorphismus fortzusetzen. Dies führt zur speziellen Klasse der vollkommenen bzw. α -vollkommenen Monopolyide. Diese sind von großer praktischer Bedeutung. Um für diese Klassen geeignete Erkennungsmerkmale angeben zu können, ist es notwendig, detailliert auf sequentielle Darstellungen, symmetrische Substitutionsmengen und natürliche Monopolyide einzugehen.

A2.1 Grundlagen

Vergleichbar mit der algebraischen Struktur des Ringes, die aus einer Gruppe und einer Halbgruppe besteht, besteht ein Monopolyid aus einem Monoid und einem Polyid.

Definition A2.1.16:

Das Tupel (M, \times, \circ_D) soll genau dann ein **monoidales Bipolyid** oder kürzer **Monopolyid** heißen, wenn (M, \times) ein Monoid (mit Neutralelement 0) und (M, \circ_D) ein Polyid ist und folgendes gilt:

- (1) $0 \in 1_M$
- (2) $f, g \in 1_M \Rightarrow f \times g \in 1_M$
- (3) $(f, g), (h, e), (f \times h, g \times e) \in D \Leftrightarrow (f \circ g) \times (h \circ e) = (f \times h) \circ (g \times e)$
- (4) $(f, g), (h, e) \in D \Rightarrow (f \times h, g \times e) \in D$

Als nächstes werden einige Beispiele für Monopolyide vorgestellt.

Satz A2.1.18:

- (1) Ist $(H, +)$ ein kommutatives Monoid, so ist $(H, +, +)$ ein Monopolyid.
- (2) Ist \mathbb{N}_0 die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich 0, dann ist $(\mathbb{N}_0, +, +)$ ein Monopolyid.
- (3) Sei für eine Abbildung $f: A \rightarrow B$ $L(f) := A$ und $R(f) := B$. Ist \emptyset eine Menge von Mengen, die bzgl. des cartesischen Produkts "x" (mit $\emptyset \in \emptyset$ als Neutralelement) abgeschlossen ist, F_\emptyset die Menge aller Abbildungen f mit $L(f), R(f) \in \emptyset$, 0 die Abbildung mit $L(0) = R(0) = \emptyset$, $\bullet := \{(f, g) \in F_\emptyset \times F_\emptyset : R(f) = L(g)\}$, $f \bullet g: L(f) \rightarrow R(g)$ die Abbildung mit $(f \bullet g)(z) := g(f(z))$ bzw. $0 \bullet 0 = 0$ und $f \times g: L(f) \times L(g) \rightarrow R(f) \times R(g)$ mit $(f \times g)(y, z) = (f(y), g(z))$ bzw. $f \times 0 = f$ und $0 \times f = f \ \forall f \in F_\emptyset$, dann ist $(F_\emptyset, \times, \bullet)$ ein Monopolyid.

Es folgen einige Grundrechenregeln für Monopolyide.

Satz A2.1.20:

Ist (M, \times, \circ_D) ein Monopolyid und $f, g, h, e \in M$, dann gilt:

- (1) $l_1(f \times g) = l_1(f) \times l_1(g)$ und $l_r(f \times g) = l_r(f) \times l_r(g)$
- (2) $f \times g = (f \times l_1(g)) \circ (l_r(f) \times g) = (l_1(f) \times g) \circ (f \times l_r(g))$
- (3) $(f, g) \in D$ und $l \in l_M \Rightarrow (l \times f, l \times g) \in D$ und $(f \times l, g \times l) \in D$.
- (4) $(f, g) \in D$ und $l \in l_M \Rightarrow (f \circ g) \times l = (f \times l) \circ (g \times l)$ und $l \times (f \circ g) = (l \times f) \circ (l \times g)$
- (5) Sind f und g bzgl. " \circ " invertierbar, so ist $(f \times g)^{-1} = f^{-1} \times g^{-1}$.
- (6) $(f, g), (h, e) \in D$, $l \in l_M$ und $f \circ g = h \circ e \Rightarrow (l \times f) \circ (l \times g) = (l \times h) \circ (l \times e)$ und $(f \times l) \circ (g \times l) = (h \times l) \circ (e \times l)$.

In Formel (5) darf nicht übersehen werden, daß sich das Inverszeichen "hoch -1" auf die Operation " \circ " bezieht. Verwendet man statt dem Operationszeichen " \times " das Zeichen "+", so ändert sich (5) zu $(f+g)^{-1} = f^{-1} + g^{-1}$, womit die Aussagekraft dieser Formel noch deutlicher hervortritt, da im Körper der reellen Zahlen im allgemeinen $(f+g)^{-1} \neq f^{-1} + g^{-1}$ ist. (Man vergleiche dazu auch mit der Formel Satz A2.3.12 (3), in der beim Auflösen der Klammern die Operanden vertauscht werden.)

Definition A2.1.4:

Ein Monopolyid (M, \times, \circ_D) heißt **kürzbar**, wenn sowohl das Monoid (M, \times) als auch das Polyid (M, \circ_D) kürzbar sind.

Definition A2.1.6:

Ist (M, \times, \circ_D) ein Monopolyid, dann heißt $(M', \times, \circ_{D'})$ genau dann ein **Untermonopolyid** von (M, \times, \circ_D) , wenn (M', \times) ein Untermonoid von (M, \times) und $(M', \circ_{D'})$ ein Unterpolyid von (M, \circ_D) ist. Ein Untermonopolyid M' von M heißt ein **echtes Untermonopolyid**, wenn $M' \neq M$ ist.

Satz A2.1.7:

Ist (M, \times, \circ_D) ein Monopolyid und $M' \subseteq M$ mit Neutralelementen, dann ist $(M', \times, \circ_{D'})$ genau dann ein Untermonopolyid von (M, \times, \circ_D) , wenn M' bzgl. " \times " und " \circ " abgeschlossen und $l_{M'} \subseteq l_M$ ist.

Satz A2.1.9:

Ist (M, \times, \circ_D) ein Monopolyid, so ist $(l_M, \times, \circ_{D'})$ ein Untermonopolyid von (M, \times, \circ_D) .

Satz A2.1.11:

Ist (M, \times, \circ_D) ein Monopolyid, so bildet die Menge aller invertierbaren Elemente $M^{-1} := \{f \in M : f \text{ ist bzgl. } " \circ " \text{ invertierbar}\}$ ein Untermonopolyid von (M, \times, \circ_D) mit $1_M \in M^{-1}$.

Es folgen einige Sätze und Definitionen, die der Vorbereitung der Einführung von Erzeugendensystemen dienen.

Satz und Definition A2.1.11:

Ist (M, \times, \circ_D) ein Monopolyid und $M' \subseteq M$ mit Neutralelementen, dann ist $\langle M', \times, \circ \rangle_M := \langle \langle M', \times \rangle_M, \circ \rangle_M$ bzgl. " \times " und " \circ " abgeschlossen. $\langle M', \times, \circ \rangle_M$ heißt die Menge der **endlichen Produkte von M' in M** bzgl. " \times " und " \circ " und ist ein Untermonopolyid von (M, \times, \circ_D) .

Satz und Definition A2.1.13:

Ist (M, \times, \circ_D) ein Monopolyid, $M' \subseteq M$ und $U_M(M')$ die Menge aller Untermonopolyide von (M, \times, \circ_D) , die M' enthalten, dann ist $\langle M' \rangle_M := \bigcap_{M'' \in U_M(M')} M''$ ein Untermonopolyid von (M, \times, \circ_D) , das das von

M' **erzeugte Untermonopolyid** heißt. M' heißt dann auch ein **Erzeugendensystem** von $\langle M' \rangle_M$.

Erzeugendensysteme werden im weiteren Verlauf noch eine wichtige Rolle spielen.

A2.2 Sequentielle Darstellungen

Im Prinzip stellen sequentielle Darstellungen $3 \times n$ -Matrizen dar deren Koeffizienten mit Elementen aus einem Monopolyid besetzt sind (wie nachfolgende Definition zeigen wird). Der Name "sequentielle Darstellung" ist dabei ein Verweis auf die Möglichkeit ein Element des Monopolyids in der Form $(1_{t_1} \times f_1 \times 1_{b_1}) \circ \dots \circ (1_{t_n} \times f_n \times 1_{b_n})$ darzustellen.

Definition A2.2.15:

Ist (M, \times, \circ_D) ein Monopolyid, dann heißt eine $3 \times n$ -Matrix $S = \begin{pmatrix} 1_{t_1} & & 1_{t_n} \\ f_1 & \dots & f_n \\ 1_{b_1} & & 1_{b_n} \end{pmatrix}$ eine **sequentielle Darstellung**, wenn $1_{t_i}, 1_{b_i} \in 1_M$ für

$1 \leq i \leq n$ und $1_r(1_{t_i} \times f_i \times 1_{b_i}) = 1_l(1_{t_{i+1}} \times f_{i+1} \times 1_{b_{i+1}})$ für $1 \leq i \leq n-1$. Die Menge **Kern(S)** := $\{f_i : 1 \leq i \leq n\}$ heißt der **Kern von S**, **L(S)** := n heißt die Länge von S und **$\omega_M(S)$** := $(1_{t_1} \times f_1 \times 1_{b_1}) \circ \dots \circ (1_{t_n} \times f_n \times 1_{b_n})$ heißt der **Wert von S**. Ist $\omega_M(S) = f$, dann heißt S auch eine **sequentielle Darstellung von f**. **$s^{(j)}$** sei als die j-te Spalte von S definiert. Ist $M' \subseteq M$ mit $1_M \subseteq M'$, so sei **$S(M, M')$** als die Menge aller sequentiellen Darstellungen S mit **Kern(S) $\subseteq M'$** definiert.

Definition und Satz A2.2.17:

Ist (M, \times, \circ_D) ein Monopolyid, $M' \subseteq M$ mit $1_M \subseteq M'$ und $S, S' \in S(M, M')$, dann heißen S und S' **äquivalent** (in Zeichen **$S \sim S'$**), wenn **$\omega_M(S) = \omega_M(S')$** ist. Dabei definiert die Relation " \sim " eine Äquivalenzrelation auf $S(M, M')$.

Ist S eine sequentielle Darstellung, so kann also **$\omega_M(S)$** in der Form **$\omega_M(S) = (1_{t_1} \times f_1 \times 1_{b_1}) \circ \dots \circ (1_{t_n} \times f_n \times 1_{b_n})$** dargestellt werden. Gibt es umgekehrt zu $f \in M$ eine Darstellung der Form **$f = (1_{t_1} \times f_1 \times 1_{b_1}) \circ \dots \circ (1_{t_n} \times f_n \times 1_{b_n})$** mit $1_{t_i}, 1_{b_i} \in 1_M$, so kann daraus unmittelbar eine Matrix S obiger Form gewonnen werden so, daß S eine sequentielle Darstellung von f ist. Da $f = 0 \times f \times 0$ ist, ist klar, daß zu jedem $f \in M$ eine sequentielle Darstellung existiert. Diese Aussage kann jedoch noch genauer spezifiziert werden.

Satz A2.2.4:

Ist (M, \times, \circ_D) ein Monopolyid und $M' \subseteq M$ ein Erzeugendensystem von (M, \times, \circ_D) mit $1_M \subseteq M'$, so existiert für jedes $f \in M$ eine sequentielle Darstellung $S \in S(M, M')$ mit **$\omega_M(S) = f$** .

Als nächstes sollen die Operationen des Monopolyids auf die Menge $S(M, M')$ übertragen werden.

Definition und Satz A2.2.6:

Ist (M, \times, \circ_D) ein Monopolyid, $1_M \subseteq M' \subseteq M$, $S, S' \in S(M, M')$ mit

$$S = \begin{pmatrix} 1_{t1} & 1_{tn} \\ f_1 & \dots & f_n \\ 1_{b1} & 1_{bn} \end{pmatrix}, \quad S' = \begin{pmatrix} 1_{t1'} & 1_{tn'} \\ f_1' & \dots & f_n' \\ 1_{b1'} & 1_{bn'} \end{pmatrix}$$

und für $1_r(1_{tn} \times f_n \times 1_{bn}) = 1_l(1_{t1} \times f_1 \times 1_{b1})$

$$S \circ S' := \begin{pmatrix} 1_{t1} & 1_{tn} & 1_{t1'} & 1_{tn'} \\ f_1 & \dots & f_n & f_n' \\ 1_{b1} & 1_{bn} & 1_{b1'} & 1_{bn'} \end{pmatrix}, \quad \text{dann ist } (S(M, M'), \circ_{\mathcal{D}}) \text{ mit}$$

$\mathcal{D} := \{(S, S') \in S(M, M') \times S(M, M') : 1_r(1_{tn} \times f_n \times 1_{bn}) = 1_l(1_{t1} \times f_1 \times 1_{b1})\}$ eine partielle Halbgruppe.

Definition und Satz A2.2.7:

Ist (M, \times, \circ_D) ein Monopolyid, $1_M \subseteq M' \subseteq M$, $S, S' \in S(M, M')$ mit

$$S = \begin{pmatrix} 1_{t1} & 1_{tn} \\ f_1 & \dots & f_n \\ 1_{b1} & 1_{bn} \end{pmatrix}, \quad S' = \begin{pmatrix} 1_{t1'} & 1_{tn'} \\ f_1' & \dots & f_n' \\ 1_{b1'} & 1_{bn'} \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$S \times S' := \begin{pmatrix} 1_{t1} & 1_{tn} & 1_R \times 1_{t1'} & 1_R \times 1_{tn'} \\ f_1 & \dots & f_n & f_n' \\ 1_{b1} \times 1_L & 1_{bn} \times 1_L & 1_{b1'} & 1_{bn'} \end{pmatrix} \quad \text{mit}$$

$1_L := 1_l(1_{t1} \times f_1 \times 1_{b1})$ und $1_R := 1_r(1_{tn} \times f_n \times 1_{bn})$, dann ist $(S(M, M'), \times)$ eine Halbgruppe.

Es ist leicht einzusehen, daß die Menge $S(M, M')$ mit den Operationen " \times " und " \circ " leider kein Monopolyid bildet, da zum Beispiel keine links- und rechtsseitigen Identitäten existieren. Man kann jedoch leicht zeigen, daß bei entsprechendem Zusammenfassen zu Äquivalenzklassen ein Monopolyid gebildet werden kann.

A2.3 Monopolyiden-Homomorphismen und übertragbare Abbildungen

Die strukturerhaltenden Abbildungen im Bezug auf Monopolyide sind die Monopolyiden-Homomorphismen.

Definition A2.3.9:

Sind $(M_1, \times, \circ_{D_1})$ und $(M_2, +, \cdot_{D_2})$ zwei Monopolyide, dann heißt eine Abbildung $\phi: M_1 \rightarrow M_2$ genau dann ein **Monopolyiden-Homomorphismus**, wenn ϕ sowohl bzgl. " \times " als auch " \circ " ein Polyiden-Homomorphismus ist. Analog heißt ϕ ein **Monopolyiden-Monomorphismus** bzw. **-Epimorphismus** bzw. **-Isomorphismus**, wenn ϕ sowohl bzgl. " \times " als auch " \circ " ein Polyiden-Monomorphismus bzw. -Epimorphismus bzw. -Isomorphismus ist. ϕ heißt der **triviale** Monopolyiden-Homomorphismus, wenn $\phi(f) = 0 \quad \forall f \in M_1$ ist.

Satz A2.3.11:

Ist (M, \times) ein Monoid, (M, \circ_D) ein Polyid, $(M_2, +, \cdot_{D_2})$ ein Monopolyid und $\phi: M \rightarrow M_2$ sowohl ein Monoiden-Isomorphismus bzgl. " \times " als auch ein Polyiden-Isomorphismus bzgl. " \circ ", so ist (M, \times, \circ_D) ein zu $(M_2, +, \cdot_{D_2})$ isomorphes Monopolyid.

Sind zwei Monopolyide $(M_1, \times, \circ_{D_1})$ und $(M_2, +, \cdot_{D_2})$ gegeben, so ist es manchmal von besonderem Interesse einen Monopolyiden-Homomorphismus angeben zu können, der jedem Element aus M_1 ein Element aus M_2 zuordnet. Nachfolgend wird darauf hingearbeitet zu klären, welche Bedingungen das Monopolyid $(M_1, \times, \circ_{D_1})$, eine Teilmenge $M_1' \subseteq M_1$ und eine Abbildung $\phi': M_1' \rightarrow M_2$ erfüllen müssen, damit, ϕ' zu genau einem Homomorphismus $\phi: M_1 \rightarrow M_2$ fortgesetzt werden kann.

Satz und Definition A2.3.4:

Sind (M, \times, \circ_D) und $(M_2, +, \cdot_{D_2})$ zwei Monopolyide, $M' \subseteq M$ mit $1_M \in M'$, dann muß eine Abbildung $\phi': M' \rightarrow M_2$, die zu genau einem Monopolyiden-Homomorphismus fortsetzbar ist, folgenden Bedingungen genügen:

(F0) $\phi'(0)=0$ und für $f,g \in l_M \Rightarrow \phi'(f), \phi'(g) \in l_{M_2}$, sowie $\phi'(f \times g) = \phi'(f) + \phi'(g)$

(F1) $(f,g) \in D \cap M' \times M' \Rightarrow (\phi'(f), \phi'(g)) \in D_2$

ϕ' heißt dann **die Minimalvoraussetzungen zur Fortsetzung zu genau einem Monopolyiden-Homomorphismus erfüllend**.

Scheinbar ohne Zusammenhang werden nun die (auf sequentielle Darstellungen) übertragbaren Abbildungen eingeführt. Aber schon mit dem nächsten Satz zeigt sich die verblüffende Äquivalenz von übertragbaren Abbildungen und solchen, die die Minimalvoraussetzungen zur Fortsetzung zu genau einem Monopolyiden-Homomorphismus erfüllen.

Definition A2.3.7:

Sind (M, \times, \circ_D) und $(M_2, +, \cdot_{D_2})$ zwei Monopolyide, $M' \subseteq M$ mit $l_M \subseteq M'$, dann heißt eine Abbildung $\phi': M' \rightarrow M_2$ (auf die sequentiellen Darstellungen) **übertragbar**, wenn sie die Bedingungen (1)-(4) erfüllt:

(1) $\phi'(0) = 0$.

(2) $S = \begin{pmatrix} 1_{t1} & 1_{tn} \\ f_1 & \dots & f_n \\ 1_{b1} & 1_{bn} \end{pmatrix} \in S(M, M') \Rightarrow \overline{\phi'}(S) := \begin{pmatrix} \phi'(1_{t1}) & \phi'(1_{tn}) \\ \phi'(f_1) & \dots & \phi'(f_n) \\ \phi'(1_{b1}) & \phi'(1_{bn}) \end{pmatrix} \in S(M_2)$

(3) $S, S' \in S(M, M') \Rightarrow \overline{\phi'}(S \times S') = \overline{\phi'}(S) + \overline{\phi'}(S')$

(4) $S, S' \in S(M, M')$ und $(S, S') \in \mathcal{D} \Rightarrow (\overline{\phi'}(S), \overline{\phi'}(S')) \in \mathcal{D}_2$ und $\overline{\phi'}(S \circ S') = \overline{\phi'}(S) \cdot \overline{\phi'}(S')$.

Satz A2.3.9:

Sind (M, \times, \circ_D) und $(M_2, +, \cdot_{D_2})$ zwei Monopolyide und $M' \subseteq M$ mit $l_M \subseteq M'$, dann ist eine Abbildung $\phi': M' \rightarrow M_2$ genau dann eine (auf die sequentiellen Darstellungen) übertragbare Abbildung, wenn sie die Minimalvoraussetzungen zur Fortsetzung zu genau einem Monopolyiden-Homomorphismus erfüllt.

Natürlich erfüllt jeder Monopolyiden-Homomorphismus die Minimalvoraussetzungen zur Fortsetzung zu genau einem Monopolyiden-Homomorphismus und ist damit eine übertragbare Abbildung. Mit nachfolgender Definition und Satz kommt man dem Ziel, Monopolyiden-Homomorphismen zu konstruieren, bereits in greifbare Nähe.

Definition A2.3.10:

Sind (M, \times, \circ_D) und $(M_2, +, \cdot_{D_2})$ zwei Monopolyide, $M' \subseteq M$ mit $1_M \in M'$, dann heißt eine übertragbare Abbildung $\phi': M' \rightarrow M_2$ **Äquivalenzerhaltend**, wenn $\overline{\phi'}$ relationserhaltend ist, d.h. für $S, S' \in S(M, M')$ gilt: $S \sim S' \Rightarrow \overline{\phi'}(S) \sim \overline{\phi'}(S')$.

Satz A2.3.12:

Sind (M, \times, \circ_D) und $(M_2, +, \cdot_{D_2})$ zwei Monopolyide, $M' \subseteq M$ ein Erzeugendensystem von (M, \times, \circ_D) mit $1_M \in M'$ und $\phi': M' \rightarrow M_2$ eine Äquivalenzerhaltende, übertragbare Abbildung, dann läßt sich ϕ' zu genau einem Monopolyiden-Homomorphismus $\phi: M \rightarrow M_2$ fortsetzen.

Im allgemeinen muß jedoch nicht unbedingt gezeigt werden, daß $\overline{\phi'}$ für die gesamte Äquivalenzrelation " \sim " relationserhaltend ist. Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, daß genügt, daß $\overline{\phi'}$ auf einer Basis (von " \sim ") relationserhaltend ist.

A2.4 Überführbare sequentielle Darstellungen und Substitutionsbasen

In diesem Abschnitt wird nach einem Kriterium gesucht, mit dem festgestellt werden kann, ob eine übertragbare Abbildung äquivalenzerhaltend ist.

Definition A2.4.2:

Ist (M, \times, \circ_D) ein Monopolyid, $M' \subseteq M$ mit $1_M \in M'$ und ρ eine Teilmenge von $S(M, M') \times S(M, M')$, mit den Eigenschaften:

$$(1) (S, S') \in \rho \Rightarrow \omega_M(S) = \omega_M(S')$$

$$(2) (S, S') \in \rho \Rightarrow (S', S) \in \rho$$

Dann heißt ρ eine **symmetrische Substitutionsmenge von $S(M, M')$** .

Definition A2.4.4:

Ist (M, \times, \circ_D) ein Monopolyid, $M' \subseteq M$ mit $1_M \in M'$, ρ eine symmetrische Substitutionsmenge von $S(M, M')$ und $S, S' \in S(M, M')$, dann heißt **S bzgl. ρ direkt überführbar in S'** , wenn $S=S'$ ist oder zwei sequentielle Darstellungen $S_1, S_1' \in S(M, M')$ existieren mit $(S_1, S_1') \in \rho$ und eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

$$(a) S=S_1 \text{ und } S'=S_1'.$$

$$(b) \exists S_0 \in S(M, M') \text{ mit } S=S_0 \circ S_1 \text{ und } S'=S_0 \circ S_1'$$

$$(c) \exists S_2 \in S(M, M') \text{ mit } S=S_1 \circ S_2 \text{ und } S'=S_1' \circ S_2$$

$$(d) \exists S_0, S_2 \in S(M, M') \text{ mit } S=S_0 \circ S_1 \circ S_2 \text{ und } S'=S_0 \circ S_1' \circ S_2$$

Definition A2.4.6:

Ist (M, \times, \circ_D) ein Monopolyid, $M' \subseteq M$ mit $1_M \in M'$, ρ eine symmetrische Substitutionsmenge von $S(M, M')$ und $S, S' \in S(M, M')$, dann heißt **S bzgl. ρ überführbar in S'** (in Zeichen: $S \rightarrow_{\rho} S'$), wenn es eine Folge von sequentiellen Darstellungen $S_1, \dots, S_m \in S(M, M')$ gibt mit $S=S_1$, $S_m=S'$ und für $1 \leq k \leq m-1$ S_k bzgl. ρ direkt überführbar in S_{k+1} ist.

Bei genauerem Betrachten der Bedingungen (a)-(d) zeigt sich, daß diese gerade so formuliert sind, daß sie das Substituieren einer zusammenhängenden Folge von Spalten in einer sequentiellen Darstellung beschreiben. Eine sequentielle

Darstellung ist also genau dann bzgl. ρ in eine andere direkt überföhrbar, wenn sich beide in einer Folge von zusammenhängenden Spalten unterscheiden und diese ihrerseits ein Paar von äquivalenten, sequentiellen Darstellungen aus ρ definieren. Weiter ist eine sequentielle Darstellung in eine andere (allgemein) überföhrbar, wenn es eine Folge von solchen elementaren Substitutionen gibt.

Im Umgang mit überföhrbaren, sequentiellen Darstellungen gelten damit folgende Rechenregeln:

Satz A2.4.8:

Ist (M, \times, \circ_D) ein Monopolyid, $M' \subseteq M$ mit $1_M \in M'$, ρ eine symmetrische Substitutionsmenge von $S(M, M')$, dann gilt:

- (a) $S \in S(M, M') \Rightarrow S \xrightarrow{\rho} S$
- (b) $S \xrightarrow{\rho} S' \Rightarrow S' \xrightarrow{\rho} S$
- (c) $S \xrightarrow{\rho} S'$ und $S' \xrightarrow{\rho} S'' \Rightarrow S \xrightarrow{\rho} S''$
- (d) $S \xrightarrow{\rho} S'$ und $S \circ S''$ ist definiert \Rightarrow
 $S' \circ S''$ ist definiert und $S \circ S'' \xrightarrow{\rho} S' \circ S''$
- (e) $S \xrightarrow{\rho} S'$ und $S'' \circ S$ ist definiert \Rightarrow
 $S'' \circ S'$ ist definiert und $S'' \circ S \xrightarrow{\rho} S'' \circ S'$
- (f) $S_1 \xrightarrow{\rho} S_1'$, $S_2 \xrightarrow{\rho} S_2'$ und $S_1 \circ S_2$ definiert \Rightarrow
 $S_1' \circ S_2'$ ist definiert und $S_1 \circ S_2 \xrightarrow{\rho} S_1' \circ S_2'$.
- (g) $S \xrightarrow{\rho} S' \Rightarrow \omega_M(S) = \omega_M(S')$

Es sei an dieser Stelle noch einmal hervorgehoben, daß nach (b) die Relation " $\xrightarrow{\rho}$ " symmetrisch ist und somit auch die Formulierung "S und S' sind bzgl. ρ ineinander überföhrbar" sinnvoll ist. Besonders erwähnenswert ist auch, daß nach Regel (g) je zwei bzgl. ρ ineinander überföhrbare, sequentielle Darstellungen äquivalent sind. Obwohl oder gerade weil die Umkehrung dieser Aussage im allgemeinen nicht gilt, ist gerade dieser Fall von Bedeutung. Dazu folgende Definition:

Definition A2.4.10:

Ist (M, \times, \circ_D) ein Monopolyid, $M' \subseteq M$ mit $1_M \in M'$ und ρ eine symmetrische Substitutionsmenge von $S(M, M')$, dann heißt ρ eine **Substitutionsbasis von $S(M, M')$** , wenn gilt: $S, S' \in S(M, M')$ und $\omega_M(S) = \omega_M(S') \Rightarrow S \xrightarrow{\rho} S'$.

Vergleicht man diese Definition mit Definition A2.2.11, so stellt man fest, daß einer Substitutionsbasis von $S(M, M')$

gerade eine Basis von " \sim " entspricht. Deshalb kann auch hier festgestellt werden, daß zu jeder Teilmenge $M' \subseteq M$ mit $1_M \subseteq M'$ eine Substitutionsbasis von $S(M, M')$ existiert, da die Menge $\{(S, S') \in S(M, M') \times S(M, M') : \omega_M(S) = \omega_M(S')\}$ gerade eine solche definiert.

Mit der nächsten Definition bzw. mit dem nächsten Satz ist das Ziel dieses Abschnittes erreicht. Letzterer begründet auch die besondere Bedeutung von Substitutionsbasen.

Definition A2.4.12:

Sind (M, \times, \circ_D) und $(M_2, +, \cdot_{D_2})$ zwei Monopolyide, $M' \subseteq M$ mit $1_M \subseteq M'$ und ρ eine symmetrische Substitutionsmenge von $S(M, M')$, dann heißt eine übertragbare Abbildung $\phi' : M' \rightarrow M_2$ **auf ρ äquivalenzerhaltend**, wenn $\overline{\phi'}$ auf ρ relationserhaltend ist, d.h. $(S, S') \in \rho \Rightarrow \overline{\phi'}(S) \sim \overline{\phi'}(S')$.

Satz A2.4.14:

Sind (M, \times, \circ_D) und $(M_2, +, \cdot_{D_2})$ zwei Monopolyide, $M' \subseteq M$ ein Erzeugendensystem von (M, \times, \circ_D) mit $1_M \subseteq M'$, ρ eine Substitutionsbasis von $S(M, M')$ und $\phi' : M' \rightarrow M_2$ eine auf ρ äquivalenzerhaltende, übertragbare Abbildung, dann läßt sich ϕ' zu genau einem Monopolyiden-Homomorphismus $\phi : M \rightarrow M_2$ fortsetzen.

Der Vorteil obigen Satzes gegenüber Satz A2.3.12 liegt nicht nur darin, daß von der Abbildung ϕ' nur gezeigt werden muß, daß sie auf ρ äquivalenzerhaltend ist. Darüber hinaus kann die Substitutionsbasis ρ unabhängig von ϕ' definiert bzw. ermittelt werden.

Unter den Substitutionsbasen von $S(M, M')$ sind gerade solche von besonderem Interesse, auf denen jede übertragbare Abbildung äquivalenzerhaltend ist. Dies führt direkt zu den vollkommenen bzw. α -vollkommenen Monopolyiden.

A2.5 Vollkommene Monopolyide

Vollkommene bzw. Hotz'sche Monopolyide stellen den allgemeinsten Fall von α -vollkommenen Monopolyiden dar, auf die später noch eingegangen wird.

Wie bereits angedeutet, soll es in einem vollkommenen Monopolyiden möglich sein, jede übertragbare Abbildung zu genau einem Monopolyiden-Homomorphismus fortzusetzen. Dazu folgende Definition:

Definition A2.5.16:

Ist (M, \times, \circ_D) ein Monopolyid, dann heißt eine Menge $M' \subseteq M$ mit $1_M \subseteq M'$ ein **vollkommenes Erzeugendensystem** von (M, \times, \circ_D) , wenn für jedes Monopolyid $(M_2, +, \cdot_{D_2})$ jede übertragbare Abbildung $\phi': M' \rightarrow M_2$ zu genau einem Monopolyiden-Homomorphismus $\phi: (M, \times, \circ_D) \rightarrow (M_2, +, \cdot_{D_2})$ fortgesetzt werden kann (d.h. $\phi|_{M'} = \phi'$). Besitzt ein Monopolyid ein vollkommenes Erzeugendensystem, so heißt es ein **vollkommenes bzw. Hotz'sches Monopolyid**.

Die Bezeichnung "**Hotz'sches Monopolyid**" wird verwendet um darauf hinzuweisen, daß sich G. Hotz in [HOT74] als erster mit freien X-Kategorien und damit implizit mit vollkommenen Monopolyiden auseinandergesetzt hat.

Gleich der nächste Satz zeigt, daß ein vollkommenes Erzeugendensystem notwendigerweise immer auch ein Erzeugendensystem im Sinne von Satz und Definition A2.1.13 sein muß. Damit wird nachträglich die Bezeichnung "(vollkommenes) Erzeugendensystem" gerechtfertigt.

Satz A2.5.18:

Ist M' ein vollkommenes Erzeugendensystem eines Monopolyids (M, \times, \circ_D) , dann ist $\langle M' \rangle_M = M$.

Um aus Satz A2.4.14 ein geeignetes Kriterium für vollkommene Monopolyide entwickeln zu können, ist zuvor noch eine weitere Definition notwendig.

Definition A2.5.20:

Ist (M, \times, \circ_D) ein Monopolyid, $M' \subseteq M$ mit $1_M \subseteq M'$ und ρ eine symmetrische Substitutionsmenge von $S(M, M')$, dann heißt ρ eine **vollkommene Substitutionsmenge von $S(M, M')$** , wenn jede übertragbare Abbildung $\phi': M' \rightarrow M_2$ in ein Monopolyid $(M_2, +, \cdot_{D_2})$

auf ρ äquivalenzerhaltend ist. Ist ρ darüber hinaus eine Substitutionsbasis von $S(M, M')$, dann heißt ρ eine **vollkommene Substitutionsbasis von $S(M, M')$** .

Damit erhält man folgendes Kriterium für vollkommene Monopolyide:

Satz A2.5.22:

Ist (M, \times, \circ_D) ein Monopolyid, $M' \subseteq M$ ein Erzeugendensystem von (M, \times, \circ_D) mit $1_M \in M'$ und ρ eine vollkommene Substitutionsbasis von $S(M, M')$, dann ist M' ein vollkommenes Erzeugendensystem und (M, \times, \circ_D) ein vollkommenes Monopolyid.

A2.6 Alpha-vollkommene Monopolyide

Bei α -vollkommenen Monopolyiden handelt es sich um eine Verallgemeinerung der vollkommenen bzw. Hotz'schen Monopolyide. Dabei wird nicht gefordert, daß alle übertragbaren Abbildungen zu genau einem Monopolyiden-Homomorphismus fortgesetzt werden können, sondern nur diejenigen übertragbaren Abbildungen, die eine bestimmte Menge α von Bedingungen erfüllen. Obwohl nachfolgend immer von einer ganz bestimmten Menge α (nämlich $\alpha = \{(\alpha 1), (\alpha 2)\}$) ausgegangen wird, gelten jedoch nachfolgende Definitionen und Sätze für beliebige solche Mengen von Bedingungen. Insbesondere gilt dies für $\alpha = \emptyset$. In diesem Fall erhält man die im letzten Abschnitt besprochenen vollkommenen Monopolyide. Es folgen also nun Verallgemeinerungen der Definitionen und Sätze des letzten Abschnitts.

Definition A2.6.8:

Sind (M, \times, \circ_D) und $(M_2, +, \cdot_{D_2})$ zwei Monopolyide, $M' \subseteq M$ mit $1_M \in M'$, dann heißt eine übertragbare Abbildung $\phi': M' \rightarrow M_2$ **α -übertragbar**, wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt:

- ($\alpha 1$) Ist U ein echtes Untermonopolyid von M mit $1_M \in U \subseteq M'$, so ist die Restriktion $\phi'|_U$ ein Monopolyiden-Homomorphismus.
- ($\alpha 2$) $1_t, 1_t', 1_b, 1_b' \in 1_M$, $f \in M'$, $p_1, p_2 \in M'$ invertierbar und $1_t \times f \times 1_b = p_1 \circ (1_t' \times f \times 1_b') \circ p_2^{-1} \Rightarrow \phi'(1_t) + \phi'(f) + \phi'(1_b) = \phi'(p_1) \cdot (\phi'(1_t') + \phi'(f) + \phi'(1_b')) \cdot \phi'(p_2^{-1})$.

Ist $M' \neq M$, so ist in der Bedingung ($\alpha 1$) die Forderung " U ist ein echtes Untermonopolyid von M " überflüssig, da $U \subseteq M'$. Ist jedoch $M' = M$ und man läßt diese Forderung weg, so würde in nachfolgender Definition aus jedem Monopolyid ein α -vollkommenes Monopolyid. Dies wird durch diese zusätzliche Forderung verhindert.

Definition A2.6.10:

Ist (M, \times, \circ_D) ein Monopolyid, dann heißt eine Menge $M' \subseteq M$ mit $1_M \in M'$ ein **α -vollkommenes Erzeugendensystem** von (M, \times, \circ_D) , wenn für jedes Monopolyid $(M_2, +, \cdot_{D_2})$ jede α -übertragbare Abbildung $\phi': M' \rightarrow M_2$ zu genau einem Monopolyiden-Homomorphismus $\phi: (M, \times, \circ_D) \rightarrow (M_2, +, \cdot_{D_2})$ fortgesetzt werden kann (d.h. $\phi|_{M'} = \phi'$).

Besitzt ein Monopolyid ein α -vollkommenes Erzeugendensystem, so heißt es ein **α -vollkommenes Monopolyid**.

Der nächste Satz zeigt, daß ein α -vollkommenes Erzeugendensystem notwendigerweise immer auch ein Erzeugendensystem im Sinne von Satz und Definition A2.1.13 sein muß. Damit wird nachträglich die Bezeichnung " $(\alpha$ -vollkommenes) Erzeugendensystem" gerechtfertigt.

Satz A2.6.12:

Ist M' ein α -vollkommenes Erzeugendensystem eines Monopolyids (M, \times, \circ_D) , dann ist $\langle M' \rangle_M = M$.

Bevor nachfolgend für α -vollkommene Monopolyide ein geeignetes Kriterium angegeben werden kann, ist noch eine weitere Definition notwendig.

Definition A2.6.14:

Ist (M, \times, \circ_D) ein Monopolyid, $M' \subseteq M$ mit $1_M \in M'$ und ρ eine symmetrische Substitutionsmenge von $S(M, M')$, dann heißt ρ eine **α -vollkommene Substitutionsmenge von $S(M, M')$** , wenn jede α -übertragbare Abbildung $\phi': M' \rightarrow M_2$ in ein Monopolyid $(M_2, +, \cdot_{D_2})$ auf ρ äquivalenzerhaltend ist. Ist ρ darüber hinaus eine Substitutionsbasis von $S(M, M')$, dann heißt ρ eine **α -vollkommene Substitutionsbasis von $S(M, M')$** .

Das Kriterium für α -vollkommene Monopolyide lautet damit:

Satz A2.6.16:

Ist (M, \times, \circ_D) ein Monopolyid, $M' \subseteq M$ ein Erzeugendensystem von (M, \times, \circ_D) mit $1_M \in M'$ und ρ eine α -vollkommene Substitutionsbasis von $S(M, M')$, dann ist M' ein α -vollkommenes Erzeugendensystem und (M, \times, \circ_D) ein α -vollkommenes Monopolyid.

A2.7 Spezielle symmetrische Substitutionsmengen

Will man zeigen, daß eine bestimmte, übertragbare bzw. α -übertragbare Abbildung ϕ' auf einer Substitutionsbasis ρ von $S(M, M')$ äquivalenzerhaltend ist, so kann man ρ in mehrere (disjunkte) symmetrische Substitutionsmengen von $S(M, M')$ zerlegen und den Beweis für jede Teilmenge getrennt führen. Aus diesem Grund ist es nützlich gerade solche Teilmengen von ρ zu kennen, die eine vollkommene bzw. α -vollkommene Substitutionsmenge definieren.

Definition A2.7.18:

Ist (M, \times, \circ_D) ein Monopolyid, $M' \subseteq M$ mit $1_M \subseteq M'$ und $S, S', S'' \in S(M, M')$

mit $S = \begin{pmatrix} 1_{t1} & 1_{t2} \\ f_1 & f_2 \\ 1_{b1} & 1_{b2} \end{pmatrix}$, $S' = \begin{pmatrix} 1_{t1} \\ f_1 \\ 1_{b1} \end{pmatrix}$ und $S'' = \begin{pmatrix} 1_{t2} \\ f_2 \\ 1_{b2} \end{pmatrix}$, dann heißt das Paar (S, S')

bzw. (S', S) eine **Rechtskürzung** bzw. **Rechtserweiterung in $S(M, M')$** , wenn $f_2 \in 1_M$ ist. Umgekehrt heißt das Paar (S, S'') bzw. (S'', S) eine **Linkskürzung** bzw. **Linkserweiterung in $S(M, M')$** , wenn $f_1 \in 1_M$ ist.

Die Bezeichnungen in obiger Definition sind ein Hinweis darauf, daß die Werte von $\omega_M(S)$, $\omega_M(S')$ und $\omega_M(S'')$ entsprechend durch Kürzen bzw. Erweitern ineinander überführt werden können, wie aus dem Beweis zu nachfolgendem Satz ersehen werden kann.

Satz A2.7.20:

Ist (M, \times, \circ_D) ein Monopolyid, $M' \subseteq M$ mit $1_M \subseteq M'$, dann ist die Menge $\rho_X(M')$ aller Rechts- und Linkskürzungen bzw. -erweiterungen in $S(M, M')$ eine vollkommene Substitutionsmenge von $S(M, M')$.

Satz A2.7.22:

Ist (M, \times, \circ_D) ein Monopolyid, $M' \subseteq M$ mit $1_M \subseteq M'$, $S \in S(M, M')$ mit

$\text{Kern}(S) \subseteq 1_M$, dann ist S bzgl. $\rho_X(M')$ überführbar in $S' := \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_M(S) \\ 0 \end{pmatrix}$.

Definition A2.7.24:

Ist (M, \times, \circ_D) ein Monopolyid, $M' \subseteq M$ mit $1_M \in M'$ und $S, S' \in S(M, M')$

mit $S = \begin{pmatrix} 1_{t1} & 1_{t2} \\ f_1 & f_2 \\ 1_{b1} & 1_{b2} \end{pmatrix}$ und $S' = \begin{pmatrix} 1_{t1}' & 1_{t2}' \\ f_2 & f_1 \\ 1_{b1}' & 1_{b2}' \end{pmatrix}$, dann heißt das Paar (S, S') eine

Vertauschung in $S(M, M')$, wenn (a) oder (b) gilt:

- (a) $1_{t1}' = 1_{t2}$, $1_{b2}' = 1_{b1}$ und es existiert ein $1_m \in 1_M$ mit der Eigenschaft $1_{t1} = 1_{t2} \times 1_l(f_2) \times 1_m$, $1_{b2} = 1_m \times 1_r(f_1) \times 1_{b1}$, $1_{t2}' = 1_{t2} \times 1_r(f_2) \times 1_m$ und $1_{b1}' = 1_m \times 1_l(f_1) \times 1_{b1}$.
- (b) $1_{t2}' = 1_{t1}$, $1_{b1}' = 1_{b2}$ und es existiert ein $1_m \in 1_M$ mit der Eigenschaft $1_{t2} = 1_{t1} \times 1_r(f_1) \times 1_m$, $1_{b1} = 1_m \times 1_l(f_2) \times 1_{b2}$, $1_{t1}' = 1_{t1} \times 1_l(f_1) \times 1_m$ und $1_{b2}' = 1_m \times 1_r(f_2) \times 1_{b2}$.

Die im Fall (a) bzw. (b) angegebenen Gleichungen können etwas anschaulicher in Matrizenform dargestellt werden, in dem man fordert:

$$S = \begin{pmatrix} 1_{t2} \times 1_l(f_2) \ 1_m & 1_{t2} \\ f_1 & f_2 \\ 1_{b1} & 1_m \times 1_r(f_1) \ 1_{b1} \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$S' = \begin{pmatrix} 1_{t2} & 1_{t2} \times 1_r(f_2) \ 1_m \\ f_2 & f_1 \\ 1_m \times 1_l(f_1) \ 1_{b1} & 1_{b1} \end{pmatrix}$$

bzw.

$$S = \begin{pmatrix} 1_{t1} & 1_{t1} \times 1_r(f_1) \ 1_m \\ f_1 & f_2 \\ 1_m \times 1_l(f_2) \ 1_{b2} & 1_{b2} \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$S' = \begin{pmatrix} 1_{t1} \times 1_l(f_1) \ 1_m & 1_{t1} \\ f_2 & f_1 \\ 1_{b2} & 1_m \times 1_r(f_2) \ 1_{b2} \end{pmatrix}.$$

Die Bedingungen der Eigenschaft (a) bzw. (b) scheinen zunächst absolut willkürlich gewählt zu sein. Tatsächlich aber garantieren sie, daß unter ausschließlicher Anwendung der Monopolyid-Axiome $S \sim S'$ und $\bar{\phi}'(S) \sim \bar{\phi}'(S')$ folgt, wie im Beweis zu folgendem Satz gezeigt wird.

Satz A2.7.26:

Ist (M, \times, \circ_D) ein Monopolyid, $M' \subseteq M$ mit $1_M \in M'$, dann ist die Menge $\rho_V(M')$ aller Vertauschungen in $S(M, M')$ eine vollkommene Substitutionsmenge von $S(M, M')$.

Definition A2.7.28:

Ist (M, \times, \circ_D) ein Monopolyid, $M' \subseteq M$ mit $1_M \in M'$, $S, S' \in S(M, M')$ und existiert ein echtes Untermonopolyid U von M mit $1_M \in U \subseteq M'$,

$\text{Kern}(S) \subseteq U$ und $S' = \begin{pmatrix} 0 \\ (S) \\ 0 \end{pmatrix}$, dann heißt das Paar (S, S') eine

Verschmelzung in $S(M, M')$. Analog heißt das Paar (S', S) eine **Zerlegung in $S(M, M')$** .

Satz A2.7.30:

Ist (M, \times, \circ_D) ein Monopolyid und $M' \subseteq M$ mit $1_M \in M'$, dann ist die Menge $\rho_Z(M')$ aller Zerlegungen und Verschmelzungen in $S(M, M')$ eine α -vollkommene Substitutionsmenge von $S(M, M')$.

Satz A2.7.32:

Ist (M, \times, \circ_D) ein Monopolyid, $M' \subseteq M$ mit $1_M \in M'$ und 1_M das einzige echte Untermonopolyid U von M mit $1_M \in U \subseteq M'$, dann ist die Menge $\rho_Z(M')$ aller Zerlegungen und Verschmelzungen in $S(M, M')$ eine vollkommene Substitutionsmenge von $S(M, M')$.

Definition A2.7.34:

Ist (M, \times, \circ_D) ein Monopolyid, $M' \subseteq M$ mit $M^{-1} \subseteq M'$ und $S, S' \in S(M, M')$, dann heißt das Paar (S, S') eine **Überbrückung in $S(M, M')$** , wenn (a) oder (b) gilt:

(a)

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1_{t_2} \\ g_1 & f \\ 0 & 1_{b_2} \end{pmatrix}, \quad S' = \begin{pmatrix} 1_{t_1} & 0 \\ f & g_2 \\ 1_{b_1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{und } g_1 \text{ und } g_2 \text{ sind invertierbar}$$

mit $g_1 \circ (1_{t_2} \times f \times 1_{b_2}) = (1_{t_1} \times f \times 1_{b_1}) \circ g_2$.

(b)

$$S = \begin{pmatrix} 1_{t_1} & 0 \\ f & g_2 \\ 1_{b_1} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S' = \begin{pmatrix} 0 & 1_{t_2} \\ g_1 & f \\ 0 & 1_{b_2} \end{pmatrix}, \quad \text{und } g_1 \text{ und } g_2 \text{ sind invertierbar}$$

mit $(1_{t_1} \times f \times 1_{b_1}) \circ g_2 = g_1 \circ (1_{t_2} \times f \times 1_{b_2})$.

Satz A2.7.36:

Ist (M, \times, \circ_D) ein Monopolyid, $M' \subseteq M$ mit $M^{-1} \subseteq M'$, dann ist die Menge $\rho_B(M')$ aller Überbrückungen in $S(M, M')$ eine α -vollkommene Substitutionsmenge von $S(M, M')$.

A2.8 Natürliche Monopolyide

Definition A2.8.38:

Ein Monopolyid (M, \times, \circ_D) heißt genau dann ein **natürliches Monopolyid**, wenn ein nicht-trivialer Monopolyiden-Homomorphismus $\| \| : (M, \times, \circ_D) \rightarrow (\mathbb{N}_0, +, +)$ existiert.

Nachfolgend gilt das besondere Interesse deshalb den natürlichen Monopolyiden, da diese es ermöglichen "handsame" Kriterien für Substitutionsbasen festzulegen.

Der nachfolgende Satz zeigt, daß jeder nicht-triviale Monopolyiden-Homomorphismus $\| \| : (M, \times, \circ_D) \rightarrow (\mathbb{N}_0, +, +)$ ein echtes Untermonopolyid von M definiert.

Satz A2.8.3:

Ist (M, \times, \circ_D) ein Monopolyid und $\| \| : (M, \times, \circ_D) \rightarrow (\mathbb{N}_0, +, +)$ ein Monopolyiden-Homomorphismus, dann ist $M^{\| \|} := \{f \in M : \|f\| = 0\}$ ein Untermonopolyid von M mit $1_M \subseteq M^{-1} \subseteq M^{\| \|}$. Ist darüber hinaus $\| \|$ ein nicht-trivialer Monopolyiden-Homomorphismus, so ist $M^{\| \|}$ ein echtes Untermonopolyid von M .

Ausgehend von Satz A2.2.15 ist es möglich für Substitutionsbasen von natürlichen Monopolyiden "handsame" Kriterien angeben zu können.

Satz A2.8.8:

Ist (M, \times, \circ_D) ein Monopolyid, $\| \| : (M, \times, \circ_D) \rightarrow (\mathbb{N}_0, +, +)$ ein Monopolyiden-Homomorphismus, $M' \subseteq M$ mit $M^{\| \|} \subseteq M'$ und ρ eine symmetrische Substitutionsmenge von $S(M, M')$ mit $\rho_Z(M') \subseteq \rho$ und der Eigenschaft:

- (1) $S_1, S_2 \in S(M, M')$, $\|\omega_M(S_1)\| \geq 1$ und $\omega_M(S_1) = \omega_M(S_2) \Rightarrow$
 $\exists S_0', S_1', S_2' \in S(M, M')$ mit $\|\omega_M(S_0')\| \geq 1$, $\omega_M(S_1') = \omega_M(S_2')$,
 $S_1' \circ S_0'$ und $S_2' \circ S_0'$ sind definiert und $S_1 \xrightarrow{\rho} S_1' \circ S_0'$ sowie
 $S_2 \xrightarrow{\rho} S_2' \circ S_0'$.

So ist ρ eine Substitutionsbasis von $S(M, M')$.

Die nächsten Sätze stellen das Ziel aller Bemühungen dar. Mit ihnen kann bewiesen werden, daß bestimmte Untermonopolyide des Monopolyids der geordneten Subzentren-Netzwerke α -vollkommene Monopolyide sind und ein von 1_M verschiedenes vollkommenes Untermonopolyid existiert.

Satz A2.8.11: (führt zum 2. Hauptsatz)

Ist (M, \times, \circ_D) ein Monopolyid, $\|\cdot\|: (M, \times, \circ_D) \rightarrow (\mathbb{N}_0, +, +)$ ein nicht-trivialer Monopolyiden-Homomorphismus, $M' \subseteq M$ mit $M^{\|\cdot\|} \subseteq M'$ und erfüllt $\rho := \rho_X(M') \cup \rho_V(M') \cup \rho_Z(M') \cup \rho_B(M')$ die Bedingung:

- (1) $S_1, S_2 \in S(M, M')$, $\|\omega_M(S_1)\| \geq 1$ und $\omega_M(S_1) = \omega_M(S_2) \Rightarrow$
 $\exists S_0', S_1', S_2' \in S(M, M')$ mit $\|\omega_M(S_0')\| \geq 1$, $\omega_M(S_1') = \omega_M(S_2')$,
 $S_1' \circ S_0'$ und $S_2' \circ S_0'$ sind definiert und $S_1 \xrightarrow{\rho} S_1' \circ S_0'$ sowie
 $S_2 \xrightarrow{\rho} S_2' \circ S_0'$.

so ist ρ eine α -vollkommene Substitutionsbasis von $S(M, M')$. Ist darüber hinaus M' ein Erzeugendensystem, so ist M' ein α -vollkommenes Erzeugendensystem und (M, \times, \circ_D) ein α -vollkommenes Monopolyid.

Der folgende Satz stellt einen Spezialfall von Satz A2.8.11 dar.

Satz A2.8.13: (führt zum 1. Hauptsatz)

Ist (M, \times, \circ_D) ein Monopolyid, $\|\cdot\|: (M, \times, \circ_D) \rightarrow (\mathbb{N}_0, +, +)$ ein nicht-trivialer Monopolyiden-Homomorphismus mit $M^{\|\cdot\|} = 1_M$, $M' \subseteq M$ mit $1_M \subseteq M'$ und erfüllt $\rho := \rho_X(M') \cup \rho_V(M')$ die Bedingung:

- (1) $S_1, S_2 \in S(M, M')$, $\|\omega_M(S_1)\| \geq 1$ und $\omega_M(S_1) = \omega_M(S_2) \Rightarrow$
 $\exists S_0', S_1', S_2' \in S(M, M')$ mit $\|\omega_M(S_0')\| \geq 1$, $\omega_M(S_1') = \omega_M(S_2')$,
 $S_1' \circ S_0'$ und $S_2' \circ S_0'$ sind definiert und $S_1 \xrightarrow{\rho} S_1' \circ S_0'$ sowie
 $S_2 \xrightarrow{\rho} S_2' \circ S_0'$.

so ist ρ eine vollkommene Substitutionsbasis von $S(M, M')$. Ist darüber hinaus M' ein Erzeugendensystem, so ist M' ein vollkommenes Erzeugendensystem und (M, \times, \circ_D) ein vollkommenes Monopolyid.

Als abschließender Satz folgt nun noch ein einfaches Kriterium für α -übertragbare Abbildungen.

Satz A2.8.15: (führt zum 3. Hauptsatz)

Sind (M, \times, \circ_D) und $(M_2, +, \cdot_{D_2})$ zwei Monopolyide, $\|\cdot\|: (M, \times, \circ_D) \rightarrow (\mathbb{N}_0, +, +)$ ein nicht-trivialer Monopolyiden-Homomorphismus, $M' \subseteq M$ mit $M^{\|\cdot\|} \subseteq M'$ und es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\|f\| \leq n \quad \forall f \in M'$, dann ist $\phi': M' \rightarrow M_2$ genau dann eine α -übertragbare Abbildung, wenn ϕ' folgende Bedingungen erfüllt:

$$(\alpha 0') (f, g) \in D \cap M' \times M' \Rightarrow (\phi'(f), \phi'(g)) \in D_2$$

($\alpha 1'$) Die Restriktion von ϕ' auf $M^{\parallel 0}$ ist ein Monopolyiden-Homomorphismus.

$$(\alpha 2') \quad 1_t, 1_t', 1_b, 1_b' \in 1_M, \quad f \in M' \setminus M^{\parallel 0}, \quad p_1, p_2 \in M^{-1} \quad \text{und} \quad 1_t \times f \times 1_b = \\ p_1 \circ (1_t' \times f \times 1_b') \circ p_2^{-1} \Rightarrow \phi'(1_t) + \phi'(f) + \phi'(1_b) = \\ \phi'(p_1) \cdot (\phi'(1_t') + \phi'(f) + \phi'(1_b')) \cdot \phi'(p_2^{-1}).$$

Index

A

Abschluß 92

Alpha-übertragbare Abbildung
61, 233, 283

Alpha-vollkommene

- Substitutionsbasis 217,
284

- Substitutionsmenge 284

Alpha-vollkommenes

- Erzeugendensystem 60,
217, 283

- Monopolyid 217, 284

antisymmetrischer Graph 66

äquivalente Isomorphieklassen
143

äquivalente sequ. Darst. 273

äquivalente Subzentren-
Netzwerke 35, 127

äquivalenzerhaltende
Abbildung 277, 280

Äquivalenzklasse 143, 261

Äquivalenzrelation 261

Attributberechnungsregel 242

attributierte Grammatiken
242

ausgehende Kante 188

äußerer Ein-/Ausgang 28, 81

Auswahlabbildung 14, 31, 43,
222

B

Basis einer Kongruenz 263

benanntes Netzwerk 109

bestimmende Abbildung 158

bewertungserhaltender
Isomorphismus 108, 127

binäre Relation 261

bipartites Subzentren-
Netzwerk 105

D

das leere Netzwerk 83

Defaultwert 44, 222

direkt überführbar 278

disjunkte Subzentren-
Netzwerke 88

Dualitätssatz 85

E

echte Zykel 47, 90

echtes Untermonopolyid 271

eindeutig definierte
Zuordnung 75

eindeutig formatiert 114

einfache

- Verjüngung 155

- Verzweigung 155

einfacher

- Ein-/Ausgang 156

- Interimknoten 40, 149

einfaches Netzwerk 39, 149

Eingangsverjüngung 164

- eingeschränkt bewertungserhaltender Isomorphismus** 127, 158
Einheit siehe Identität
Epimorphismus siehe Homomorphismus
erweitert
 - rückwärtszyklische Permutation 154
 - vorwärtszyklische Permutation 154
 erweitertes Datenflußmodell 28
Erzeugendensystem
 - eines Monopolyids 272
 - eines Polyids 266
 Alpha-vollkommenes - 283
 vollkommenes - 281
erzeugtes
 - Untermonopolyid 272
 - Unterpolyid 266
F
fast leeres Netzwerk 83, 143, 151
fehlendes Subzentrum 93
formatiertes Subzentren-Netzwerk 30, 114
fortlaufend indizierende Abbildung 71, 76
fortlaufend indiziertes Subzentren-Netzwerk 30, 110
 fortsetzen 234
freier Ein-/Ausgang 81
Funktionen 40
G
geordnetes Subzentren-Netzwerk 30, 112
gepacktes Subzentren-Netzwerk 28, 96
gerichteter Graph 66
geschlossenes Subzentren-Netzwerk 91
Graph 66, 237
 Graph-Grammatiken 240
H
Homomorphismus
 - auf partiellen Halbgruppen 259
 Monopolyiden- 275
 Polyiden- 267
 trivialer - 275
Hotz'sches Monopolyid 281
I
idempotentes Element 258
Identität 38, 140, 259
Index 71
indizierende Abbildung 71, 72
indizierte Menge 71
induzierte lineare Ordnung 71
ineinander überführbar 169

Index

innerer Ein-/Ausgang 28, 81
Interimknoten 28, 81
Interpretation 35, 42, 43, 44, 60, 62
Inverses 266
invertierbar 266
isoliertes Element 258
isomorphe

- Graphen 68
- Subzentren-Netzwerke 100

Isomorphieklasse 139
Isomorphismus 100, siehe Homomorphismus
K
Kante 66
kantenbewerteter Graph 66, 238
Kern e. sequ. Darst. 168, 273
Knoten 66
knotenbewerteter Graph 66, 238
knotenbewertetes Netzwerk 108
Kongruenz 261
Kongruenzrelation siehe Kongruenz
Konsistenzbedingung 242
kontextfreie Grammatik 242
korrespondierende Elemente 74

kürzbares

- Element 259
- Monoid 265
- Monopolyid 271
- Polyid 265

L
Länge eines Pfades 67
leeres Netzwerk 38
linear geordnete Menge 71
lineare Ordnung 71
links-

- kürzbares Element 258
- neutrales Element 258
- seitige Identität 142, 265
- verträgliche Relation 261

Links-

- erweiterung 170, 285
- inverses 265
- kürzung 170, 285

M
markierter Graph 240
markiertes Subzentren-Netzwerk 95
Menge

- der endlichen Produkte 259, 272

Minimalvoraussetzungen 276
Monoid 265

- monoidales Bipolyid** 270
- Monomorphismus** siehe
Homomorphismus
- Monopolyid** 270
- der Äquivalenzklassen 37, 144
 - der Funktionen 221
- Monopolyiden-Homomorphismus**
42, 228, 275
- N**
- Nachfolger** 66
- natürliches Monopolyid 45,
60, 289
- Neutralelement** siehe
Identität
- Nichtterminale** 242
- n-partiter Graph** 68
- Nullfunktion** 41
- O**
- obere Identität** 154
- offenes Subzentren-Netzwerk**
91
- Öffnung** 93
- P**
- paralleles Produkt** 35, 46,
129
- partiell geordnete Menge** 71
- partielle**
- Halbgruppe 258
 - Ordnung 71
 - Unterhalbgruppe 259
- partielle Halbgruppe**
- kürzbare** - 259
- passend** 221
- Permutation** 39, 140
- Petri-Netz** 246
- Pfad** 67
- Polyid** 265
- Polyiden-Homomorphismus** 267
- Produktion** 242
- Produktkante** 131
- Q**
- Quotientenmenge** 261
- R**
- rechts-
- kürzbares Element 258
 - neutrales Element 258
 - seitige Identität 142,
265
 - vertägliche Relation 261
- Rechts-**
- erweiterung 170, 285
 - inverses 265
 - kürzung 170, 285
- reflexive Relation** 261
- regulärer Graph** 67
- reines**
- Datenflußmodell 26
 - Datenflußnetzwerk 34

Index

- relationserhaltende Abbildung** 264
- Repräsentant** 139, 143
- rückwärtszyklische Permutation** 151
- S**
- Schaltkreistheorie 250
- Schlaufen** 90
- schlaufenbildene Kante** 90
- sequentielle Darstellung** 168, 273
- serielles Produkt** 36, 46, 131
- Spiegelbild** 84
- Stelle** 246
- strukturierte Systemanalyse 254
- stückweise**
- indiziert 76
 - linear 75
 - lineare Ordnung 76
- Substitutionsbasis** 169, 279
- Alpha-vollkommene - 284
- Substitutionsmenge**
- Alpha-vollkommene - 284
- Subzentren-Netzwerk** 28, 81
- Subzentrum** 28
- symmetrische**
- Relation 261
 - Substitutionsmenge 169, 278
- symmetrischer Graph** 66
- T**
- Teilgraph** 67
- Terminale** 242
- totale Ordnung** 71
- Transition** 246
- transitive Relation** 261
- trivialer Homomorphismus** 275
- tri-zyklischer Graph 69, 102
- tri-zyklisches Subzentren-Netzwerk** 98
- Typenausgangsvektor** 141
- Typeneingangsvektor** 141
- typenindexkonformes Subzentren-Netzwerk** 31, 126
- typenkonformes Subzentren-Netzwerk** 117
- U**
- Überbrückung** 174, 287
- überführbar** 261, 262, 278
- übertragbare Abbildung** 276
- untere Identität** 154
- Untergraph** 67
- Untermonoid** 266
- Untermonopolyid** 271
- Unterpolyid** 266

- ursprüngliches Datenflußmodell** 26
- V**
- Verbindungskante** 131
- Vereinigung** 73, 89
- Verjüngung** 83
- Verschmelzung** 171, 287
- Vertauschung** 170, 286
- Verzweigung** 83
- virtuelle Verbindungskante** 131
- virtuelles Bild** 109
- vollkommene
- Substitutionsbasis 183, 282
 - Substitutionsmenge 281
- vollkommenes
- Erzeugendensystem 281
 - Monopolyid 183, 281
- Vorgänger** 66
- vorwärtszyklische Permutation** 151
- W**
- Weg** 67
- Wert e. sequ. Darst.** 168, 273
- Z**
- Zerlegung** 171, 287
- zu [H] führende Kante** 188
- zusammenhängender Graph** 67
- zusätzliches Subzentrum** 92
- Zykel** 67
- zykliefreies Subzentren-Netzwerk** 90